Clase 17 MA3705. 13 de noviembre 2020.

¿ESCRIBAS?

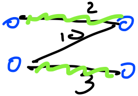
Tabla

- Problema de asignación: matching perfecto de costo mínimo.

Problemas de matching perfecto de costo mínimo.

Tres problemas equivalentes

1. Dado $G = (V, E)$ bipartito $w : E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching M de peso $w(M)$ máximo.

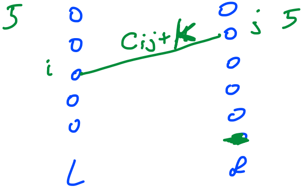


$k = 2$

2. Dado $G = (V, E)$ bipartito, $k \in \mathbb{N}$, $w : E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching M con $|M| = k$ y de peso $w(M)$ máximo.

$|L| = |R|$

3. (Problema de asignación). Dado $G = (V, E)$ bipartito completo balanceado, $c : E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching perfecto M de peso $c(M)$ mínimo.



ojo

Ejercicio presentable: Demostrar que $3 \implies 1$
Ejercicios desafío: Demostrar que $3 \implies 2$.

Problema de asignación como programa lineal entero

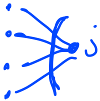
$K_{L,R}$

Sea $G = (L \cup R; E \equiv \boxed{L \times R})$ grafo completo bipartito balanceado.
$c \colon E \to \mathbb{R}$ función de costo.

$x_{ij} \in \{0,1\}$

$$X \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij \in E} x_{ij} c_{ij} \\ \boxed{\begin{array}{ll} \sum_{j \in R} x_{ij} = 1 & \forall i \in L \\ \sum_{i \in L} x_{ij} = 1 & \forall j \in R \\ x \in \{0,1\}^E & \end{array}} \end{array} \right.$$

X



Birkhoff Von Neumann

$X = \mathrm{conv}\left(\chi^M : M \text{ matching perfectos} \right)$

Recuerdo: $\min\{c^T x \colon x \in X\} = \min\{c^T x \colon x \in \mathrm{conv}(X)\}$

Optimización lineal + teorema de BVN + dualidad:

(P) (D)

$$\min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} \quad = \quad \min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} \quad \boxed{=} \quad \max \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j$$

$$\sum_{i\in L} x_{ij} = 1\ \forall j\in R \qquad \sum_{i\in L} x_{ij} = 1\ \forall j\in R \leftarrow z_j \qquad \boxed{y_i + z_j \leq c_{ij}}\ \forall ij \in L\times R$$

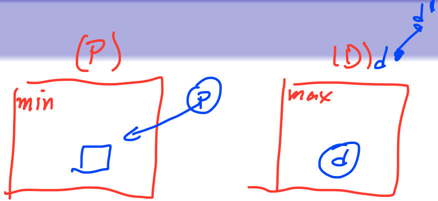
$$\sum_{j\in R} x_{ij} = 1\ \forall i\in L \qquad \sum_{j\in R} 1 x_{ij} = 1\ \forall i\in L \leftarrow y_i$$

$$x \in \{0,1\}^E \qquad x \geq 0$$

$\shortparallel$

conv(χ^M: Matchings)

Introducción a Algoritmos Primal-Dual



¡SIMPLEX no es un algoritmo polinomial!
(pero es raro que no logre soluciones rápidas)

En algunos casos, es posible encontrar soluciones de un PL de manera combinatorial:

Algoritmo Primal - Dual.

1. Encontrar solución DUAL d factible inicial
2. Repetir:
   1. Obtener vector p con holgura complementaria respecto a d
   2. Si p es primal factible, ganamos
   3. Si no, usar p para encontrar un mejor d DUAL.

Holgura complementaria en problema de asignación

(P)

$$\min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} \quad = \quad \max \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j$$

(D)

$$\sum_{i\in L} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in R \qquad \boxed{y_i + z_j \leq c_{ij}} \leftarrow \forall ij$$

Holgura:

$$\sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in L \qquad \to (C_{ij} - y_i - z_j)\cdot X_{ij} = 0 \quad \forall ij \in E$$

$$x \geq 0$$

x primal factible & (y, z) dual factible & holgura complementaria $\implies$ óptimo. (Dem 1 línea)

Lema

Si (y, z) dual factible, M matching perfecto $M \subseteq E(y, z) = \{ij \in E : c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$ entonces M es asignación óptima.

aristas ajustadas.

(incompleto) Algoritmo Húngaro primal-dual para problema de asignación

Algoritmo Primal-Dual (Kuhn 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$

(y, z) solución dual-factible inicial. ← (*)

Repetir

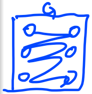
- $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
- **si** M *perfecto* **entonces devolver** M
- **en otro caso** Encontrar dual-factible $(\tilde{y}, \tilde{z})$ con $y(L) + z(R) < \underbrace{\tilde{y}(L) + \tilde{z}(R)}$. $(y, z) \leftarrow (\tilde{y}, \tilde{z})$

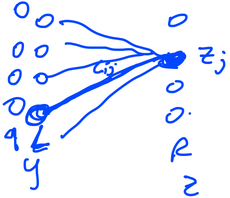
$$(D)\ \text{máx}\ \underbrace{y(L)}_{\sum_{i\in L} y_i} + \underbrace{z(R)}_{\sum_{j\in R} z_j}$$

$$y_i + z_j \le c_{ij}\ \forall ij$$

$0 + 1$ $\boxed{}$

$C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ cubre $(V, E(y,z))$





(*) $y_i = 0 \quad \forall i \in L$

$z_j = \min_{i \in L} c_{ij} \quad \Rightarrow \quad \underset{0}{y_i} + z_j \le z_j \le c_{ij}$

Algoritmo Primal-Dual (Kuhn 1955))

INICIAL

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$

$y \leftarrow 0$, $\forall j \in R, z_j \leftarrow \text{m}\cancel{\text{áx}}\text{IN}\{c_{ij} \cancel{- y_i} : i \in L\}$.

Repetir

  $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$ ¿?

  si M *perfecto* **entonces devolver** M

  en otro caso

   $\varepsilon \leftarrow \min\{c_{ij} - y_i - z_j : i \in L\cap Q, j \in R\setminus Q\}$? > 0

   $y \leftarrow y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}$

   $z \leftarrow z - \varepsilon\chi^{R\cap Q}$ (Q =alcanzables)

fin

5

PDQ:

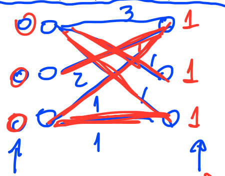
(1) $\tilde{y}, \tilde{z} = (y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}, z - \varepsilon\chi^{R\cap Q})$ es dual factible.

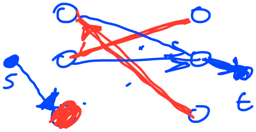
(2) Es de mayor valor que (y,z)

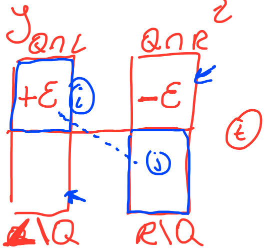
$$(D)\ \max y(L) + z(R)$$

$$y_i + z_j \leq c_{ij}\ \forall ij$$

$\boxed{C = (L\setminus Q)\cup(R\cap Q)}$ cubre $(V, E(y,z))$







$E(y,z)$

$\boxed{D(E(y,z), M)}$

• $(Q\cap L)\times(R\setminus Q)$ no son ajustadas $\Rightarrow \varepsilon > 0$

Correctitud

$|C| = |M| < |L|$

Algoritmo Primal-Dual (Kuhn 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$

$y \leftarrow 0$, $\forall j \in R, z_j \leftarrow \max\{c_{ij} - y_i : i \in L\}$

Repetir

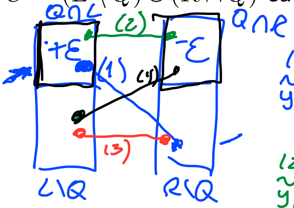
- $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
- **si** M *perfecto* **entonces devolver** M
- **en otro caso**
  - $\varepsilon \leftarrow \min\{c_{ij} - y_i - z_j : i \in L \cap Q, j \in R \setminus Q\}$
  - $y \leftarrow y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}$
  - $z \leftarrow z - \varepsilon\chi^{R\cap Q}$ (Q =alcanzables)

fin

$(D)\ \max \boxed{y(L) + z(R)}$

$y_i + z_j \le c_{ij}\ \forall ij$

$C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ cubre $(V, E(y,z))$



(1) $\tilde{y}_i + \tilde{z}_j = y_i + z_j + \varepsilon \le c_{ij}$

(2) $\tilde{y}_i + \tilde{z}_j = y_i^{+\varepsilon} + z_j^{-\varepsilon} \le c_{ij}$

(3) $\tilde{y}_i + \tilde{z}_j = y_i + z_j \le c_{ij}$

(4) $\tilde{y}_i + \tilde{z}_j = \underbrace{y_i + z_j}_{\le c_{ij}} - \varepsilon \le c_{ij}$

PDQ:

(1) $\tilde{y}, \tilde{z} = (y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}, z - \varepsilon\chi^{R\cap Q})$ es dual factible. ✓

(2) Es de mayor valor que (y, z)

$\tilde{y}(L) + \tilde{z}(R) = y(L) + z(R) + \overbrace{\varepsilon|Q\cap L| - \varepsilon|Q\cap R|}$

$= y(L) + z(R) + \varepsilon\begin{pmatrix} |Q\cap L| + |L\setminus Q| \\ -|L\setminus Q| - |Q\cap R| \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot |L| - \varepsilon|C| > 0$

pues $\boxed{|C| < |L|}$

¿Complejidad?

ALGORITMO PRIMAL-DUAL (KUHN 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$

$y \leftarrow 0,\ \forall j \in R, z_j \leftarrow \max\{c_{ij} - y_i : i \in L\}$

Repetir ← Iteración

- $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E : c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
- **si** M *perfecto* **entonces devolver** M
- **en otro caso**
  - $\varepsilon \leftarrow \min\{c_{ij} - y_i - z_j : i \in L \cap Q, j \in R \setminus Q\}$
  - $y \leftarrow y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}$
  - $z \leftarrow z - \varepsilon\chi^{R\cap Q}$ (Q =alcanzables)

fin

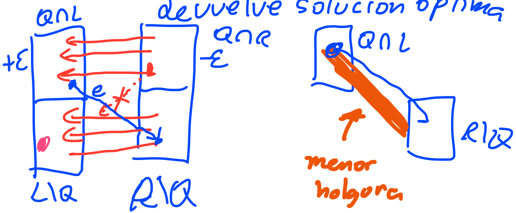
M crece   M

$\le n$

Lemas

(1) M no decrece. (2) M puede crecer solo n veces.
(3) Cuando M no crece, Q aumenta

Si ALGORITMO termina devuelve solución óptima



$M \subseteq E(y,z)$ $M \subseteq E(\tilde{y}, \tilde{z})$

(1) las aristas de M siguen ajustadas
(2) obvio
(3) ε.: En cada etapa alguna arista de $e = \ell r$ $(Q\cap L) \times (R \setminus Q)$ se ajusta en la nueva iteración | $r \in Q$

• Si $v \in Q$ sigue estando en Q

Resumen

El algoritmo húngaro primal-dual encuentra un matching perfecto de costo mínimo en $O(n^2)$ iteraciones, cada una de ellas toma $O(n + \underbrace{|E(y,z)|}_{n^2}) = O(n^2)$
En total $O(n^4)$.
Notas: Mejores algoritmos para matching de peso máximo (no nec. completo)

Algoritmo	Complejidad
Kuhn (1955)	$O(n^4)$
Iri (1960)	$O(n^2 m)$
Dinic-Kronrod (1969)	$O(n^3)$
Edmonds-Karp (1970)	$O(nm + n \log n)$