Clase 18 MA3705. 16 de noviembre 2020.

Tabla

- Intersección de matroides.

Intersección de Matroides.

Un enfoque distinto para matching de tamaño máximo en grafos bipartitos

Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito.

$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in L, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$
$\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in R, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$

$M \subseteq E$ es matching si y solo si $M \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Generalización: Intersección de Matroides

Dadas dos matroides $(S, \mathcal{I}_1)$ y $(S, \mathcal{I}_2)$. El conjunto $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ no es una matroide (en general), pero sigue siendo sistema de independencia.

1. ¿Base de tamaño máximo en $\mathcal{I}$?
2. No podemos usar glotón. ¿Caminos alternantes?
3. ¿Teoremas tipo König?
4. ¿Aplicaciones?

Intersección de Matroides: Ejemplos

1. Matchings en grafos bipartitos.
2. Branchings.
3. Bosques (o matroides) coloreadas.

¿Dualidad débil?

Una matroide: $(S, \mathcal{I})$: $\forall A \in \mathcal{I}$, $|A| \leq r(S)$.

Dos matroides: $(S, \mathcal{I}_1), (S, \mathcal{I}_2)$
$\forall A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2, \forall T \subseteq S : |A| = |A \cap T| + |A \setminus T| \leq r_1(T) + r_2(S \setminus T)$

¿k matroides: $(S, \mathcal{I}_i)$?

Desvío: NP-Difíciles

Existen problemas en optimización combinatorial que son NP-difíciles.
Sospecha fundada para que no existan algoritmos polinomiales.
Ejemplos:

- Vendedor viajero / Ciclo Hamiltoniano
- Camino más largo
- Intersección de tres matroides (gráficas y partición)

Teorema de intersección de matroides

Probaremos después el Teorema de Intersección de Matroide

Sean $(S, \mathcal{I}_1), (S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides sobre S. Entonces:

$$\max\{|X| \colon X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{T \subseteq S \colon r_1(T) + r_2(S \setminus T)\}$$

Probaremos después el Teorema de Intersección de Matroide

Sean $(S, \mathcal{I}_1), (S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides sobre S. Entonces:

$$\max\{|X| \colon X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{T \subseteq S \colon r_1(T) + r_2(S \setminus T)\}$$

Generaliza el teorema de König para el caso: $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito.
$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in L, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$
$\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in R, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$ $T \subseteq E$.

¿Camino alternante?

Necesitaremos un enfoque distinto ya que ahora no hay necesariamente un grafo detrás de las matroides $(S, \mathcal{I}_1), (S, \mathcal{I}_2)$.
Supongamos $\mathcal{J}$ un sistema de independencia, e $I \in \mathcal{J}$

Camino alternante par

Una secuencia $P = v_1 v_2 v_3 \dots v_k$ de elementos distintos en S, se dice camino I-alternante par si sus elementos impares están en I y los pares en $S \setminus I$.

Camino de intercambio

Un camino I-alternante par P es de intercambio si $I \Delta P \in \mathcal{J}$

Antes de analizar 2 matroides entendamos una sola

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide e $I \in \mathcal{I}$ un independiente.
El grafo de intercambios de I es el grafo bipartito $G' = G_I(\mathcal{M})$ con bipartición I, $S \setminus I$ y tal que $xy \in E'$ si y solo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.

Teorema: Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

1. $J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.
2. Existe único matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Dem: (1) Sea $H = G_I(\mathcal{M})[I \setminus J \cup J \setminus I]$
Si no hay tal matching, existe $W \subseteq J \setminus I$:

Teoremas de grafo de intercambio

Teorema: Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

1. $J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.
2. Existe único matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Teoremas de grafo de intercambio

Teorema: Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

1. $J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.
2. Existe único matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Teoremas de grafo de intercambio

Teorema: Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

1. $J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.
2. Existe único matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Teoremas de grafo de intercambio

Teorema: Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

1. $J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.
2. Existe único matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Conclusión:

Matchings perfecto único implica camino de intercambio (en matroides)
¿Cómo hacerlo de manera simultánea en dos matroides $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$?

Idea: Usar caminos que alterne entre un matching de $G_I(\mathcal{M}_1)$ y un matching $G_I(\mathcal{M}_2)$.

Conclusión:

Matchings perfecto único implica camino de intercambio (en matroides)
¿Cómo hacerlo de manera simultánea en dos matroides $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$?

Idea: Usar caminos que alterne entre un matching de $G_I(\mathcal{M}_1)$ y un matching $G_I(\mathcal{M}_2)$.

Digrafo de intercambios para intersección de matroides

$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ es la superposición de
$G_I(\mathcal{M}_1)$ orientado de I a $S \setminus I$.
$G_I(\mathcal{M}_2)$ orientado de $S \setminus I$ a I.

Algoritmo Intersección de Matroides (Aigner-Dowling 1975 / Lawler 1975)

Entrada: Oraculos para $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$
  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  en otro caso
    $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
    devolver (I, T)
  fin