MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Valentina Alfessi y Joaquín Márquez.
Fecha: 09 de Noviembre de 2020 (`https://youtu.be/oc7H3ks1yvc`).

Cátedra 16

1. Teorema de Hall

1.1. Introducción

En esta clase se verá el Teorema de Hall junto con algunas consecuencias y aplicaciones que tiene.

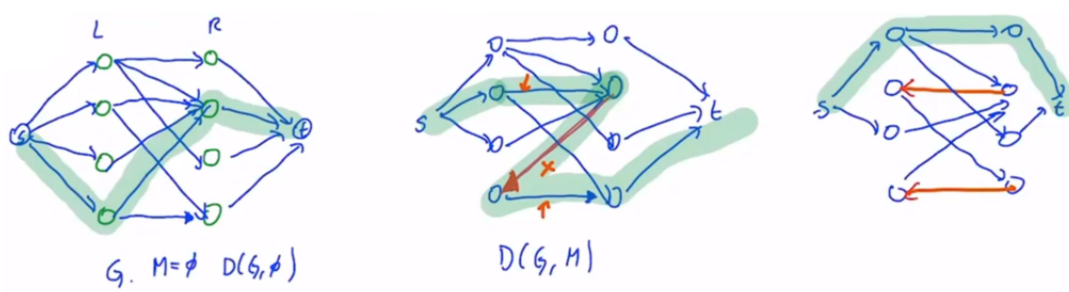
Será necesario recordar los conceptos de cubrimiento (cuantos vértices se necesitan para tocar todas las aristas) y matching, además del Teorema de König (demostrado la clase pasada gracias al algoritmo visto).

Teorema 1 (Teorema de König). *Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito, entonces* $\max\{|M| : M \text{ matching}\} = \min\{|C| : C \text{ cubrimiento}\}$

Nota: Los matching son sistemas de independencia, no matroides.

Ejemplo 1. Objetivo: Calcular un matching de tamaño máximo y un cover de tamaño mínimo.

Partiendo del matching vacío, se construye un digrafo auxiliar D(G, M) [1]:



- Se dirigen todas las aristas hacia la derecha. agregan los nodos s y t (al principio y final respectivamente).
- Conectar s con todos los nodos de la izquierda que no tocan aristas del matching.
- Conectar con t todos los nodos de la derecha que no tocan a ninguna arista del matching.
- Cuando el matching no es vacío, hay que dirigir las aristas de éste hacia la izquierda.
- Encuentre un camino de s a t (cualquiera) y comenzamos a aplicar el algoritmo.
- Van entrando aristas al matching, hasta que llegamos a la situación de no existir un camino de s a t.

De esto se deduce que el matching y cumbrimiento obtenidos tienen igual tamaño, y por tanto es es óptimo. Como consecuencia tenemos el Teorema del matrimonio de Hall (en este curso le llamaremos Teorema de Hall).

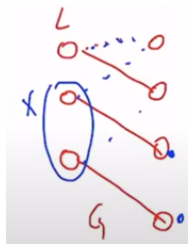
1.2. Teorema de Hall

Teorema 2 (Teorema de Hall). *Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito. Existe un matching que cubre L si y sólo si:* $\forall X \subseteq L$, $|N(X)| \geq |X|$.

Esta última es la ”condición de Hall”: el número de vecinos de X debe ser igual o mayor que el cardinal de X.

[1] Para el grafo vacío es trivial.

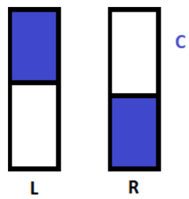
Demostración.



($\Rightarrow$) $\forall X \subseteq L |N(X)| \geq \#$ vecinos de X vía matching $= |X|$.

($\Leftarrow$)

Tomamos un cubrimiento C y veremos que tiene tamaño al menos cardinal de L.



$$|L| = |L \cap C| + |L \setminus C| \tag{1}$$

Notemos que todas las aristas de $L \setminus C$ van a $R \cap C$, y usando la condición de Hall:

$$|L| \leq |L \cap C| + |N(L \setminus C)| \tag{2}$$

Pero $N(L \setminus C) \subseteq R \cap C$, y

$$|L| \leq |L \cap C| + |R \cap C)| = |C| \tag{3}$$

Hemos probado que el cubrimiento más chico tiene tamaño al menos igual a L. Recordamos que por König tenemos que:

$$König : \exists \text{ Matching M con } |M| \geq |C| \geq |L| \rightarrow |M| = |L| \tag{4}$$

Como todas las aristas del matching tocan a L, la única forma de obtener un matching mayor a L es que M toque a todos los vértices de L.

1.3. Nota histórica

Cuando se propuso en 1935, se ilustró con la idea de propuestasde matrimonio. En resumen, la idea era la siguiente:

–Tenemos hombres en un lado y mujeres en el otro, las flechas significan propuestas aceptables de matrimonio.

–Si el número de mujeres que aceptarían propuestas aceptables de un conjunto X de hombres es más grande siempre (es decir, que $n|X| > |X|$.

$\Rightarrow$ Existe una forma de parear todos los hombres.

Con el paso de los años este ejemplo se ha ido eliminando, aunque su nombre se mantiene en parte para poder diferenciarlo con otros teoremas propuestos por el mismo Hall.

1.4. Aplicaciones

Aplicación 1: Si G es grafo bipartito regular (cada vértice tiene igual grado), entonces tiene matching perfecto (toca todos los vértices).

Demostración.

Consideremos el grafo bipartito regular con k =grado común de los vértices. Veamos si se tiene la condición de Hall:

Sea $X \subseteq L$, veamos las aristas que salen de X:

$$k|X| = |\delta(X)| = |E(X : N(X))| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)| \tag{5}$$
$$\Rightarrow |X| \leq |N(X)| \tag{6}$$

Por Teo. de Hall $\Rightarrow \exists$ matching M que cubre todo L ($\Rightarrow |M| = |L| = |R|$)

Viendo todas las aristas del grafo, notamos que:

$$k|L| = |E| = k|R| \Rightarrow |L| = |R| \tag{7}$$

Luego, M es perfecto.

*Nótese que si sacamos el matching perfecto, entonces cada vértice pierde una arista en su grado (ahora k-1) y la hipótesis se cumple de nuevo. Esto nos dice que podemos particionar el grafo regular en matching perfecto aplicando el algoritmo iterativamente (todo grafo k-regular se puede escribir como la unión disjunta de k matching perfectos) y que podemos hacerlo fraccional.

Aplicación 2: Sea A una matriz de $n \times n$ no negativa, tal que cada fila y cada columna suma $\lambda > 0$. Sea $\mu = \min_{ij:A_{ij}>0} A_{ij}$. Entonces existe P matriz de permutación tal que $A \geq P\mu$.

Una matriz de permutación es una matriz $\{0,1\}^{n\times n}$ con exactamente un uno por fila y un uno por columna.

Ejemplo/Demostración.

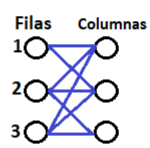
En este caso $n = 3$ y $\mu = 2$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz P

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 5 & 5 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 10 \\ \hline & 10 & 10 & 10 & \end{array}$$

Matriz A



Como las matrices están en biyección con los grafos bipartitos (filas y columnas siendo los lados, y la celda ij el arco respectivo), llamamos G al grafo tal que $G : ij \in E \Leftrightarrow A_{ij} \geq \mu, A_{ij} \neq 0$. Probaremos que este grafo tiene un matching perfecto: veamos que hay un matching que cubra las filas [2] usando el Teorema de Hall.

Sea $X \subseteq filas$, por ejemplo, las filas 1 y 2. Desconocemos el cardinal de X, pero sabemos que:

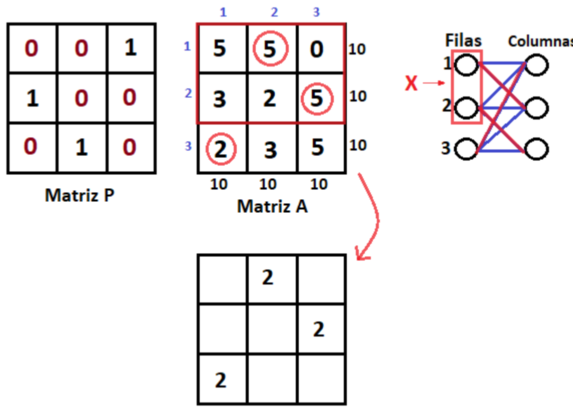
$$\lambda \cdot |X| = \sum_{\substack{i \in X \\ j \text{ columna}}} a_{ij} = \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ i \in X}} a_{ij} \tag{8}$$
$$\leq \sum_{\substack{ij \in E(G) \\ j \in N(X)}} a_{ij} = \lambda |N(X)| \rightarrow |X| \leq |N(X)| \tag{9}$$

[2] El matching puede cubrir las filas o columnas, en ambos casos se llega a la misma conclusión de que es perfecto, en este caso realizamos la demostración usando las filas.

Esto último es porque sabemos que $\lambda > 0$.

Dado que se cumplen las hipótesis del Teorema de Hall, éste nos dice que hemos encontrado un matching perfecto.

Para ilustrar mejor, veamos como se ve en el ejemplo (matching en rojo):



Y tenemos que $P \Leftrightarrow$ Matching perfecto [3].

Dado todo esto, hemos encontrado una propiedad: si se tiene una matriz no negativa cuyas filas y columnas suman lo mismo, puede extraerse una matriz de permutación, lo cual debería ser suficiente para obtener el siguiente teorema (utilizando inducción).

Teorema 3 (Teorema de Birkhoff Von-Neumann)**.** *Toda matriz doblemente estocástica es combinación convexa de matrices de permutación.*[4]

Una matriz doblemente estocástica es una matriz en $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ cuyas filas y columnas suman 1.

Demostración Usaremos el resultado anterior.

Sea M_0 una matriz doblemente estocástica, $\mu_0 = \{$ mínimo no negativo de $M_0\}$, dado el resultado anterior tenemos que:

$$M_0 = P1_1 \cdot \mu_0 + M_1 \tag{10}$$

Siendo M_1 un resto. Para agilizar el resultado anterior, modificaremos esta expresión un poco:

$$M_0 = P1_1 \cdot \hat{\mu_0} + \hat{M_1} \tag{11}$$

Donde $\hat{\mu_0}$ es el mínimo valor no negativo de las celdas de $M_0|_P$

Repitiendo, tenemos que las filas y columnas de $\hat{M_1}$ suman $1 - \mu_0$, y $\hat{M_1}$ tiene un cero más. Iterando, tenemos que:

$$P1_1 \cdot \mu_1 + \hat{M_1} = P1_1 \cdot \mu_1 + P1_2 \cdot \mu_2 + \hat{M_2} = ... = \sum_{\substack{k=1 \\ k\leq n^2}} P_i\mu_i \tag{12}$$

Esta suma es convexa, pues tenemos que $\mu_0 \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{K} \mu_i = 1$.

[3]El matching cubre a L, que representa las filas, por lo cual es perfecto.
[4]Teorema útil en probabilidades.

1.5. Interpretación poliedral

El polítopo de matching perfecto fraccional de $G = (L \cup R, E)$ es

$$P = \{x \in \mathbb{R}^E : \tag{13}$$

$$\sum_{j:ij \in E} x_{ij} = 1 \ \forall i \in L \tag{14}$$

$$\sum_{i:ij \in E} x_{ij} = 1 \ \forall j \in R \tag{15}$$

$$x \geq 0\} \tag{16}$$

Si $x \in P$ y además $x \in \{0,1\}^E \Rightarrow$ x sería una indicatriz de un matching perfecto.

T. Birkhoff-Von Neumann $\Rightarrow P = conv(\{X^M$: M matching perfecto }