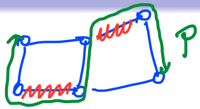
Clase 14 MA3705. 2 de noviembre 2020.

Tabla

- Emparejamientos y Cubrimientos.
- Teorema de König en grafos bipartitos.
- Teorema de Hall.

Emparejamientos y cubrimientos

De la clase pasada:



$M \Delta P$ es matching con $|M \Delta P| = |M| + 1$.

M es matching de tamaño máximo en G si y solo si no existen caminos M-aumentantes.

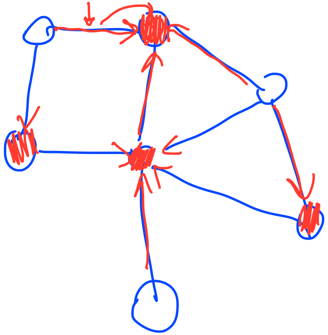
Idea de un algoritmo para encontrar un matching de tamaño máximo.

- Partir de un matching M (ejemplo $M = \emptyset$)
- Repetir
  1. Buscar camino M-aumentante P
  2. Si lo encuentro. $M \leftarrow M \Delta P$
  3. Si no lo encuentro, certificar que no existen y terminar.

¿Cómo se certifica que no hay caminos M-aumentantes?

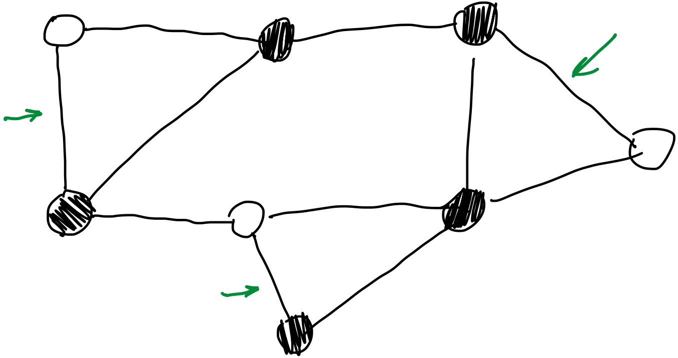
Vertex-cover (Cubrimiento por vértices)

Decimos que $C \subseteq V$ es cubrimiento por vértices de un grafo $G = (V, E)$ si toda arista $e \in E$ es cubierta (incidente) por un vértice de C.



C

Un guardia parado en una esquina (vértice) de un museo puede vigilar los pasillos adyacentes. ¿Cuántos guardias necesitamos para proteger todo el museo?



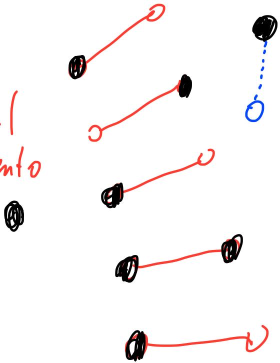
Dualidad débil

Sea G un grafo cualquiera. Sea M un matching de G y C un cubrimiento de G.

$$|M| \leq |C|$$

$$\underset{\text{matching}}{\text{máx}} |M| \leq \underset{\text{cubrimiento}}{\text{min}} |C|$$

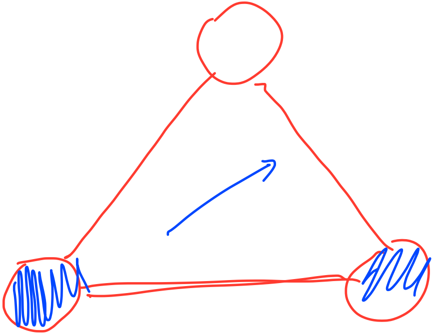
M



C

Cada arista de M debe tocar un vértice distinto de C

No siempre hay igualdad



Max $|M| = 1$
matching

Min $|C| = 2$
cubrimiento

¿Por qué se llama dualidad débil?

Un pequeño recuerdo de programación lineal.

Dualidad Fuerte

$$\max |M| \leq \max \sum_{e \in E} x_e = \min \sum_{v \in V} y_v \leq \min |C|$$

x_e

M matching

||

$\max \sum_{e \in E} x_e$

$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V$

$\boxed{x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E}$

Matching

$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v$

$x_e \geq 0 \quad \forall e$

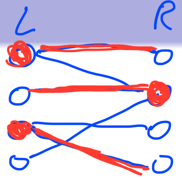
$y_u + y_v \geq 1 \quad \forall e = uv$

$y_v \geq 0 \quad \forall v \in V$

$y_v \in \{0,1\}$

Cubrimiento

Teorema de König para grafos bipartitos



Teorema de König: Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito entonces

$$\max\{|M| : M \text{ matching}\} = \min\{|C| : C \text{ cubrimiento}\}$$

Ejemplo de teorema max-min.

Basta demostrar que existe M matching y C cover con $|M| = |C|$.

Demostraremos este teorema algorítmicamente encontrando simultáneamente M y C

¿Por qué grafos bipartitos?

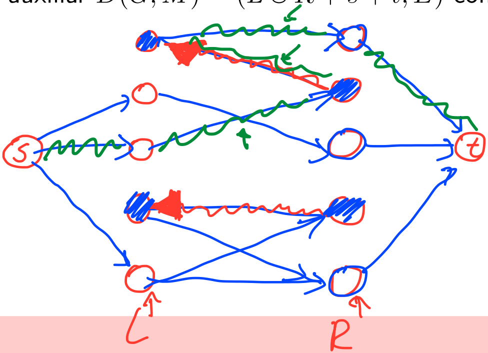
Recuerdo de tarea 1:

- No es difícil encontrar paseos que alternen entre 2 colores, en grafos generales. Lamentablemente, encontrar caminos es más complicado.
- En grafos bipartitos, resulta que los paseos alternantes más cortos son también caminos alternantes.
- Una construcción auxiliar hace más sencillo encontrar estos caminos M-alternantes (necesitamos que sean M-aumentantes)

Construcción auxiliar para encontrar caminos M-aumentantes

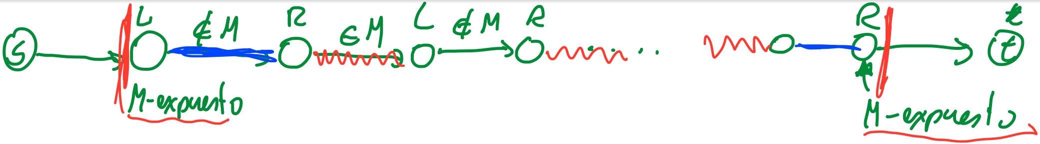
Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito, M matching. Digrafo auxiliar $D(G, M) = (L \cup R + s + t, \vec{E})$ con arcos:

1. Cada $e \in M$ se dirige hacia L. ✓
2. Cada $e \in E \setminus M$ se dirige hacia R. ✓
3. Arcos sv para cada nodo $v \in L$ M-expuesto
4. Arcos wt para cada nodo $w \in R$, M-expuesto.



Lema (directo por construcción)

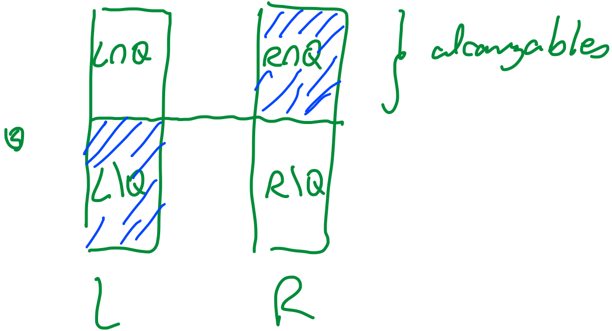
Cada s-t camino en $D(G, M)$ está en correspondencia con un camino M-aumentante en G.



Teorema

Sea Q el conjunto de los nodos alcanzables desde s en $D(G, M)$. Si M es máximo entonces $C := \underbrace{\cancel{(Q \setminus L)}}_{(L \setminus Q} \cup \underbrace{(Q \cap R)}$ es cubrimiento por vértices de G y $\boxed{|C| \leq |M|}$.

$|M| \leq |C|$



(continuación)

Teorema

Sea Q el conjunto de los nodos alcanzables desde s en G_M. Si M es máximo entonces $C := (Q \setminus L) \cup (Q \cap R)$ es cubrimiento por vértices de G y $|C| \leq |M|$.

Algoritmo (König 1931)

Entrada: $G = (L \cup R, E)$ bipartito.
$M \leftarrow \emptyset$. ✓
Repetir n pasos
- Construir $D(G, M)$ y árbol BFS desde s. ✓
- $Q \leftarrow \{$nodos alcanzables desde s en $D(G, M)\}$.
- **si** $t \in Q$ **entonces**
  - $M \leftarrow M \Delta P$, con P el camino M-aumentante encontrado. ✓
- **en otro caso**
  - $C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$
  - **devolver** (M, C)
- **fin**

$O(n+m)$

total

$O(n(n+m))$