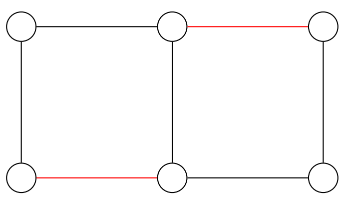
MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Manuel Torres V..
Fecha: 2 de Noviembre de 2020
(https://youtu.be/gqHrjFHlWn8)

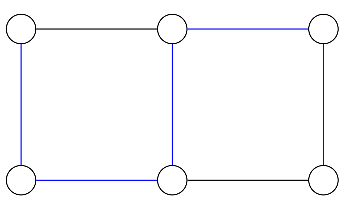
Cátedra 14

Proposición 1. *M es un matching de tamaño máximo en G ssi no existen caminos M-aumentantes*

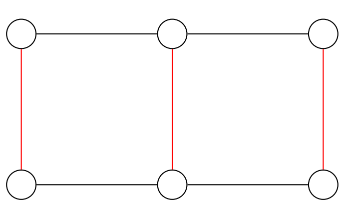
Ejemplo 1. Veamos un ejemplo de la idea anterior. Considere el siguiente grafo $G = (V, E)$, con un matching M (en rojo).



En este caso M no es de tamaño máximo, pues existe el siguiente camino aumentante P (en azul)



en este caso P (el camino aumentante) inicia y acaba en aristas que no están en M, y es alternante (arista por medio del camino está en M). En este caso, como existe P aumentante, entonces M no es máximo, de hecho $M\Delta P$ es matching con $|M\Delta P| = |M| + 1$, donde $M\Delta P$ es mathing máximo (en rojo):



Idea de un algoritmo para encontrar un matching de tamaño máximo

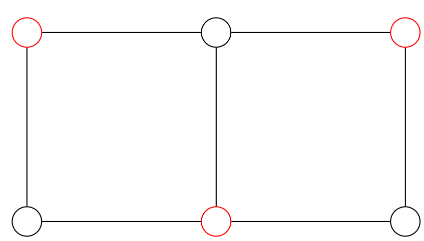
1. Partir de un matching M (por ejemplo $M = \emptyset$).
2. Repetir:
   a) Buscar camino M-aumentante P.
   b) Si lo encuentro. $M \leftarrow M\Delta P$.
   c) Si no lo encuentro, certificar que no existen y terminar.

Una pregunta natural a realizar es:

¿Cómo se certifica que no hay caminos M-aumentantes?

Definición 1 (Cubrimiento por vértices (vertex-cover))**.** Decimos que $C \subseteq V$ es cubrimiento por vértices de un grafo $G = (V, E)$ si toda arista $e \in E$ es cubierta (incidente) por un vértice de C.

Ejemplo 2. Considere un grafo $G = (E, V)$, con $C \subseteq V$ indicado en rojo en la figura. Notar que todas las aristas $e \in E$ inciden en algún vértice $v \in C$, concluyendo que C es un cubrimiento por vértices de G.



Observación. En un digrafo, hay que tener cuidado ya que una arista incide hacia uno de sus sentidos.

Problema de los guardias del museo

Un guardia parado en una esquina (vértice) de un museo puede vigilar los pasillos adyacentes. ¿Cuántos guardias se necesitan para proteger todo el museo?

¿Cuál es el cardinal mínimo de un cubrimiento por vértices?

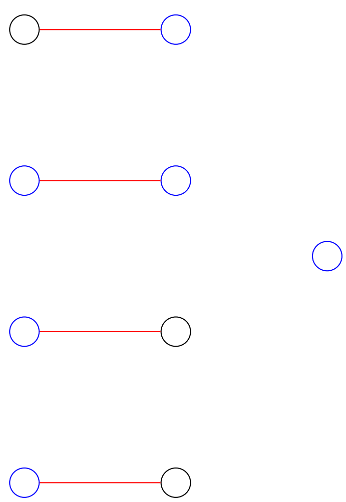
Dualidad débil

Existe una relación entre el problema de hallar un matching maximal y un cubrimiento minimal.

Proposición 2. *Sea G un grafo. Sea M un matching de G y C un cubrimiento de G. Entonces*

$$|M| \leq |C|$$

Ejemplo 3. Por ejemplo, se puede tener el siguiente grafo G con matching M en rojo y cubrimiento C en azul:

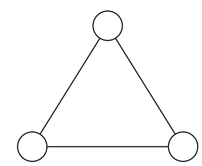


donde $|C| = 6$ y $|M| = 4$. Lo anterior ocurre en parte porque cada arista de M debe tocar un vértice distinto de C.

Observación. La proposición anterior no asegura que el matching más grande alcance la igualdad con el cubrimiento más pequeño:

$$\max |M| \leq \min |C|$$

Ejemplo 4. Un caso particular donde no se alcanza la igualdad es cuando G es considerado como



donde $\max |M| = 1$ y $\min |C| = 2$.

¿Por qué se llama dualidad débil?

Un pequeño recuerdo de programación lineal (optimización):

$$\max |M| \leq \max \sum_{e \in E} x_e \underbrace{=}_{\text{D.F}} \min \sum_{v \in V} y_v \leq \min |C|$$

Donde se define $x_e \in \{0, 1\}$, que indica si $e \in M$. Luego $\max |M|$ es igual al programa lineal:

$$\begin{aligned} \max \sum_{e \in E} x_e & \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, & \qquad \forall v \in V \\ x_e \in \{0, 1\}, & \qquad \forall e \in E \end{aligned}$$

El programa lineal anterior es aún muy restrictivo al ser entero, pero es posible relajar las condiciones al siguiente programa lineal puro:

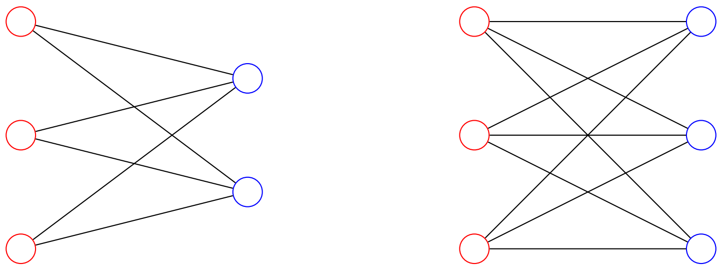
$$\begin{aligned} \max \sum_{e \in E} x_e & \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, & \qquad \forall v \in V \\ x_e \geq 0, & \qquad \forall e \in E \end{aligned}$$

Del curso de optimización se sabe que un programa lineal puro tiene un programa dual, dado por:

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} y_v & \\ y_u + y_v \geq 1, & \qquad \forall e \in E, e = uv \\ y_v \geq 0, & \qquad \forall v \in V \end{aligned}$$

Definición 2 (Grafo bipartito)**.** Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito V puede ser particionado en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que cada arco del grafo conecta un nodo de V_1 con uno de V_2.

Ejemplo 5. A continuación se presentan los grafos completos bipartitos $K_{3,2}$ y $K_{3,3}$, señalando las particiones con rojo y azul, respectivamente se visualizan como:



Teorema 1 (König)**.** *Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito, entonces*

$$\max\{|M| : M \textit{ matching}\} = \min\{|C| : C \textit{ cubrimiento}\}$$

Comentario 1 (Sobre el teorema de König).

1. Este es el primer teorema que se estudia en el curso del estilo máx-mín simultáneo.
2. Para la demostración basta ver que existe M matching y C cubrimiento con $|M| = |C|$.
3. Este teorema se demostrará algorítmicamente encontrando en simultáneo el par M, C buscados.

Comentario 2 (Sobre los grafos bipartitos).

1. No es difícil encontrar paseos que alternen entre 2 colores, en grafos generales. Lamentablemente encontrar caminos es más complicado.
2. En grafos bipartitos, resulta que los paseos alternantes más cortos son también caminos alternantes.
3. Una construcción auxiliar hace más sencillo encontrar estos caminos M-alternantes (necesitamos que sean M-aumentantes).

Sea $G = (L \cup R, E)$ un grafo bipartito, M un matching. Sea el digrafo auxiliar $D(G, M) = (L \cup R + s + t, \vec{E})$ con arcos:

1. Cada $e \in M$ se dirige hacia L.
2. Cada $e \in E \setminus M$ se dirige hacia R.
3. Arcos sv para cada nodo $v \in L$ es M-expuesto.
4. Arcos wt para cada nodo $w \in R$ es M-expuesto.

Lema 1. *Cada $s - t$ camino en $D(G, M)$ está en correspondencia con un camino M-aumentante en G.*

La siguiente clase estudiaremos:

Teorema 2. *Sea Q el conjunto de los nodos alcanzables desde s en $D(G, M)$. Si M es máximo entonces*

$$C := (L \setminus Q) \cup (Q \cup R)$$

es un cubrimiento por vértices de G y $|C| \leq |M|$.

Algorithm 1: Algoritmo (König, 1931).

Sea $G = (V, E)$, **repeat**
- Construir $D(G, M)$ y árbol BFS desde s;
- $Q \leftarrow \{$Nodos alcanzables desde s en $D(G, M)\}$;
- **if** $t \in Q$ **then**
  - $M \leftarrow M \Delta P$, con P el camino M-aumentante encontrado.;
- **end**
- **else**
  - $C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$;
  - **return** (M, C);
- **end**

until;