Clase 16 MA3705. 9 de noviembre 2020.

¿Escribas?

J. Márquez

V. Alfessi

Tabla

- Teorema de Hall.
- Problemas de matching perfecto de costo mínimo.

Problema de Asignación

Teorema de Hall

De las clases pasadas:

ALGORITMO (KÖNIG 1931)

Entrada: $G = (L \cup R, E)$ bipartito.
$M \leftarrow \emptyset$.
Repetir
- Construir $D(G, M)$ y árbol BFS desde s.
- $Q \leftarrow \{$nodos alcanzables desde s en $D(G, M)\}$.
- **si** $t \in Q$ **entonces**
  - $M \leftarrow M \Delta P$, con P el camino M-aumentante encontrado.   Aumentamos M
- **en otro caso**
  - $C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$
  - **devolver** (M, C)
- **fin**

Encuentra M y C óptimos en $O(n(n+m))$

Dualidad débil en grafos generales

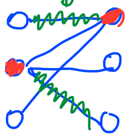
$\forall M$ matching, $\forall C$ cubrimiento, $|M| \leq |C|$ ✓

Teorema de König:
Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito

$$\max\{|M| : M \text{ matching}\} = \min\{|C| : C \text{ cubrimiento}\}$$

M

G.Bipartito.

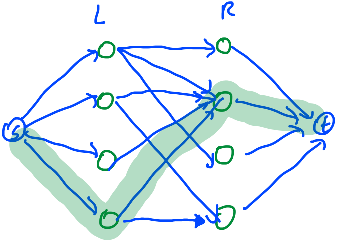


C = •

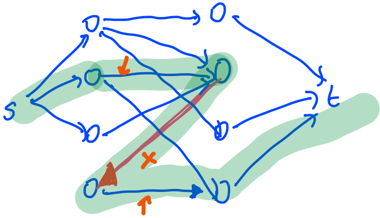
|C| = 2

|M| = 2.

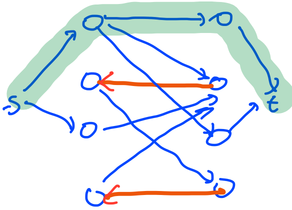
Ejemplo

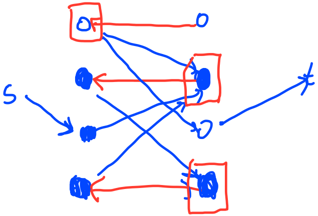


G. $M = \emptyset$ $D(G, \emptyset)$



$D(G, M)$





M.

$\square\, C := (R \cap Q) \cup (L \setminus Q)$

Q

$|C| = 3$

$|M| = 3$.

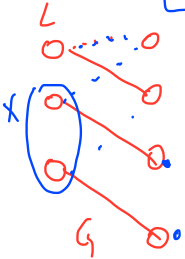
Consecuencia: Teorema de(l matrimonio de) Hall

Hall (1935)

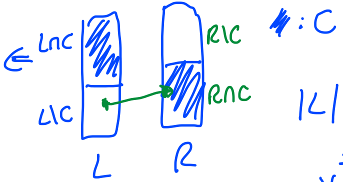
Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito. Existe un matching que cubre L si y solo si:

$$\forall X \subseteq L, |N(X)| \geq |X| \leftarrow \text{Hall}$$

Demostración: Sea C cubrimiento de tamaño mínimo.



$\Rightarrow \forall X \subseteq L \quad |N(X)| \geq \#\text{vecinos de } X \text{ vía matching } = |X|$



$$|L| = |L \cap C| + |L \setminus C|$$

$$\underset{\text{Hall}}{\leq} |L \cap C| + |N(L \setminus C)| \quad \text{pero } N(L \setminus C) \subseteq R \cap C.$$

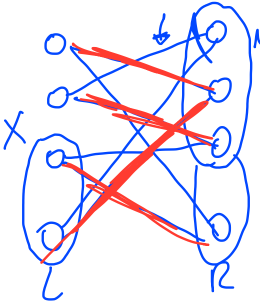
$$\leq |L \cap C| + |R \cap C| = |C|.$$

König: $\exists$ Matching M con $|M| \underset{=}{\geq} |C| \geq |L| \rightarrow |M| = |L|$

Aplicaciones

Si G es grafo bipartito ~~con aristas y~~ regular (el grado de cada vértice es el mismo) entonces tiene matching perfecto → toca a todos los vértices

k = grado común



Condición de Hall ?

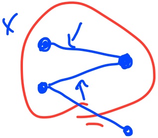
Sea $X \subseteq L$

$$k|X| = |\delta(X)| = |E(X : N(X))| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|$$

$$\therefore \ |X| \leq |N(X)|.$$

$\Longrightarrow$ $\exists$ matching $\overset{}{\underset{M}{\wedge}}$ que cubre todo L. $(\Rightarrow |M| = |L| = |R|)$

T. Hall.



$$k|L| = |E| = k|R| \Rightarrow |L| = |R|.$$

luego M es perfecto.

Una matriz de permutación es una matriz en $\{0,1\}^{n\times n}$ con exactamente un uno por fila y un uno por columna.

Sea A una matriz de $n \times n$ no negativa, tal que cada fila y cada columna suma $\lambda > 0$. Sea $\mu = \min_{ij:A_{ij}>0} A_{ij}$. Entonces existe P matriz de permutación tal que $A \geq P\mu$

$n = 2$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

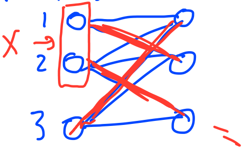
matriz de permutación

$\Leftrightarrow$ Matching perfecto

$$A = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 5 & 5 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ \hline & 10 & 10 & 10 & \end{array}$$

$$2P = \begin{pmatrix} & 2 & \\ & & 2 \\ 2 & & \end{pmatrix}$$

Hall:



G: $ij \in E \Leftrightarrow A_{ij} \geq \mu$ $(A_{ij} \neq 0)$

Sea $X \subseteq$ filas.

$$\lambda \cdot |X| = \sum_{i \in X,\, j \text{ columna}} a_{ij} = \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ i \in X}} a_{ij} \leq \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ j \in N(X)}} a_{ij} = \lambda |N(X)| \xrightarrow[\lambda > 0]{} |X| \leq |N(X)|$$

T. Hall $\Rightarrow \exists M$. perfecto

Una matriz doblemente estocástica es una matriz en $\mathbb{R}_{+}^{n\times n}$ cuyas filas y columnas suman 1.

Teorema de Birkhoff Von-Neumann

Toda matriz doblemente estocástica es combinación convexa de matrices de permutación.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 1 \\ \to 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$M_0 = P_1 \cdot \mu_0 + M_1$

sumas 1 $= P_1 \cdot \mu_0 + \hat{M}_1 = P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2 + \hat{M}_2 = \dots$

$(1-\mu_1)$ $(1-\mu_1-\mu_2) = \mu_3$.

$= \sum_{k=1}^{K} P_i \mu_i$

con $K \leq n^2$

μ_0 mínimo no neg. de M^0

mínimo valor no neg. de las celdas de $M_0|_{P_1}$

$1-\hat{\mu}_0$

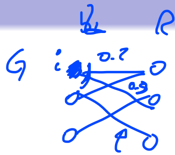
$\hat{M}_1$ tiene 1 cero más.

suma 0.7

$$M_0 = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} \cdot 0.3 + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

los μ_i suman 1

$\mu_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{K} \mu_i = 1$



$x_e \ \forall e \in E$

El polítopo de matching perfecto fraccional de $G = (L \cup R, E)$ es

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} x_{ij} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^E : \sum_{j:\, ij \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in L$$
$$\sum_{i:\, ij \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in R$$
$$x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^E.$$

Si $x \in P$
y además $x \in \{0,1\}^E$
$\Rightarrow$ x sería una indicatriz de un matching perfecto

T. Birkhoff-Von Neumann $\Longrightarrow$ $P = \mathrm{conv}(\{\chi^M : M \text{ matching perfecto}\})$