Clase 16 MA3705. 9 de noviembre 2020.

Tabla

- Teorema de Hall.
- Problemas de matching perfecto de costo mínimo.

Teorema de Hall

De las clases pasadas:

Algoritmo (König 1931)

Entrada: $G = (L \cup R, E)$ bipartito.
$M \leftarrow \emptyset$.
Repetir
- Construir $D(G, M)$ y árbol BFS desde s.
- $Q \leftarrow \{$nodos alcanzables desde s en $D(G, M)\}$.
- **si** $t \in Q$ **entonces**
  - $M \leftarrow M \Delta P$, con P el camino M-aumentante encontrado.
- **en otro caso**
  - $C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$
  - **devolver** (M, C)
- **fin**

Encuentra M y C óptimos en $O(n(n+m))$

Dualidad débil en grafos generales

$\forall M$ matching, $\forall C$ cubrimiento, $|M| \leq |C|$

Teorema de König:
Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito

$$\max\{|M| : M \text{ matching}\} = \min\{|C| : C \text{ cubrimiento}\}$$

Ejemplo

Consecuencia: Teorema de(l matrimonio de) Hall

Hall (1935)

Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito. Existe un matching que cubre L si y solo si:

$$\forall X \subseteq L, |N(X)| \geq |X|$$

Demostración: Sea C cubrimiento de tamaño mínimo.

Aplicaciones

Si G es grafo bipartito con aristas y regular (el grado de cada vértice es el mismo) entonces tiene matching perfecto

Aplicaciones

Una matriz de permutación es una matriz en $\{0,1\}^{n\times n}$ con exactamente un uno por fila y un uno por columna.
Sea A una matriz de $n \times n$ no negativa, tal que cada fila y cada columna suma $\lambda > 0$. Sea $\mu = \min_{ij:A_{ij}>0} A_{ij}$. Entonces existe P matriz de permutación tal que $A \geq P\mu$

Aplicaciones

Una matriz doblemente estocástica es una matriz en $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ cuyas filas y columnas suman 1.

Teorema de Birkhoff Von-Neumann

Toda matriz doblemente estocástica es combinación convexa de matrices de permutación.

Interpretación poliedral

El polítopo de matching perfecto fraccional de $G = (L \cup R, E)$ es

$$P = \{x \in \mathbb{R}^E : \\ \sum_{j\colon ij \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in L \\ \sum_{i\colon ij \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in R \\ x \geq 0\}$$

T. Birkhoff-Von Neumann $\implies$

Problemas de matching perfecto de costo mínimo.

1. Dado $G = (V, E)$ bipartito $w \colon E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching M de peso $w(M)$ máximo.
2. Dado $G = (V, E)$ bipartito, $k \in \mathbb{N}$, $w \colon E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching M con $|M| = k$ y de peso $w(M)$ máximo.
3. (Problema de asignación). Dado $G = (V, E)$ bipartito completo balanceado, $c \colon E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching perfecto M de peso $c(M)$ mínimo.

Ejercicio presentable: Demostrar que $3 \implies 2$

Ejercicios desafío: Demostrar que $3 \implies 1$; y que $1 \implies 3$.

Problema de asignación como programa lineal entero

Sea $G = (L \cup R; E = L \times R)$ grafo completo bipartito balanceado. $c\colon E \to \mathbb{R}$ función de costo.

Programa lineal puro!

Optimización lineal + teorema de BVN + dualidad:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} \qquad\qquad & = \text{mín} \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} \qquad\qquad & = \text{máx} \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j \\
\sum_{i\in L} x_{ij} = 1 \, \forall j \in R \qquad & \sum_{i\in L} x_{ij} = 1 \, \forall j \in R & \\
\sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \, \forall i \in L \qquad & \sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \, \forall i \in L & \\
x \in \{0,1\}^E \qquad & x \geq 0 &
\end{aligned}$$

Introducción a Algoritmos Primal-Dual

Idea para encontrar un par de soluciones primal-dual de un PL de manera combinatorial:

1. Encontrar solución DUAL d factible inicial
2. Repetir:
    1. Obtener vector p con holgura complementaria respecto a d
    2. Si p es factible, ganamos
    3. Si no, usar p para encontrar un mejor d DUAL.

Holgura complementaria en problema de asignación

$$\min \sum_{ij \in E} x_{ij} c_{ij} \quad = \quad \max \sum_{i \in L} y_i + \sum_{j \in R} z_j$$

$$\sum_{i \in L} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in R \qquad\qquad y_i + z_j \leq c_{ij}$$

$$\sum_{j \in R} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in L$$

$$x \geq 0$$

x primal factible & (y, z) dual factible & holgura complementaria $\implies$ óptimo.

Lema

Si (y, z) dual factible, M matching perfecto $M \subseteq E(y, z) = \{ij \in E \colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$ entonces M es asignación óptima.

(incompleto) Algoritmo Húngaro primal-dual para problema de asignación

ALGORITMO PRIMAL-DUAL (KUHN 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$
(y, z) solución dual-factible inicial.
Repetir
- $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
- **si** M *perfecto* **entonces devolver** M
- **en otro caso** Encontrar dual-factible $(\tilde{y}, \tilde{z})$ con $y(L) + z(R) < \tilde{y}(L) + \tilde{z}(R)$. $(y,z) \leftarrow (\tilde{y}, \tilde{z})$

$$(D)\ \max y(L) + z(R)$$
$$y_i + z_j \le c_{ij}$$

$C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ cubre $(V, E(y,z))$

Completando detalles

Algoritmo Primal-Dual (Kuhn 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$

$y \leftarrow 0$, $\forall j \in R, z_j \leftarrow \max\{c_{ij} - y_i : i \in L\}$

Repetir

- $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
- **si** M *perfecto* **entonces devolver** M
- **en otro caso**
  - $\varepsilon \leftarrow \min\{c_{ij} - y_i - z_j : i \in L \cap Q, j \in R \setminus Q\}$
  - $y \leftarrow y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}$
  - $z \leftarrow z - \varepsilon\chi^{R\cap Q}$
- **fin**

$$(D)\ \max y(L) + z(R)$$

$$y_i + z_j \leq c_{ij}$$

$C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ cubre $(V, E(y,z))$