Clase 21 MA3705. 4 de diciembre 2020.

Tabla

- Flujos y Cortes en Redes.
- Dualidad débil.
- Flujos residuales.

Flujos y Cortes en Redes.

Redes

Notación para redes

Red $N = (G, u, s, t)$:
$G = (V, E)$ digrafo.
$u\colon E \to \mathbb{R}_+$ función de capacidad.
$s \in V$ nodo origen, $t \in V$ nodo destino.

Sea $x\colon E \to \mathbb{R}$, $v \in V$, $W \subseteq V$

$$\begin{aligned}
x^{\text{in}}(v) &= x(\delta^-(v)) - x(\delta^+(v)) \\
x^{\text{out}}(v) &= x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = -x^{\text{in}}(v) \\
x^{\text{in}}(W) &= x(\delta^-(W)) - x(\delta^+(W)) \\
x^{\text{out}}(W) &= x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W)) = -x^{\text{in}}(W)
\end{aligned}$$

s-t flujos

Sea $N = (G, u, s, t)$ una red, $f\colon E \to \mathbb{R}$

Conservación de flujo

f es s-t flujo si $\forall v \in V - s - t, \qquad f^{\text{in}}(v) = 0.$

El valor de un s-t flujo es valor$(f) = f^{\text{in}}(t)$.

Un s-t flujo f es factible si además $0 \leq f \leq u$.

Si P es s-t camino, χ^P es s-t flujo.
Si C es ciclo, χ^C es s-t flujo.

Muchos problemas se pueden modelar como flujos

Problema de transporte.

Dadas fábricas L y bodegas R:

- Cada $i \in L$ produce hasta a_i unidades diarias.
- Cada $j \in R$ almacena hasta b_j unidades diarias.
- Se pueden mandar u_{ij} unidades de i a j.

Determinar cantidad máxima que se puede producir y guardar en R.

Dualidad débil

Propiedad de s-t flujo

Sea f un s-t flujo en $N = (G, u, s, t)$, entonces

$$\text{valor}(f) = f^{\text{in}}(t) = f^{\text{out}}(s)$$

s-t cortes

s-t corte

Conjunto $X \subseteq V$ con $s \in X, t \notin X$.

Lema

Para todo s-t flujo f y todo s-t corte X.
$\text{valor}(f) = f^{\text{out}}(X) = f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X))$

Dualidad débil de flujos y cortes

Capacidad de un s-t corte X en (G, u, s, t)

Llamamos $\mathsf{cap}(X) = u(\delta^+(X))$.

Dualidad débil

$\forall s$-t flujo factible f, s-t corte X, $\quad \mathsf{valor}(f) \leq \mathsf{cap}(X)$.

En particular, $$\max_f \mathsf{valor}(f) \leq \min_X \mathsf{cap}(X).$$

Flujos residuales

Problema del flujo máximo

Dada una red $N = (G, u, s, t)$ queremos encontrar s-t flujo factible que maximice valor(f).
¡Es un programa lineal!

Dada una red $N = (G, u, s, t)$ queremos encontrar s-t flujo factible que maximice $\text{valor}(f)$.
¡Es un programa lineal!

$$\begin{aligned} &\max \ \text{valor}(f) \\ &f^{\text{out}}(v) = 0, \ \forall v \in V - s - t \\ &0 \leq f \leq u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e \\ &\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0, \ \forall v \in V - s - t \\ &0 \leq f_e \leq u_e, \forall e \in E \end{aligned}$$

Simplex (no polinomial)
Métodos polinomiales: Elipsoide y Punto Interior.
Buscaremos un algoritmo combinatorial.

Primera idea: aumentos glotones

Dado s-t flujo factible f en red $N = (G, u, s, t)$. ¿Cómo encontrar f' con valor$(f') >$ valor(f).

Idea

Encontrar s-t camino P en $E' = \{e \in E \colon f_e < u_e\}$
Mandar cap$(P) := \min_{e \in P}(u_e - f_e) > 0$ unidades de flujo por P.

Ejemplo

Mejor: Red Residual

Dado s-t flujo factible en (G, u, s, t), definimos la red residual (G^f, u^f, s, t) como

$G^f = (V, E \cup \overleftarrow{E})$ con $\overleftarrow{E} = \{\overleftarrow{e} : e \in E\}$ arcos nuevos tal que $\overleftarrow{e}$ es antiparalelo a e.

$\forall e \in E : \ u^f(e) = u(e) - f(e)$

$\forall e \in E : u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$

Flujos residuales

Sea g un s-t flujo residual (no nec. factible) en (G^f, u^f, s, t).

Sea $\bar{g}\colon E(G) \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{g}(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e})$.

$$\forall v \in V, \qquad g^{\text{out}}(v) = \bar{g}^{\text{out}}(v)$$

Flujos residuales (cont.)

Sea g un flujo residual factible en (G^f, u^f, s, t). Entonces

1. $\bar{g}$ es s-t flujo en (G, u, s, t)
2. $f + \bar{g}$ es s-t flujo factible en (G, u, s, t)
3. $\text{valor}(f + \bar{g}) = \text{valor}(f) + \text{valor}_{G^f}(g)$

Segunda idea: aumentos residuales

Dado s-t flujo factible f en red $N = (G, u, s, t)$. ¿Cómo encontrar f' con valor$(f') >$ valor(f).

Idea

Encontrar s-t camino P en G^f
Mandar cap$(P) := \min_{e \in P} u^f(e) > 0$ unidades de flujo por P.

Es decir

Aumentar cap(P) en arcos e con $e \in P$ y
Disminuir cap(P) en arcos e con $\overleftarrow{e} \in P$.