Clase 15 MA3705. 6 de noviembre 2020.

Tabla

- Teorema de König en grafos bipartitos.
- Teorema de Hall.
- Problemas de matching perfecto de costo mínimo.

Teorema de König en grafos bipartitos

De la clase pasada:

Vertex-cover (Cubrimiento por vértices)

$C \subseteq V$ es cubrimiento por vértices de $G = (V, E)$ si toda arista $e \in E$ toca un vértice de C.

Dualidad débil en grafos generales

$\forall M$ matching, $\forall C$ cubrimiento, $|M| \leq |V|$

Teorema de König: Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito

$$\text{máx}\{|M| \colon M \text{ matching}\} = \text{mín}\{|C| \colon C \text{ cubrimiento}\}$$

Demostración algorítmica.

Algoritmo (König 1931)

Entrada: $G = (L \cup R, E)$ bipartito.
$M \leftarrow \emptyset$.
Repetir
- Construir $D(G, M)$ y árbol BFS desde s.
- $Q \leftarrow \{$nodos alcanzables desde s en $D(G, M)\}$.
- **si** $t \in Q$ **entonces**
  - $M \leftarrow M \Delta P$, con P el camino M-aumentante encontrado.
- **en otro caso**
  - $C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$
  - **devolver** (M, C)
- **fin**

Teorema importante

Teorema

Sea Q el conjunto de los nodos alcanzables desde s en $D(G, M)$. Si M es máximo entonces $C := (L \setminus Q) \cup (Q \cap R)$ es cubrimiento por vértices de G y $|C| = |M|$.

(continuación)

Teorema

Sea Q el conjunto de los nodos alcanzables desde s en G_M. Si M es máximo entonces $C := (Q \setminus L) \cup (Q \cap R)$ es cubrimiento por vértices de G y $|C| \leq |M|$.

Resumen algorítmico para $G = (V, E)$ bipartito

1. Si M es matching máximo, se puede encontrar cubrimiento mínimo en tiempo $O(n + m)$.
2. El algoritmo anterior encuentra un matching máximo y un cubrimiento mínimo de G bipartito en tiempo $O(n(n + m))$
3. Mejores algoritmos:

Algoritmo	Complejidad
König (1931)	$O(n(n + m))$
Hopcroft-Karp (1973)	$O(\sqrt{n}(n + m))$
Mucha-Sankowsky (2004)	whp. $O(n^{2{,}372864})$
Madry (2011)	whp. $\widetilde{O}(m^{10/7})$

Teorema de Hall

Consecuencia: Teorema de(l matrimonio de) Hall

Hall (1935)

Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito. Existe un matching que cubre L si y solo si:
$$\forall X \subseteq L, |N(X)| \geq |X|$$

Demostración

Algunas aplicaciones

Si G es grafo bipartito con aristas y regular (el grado de cada vértice es el mismo) entonces tiene matching perfecto

Algunas aplicaciones

Una matriz de permutación es una matriz en $\{0,1\}^{n\times n}$ con exactamente un uno por fila y un uno por columna.
Sea A una matriz de $n \times n$ a coeficientes no negativos, tal que cada fila y cada columna suma $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces existe P matriz de permutación y $\lambda \geq \mu > 0$ tal que $A > P\mu$

Algunas aplicaciones

Una matriz doblemente estocástica es una matriz en $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ cuyas filas y columnas suman 1.

Teorema de Birkhoff Von-Neumann

Toda matriz doblemente estocástica es combinación convexa de matrices de permutación.

Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo. El poliedro P siguiente se conoce como el polítopo de matching perfecto fraccional.

$$
\begin{aligned}
P = \{x \in \mathbb{R}^E \colon & \\
& \sum_{j\colon ij \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in L \\
& \sum_{i\colon ij \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in R \\
& x \geq 0\}
\end{aligned}
$$

T. Birkhoff-Von Neumann $\implies$

Problemas de matching perfecto de costo mínimo.

Tres problemas equivalentes

Consideremos los siguientes problemas

1. Dado $G = (V, E)$ bipartito $w \colon E \to \mathbb{R}$ encontrar matching M de peso $w(M)$ máximo.
2. Dado $G = (V, E)$ bipartito, $k \in \mathbb{N}$, $w \colon E \to \mathbb{R}$ encontrar matching M con $|M| = k$ y de peso $w(M)$ máximo.
3. (Problema de asignación). Dado $G = (V, E)$ bipartito completo balanceado, $c \colon E \to \mathbb{R}$ encontrar matching perfecto M de peso $c(M)$ mínimo.

Ejercicio presentable: Demostrar que $3 \implies 2$

Ejercicios desafío: Demostrar que $3 \implies 1$; y que $1 \implies 3$.

Problema de asignación como programa lineal entero

Sea $G = (L \cup R; E = L \times R)$ grafo completo bipartito balanceado. $c\colon E \to \mathbb{R}$ función de costo.

Programa lineal puro!

Optimización lineal + teorema de BVN + dualidad:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} && = \min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} && = \max \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j \\ &\sum_{i\in L} x_{ij} = 1 \,\forall j \in R && \sum_{i\in L} x_{ij} = 1 \,\forall j \in R && \\ &\sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \,\forall i \in L && \sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \,\forall i \in L && \\ &x \in \{0,1\}^E && x \geq 0 && \end{aligned}$$

Introducción a Algoritmos Primal-Dual

Idea para encontrar un par de soluciones primal-dual de un PL de manera combinatorial:

1. Encontrar solución DUAL d factible inicial
2. Repetir:
   1. Obtener vector p con holgura complementaria respecto a d
   2. Si p es factible, ganamos
   3. Si no, usar p para encontrar un mejor d DUAL.