MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Profesores Auxiliares: Antonia Labarca, Víctor Saez

Tarea 4.

Fecha entrega: Jueves 24 de Diciembre, 11:59 AM. Por u-cursos.

Instrucciones:

1. **Extensión máxima**: Entregue su tarea en a lo más **12 planas**.
   Indicación relevante: No copie el enunciado de la tarea en su desarrollo.

2. **Formato:** La tarea debe entregarse en formato pdf, con fondo de un solo color (blanco de preferencia). *No se aceptarán escaneos en .jpg u otro formato de imágenes.*

   - Si desarrolla su tarea en papel, entréguelo escaneados o en fotos de alta calidad y convertido a un archivo pdf único.
   - Puede desarrollar su tarea en algún formato manuscrito digital (tablet u otro instrumento), pero la salida debe ser un archivo .pdf único.
   - Si entrega su tarea (o parte de ella) tipeada, dicha parte debe estar escrita en Latex y *debe adjuntar el archivo .tex y cualquier archivo fuente adicional que usó para generar el pdf.* Debe subir estos archivos en ucursos adicionalmente al pdf. **No podrá adjuntar links a sistemas de edición externa como overleaf**.

3. **Tiempo de dedicación:** El tiempo estimado de *desarrollo* de la tarea es de 8 horas de dedicación. Esto no considera el tiempo de estudio previo, el tiempo dedicado en asistir a cátedras y auxiliares, ni el tiempo para *ponerse al día.* Tendrá un plazo de 14 días para entregarlo *sin tiempo adicional.* No espere hasta el último momento para escanear o fotografiar adecuadamente su tarea y cambiarla al formato solicitado (pdf). Entregue con suficiente anticipación a la hora límite. Note que ucursos permite sobreescribir lo que ya ha subido así que puede entregar a medida que vaya completando su tarea.

4. **Política de honestidad y colaboración** Algunos problemas tienen colaboración autorizada, para entender los límites y reglas al respecto usted debe leer la política de honestidad y colaboración del curso: `https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2020/2/MA3705/1/blog/` Recuerde que si decide colaborar en un problema debe anotar el nombre de la(s) persona con las que colaboró al principio de su solución y que se revisará simetría por problema.

5. **Revisión:** Se podrá descontar hasta 1 punto en la nota final por falta de formato o extensión.

La tarea tiene un total de 60 puntos. Si su puntaje es P, su nota será 10+P

Importante: En estos ejercicios puede usar libremente los siguientes teoremas de Flujo en Redes que se verán en clases.

Sea $N = (G, u, s, t)$ con $G = (V, E)$ una red.

1. (Flujo residual). Si f, f' son s-t flujos factibles en N entonces existe un flujo h en $N^f = (G^f, u^f, s, t)$, de valor valor(f') − valor(f). De hecho, su normalización $\bar{h}$ (definida como $\bar{h}_e = h_e - h_{\overleftarrow{e}}$ para $e \in E$) es tal que $f' = f + \bar{h}$.
2. (Teorema de descomposición de flujo). Si f es s-t flujo (no necesariamente factible) con $f \geq 0$, entonces existe una colección $\mathcal{P}$ de s-t flujos, una colección $\mathcal{C}$ de ciclos y constantes no-negativas $(\lambda_X)_{X \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C}}$ tal que $f = \sum_{P \in \mathcal{P}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.
3. (Teorema de flujo-máximo corte-mínimo). $\max\{\text{valor}(f)\colon f\ s\text{-}t \text{ flujo factible}\} = \min\{\text{cap}(X)\colon X\ s\text{-}t \text{ corte}\}$
4. (Teorema de integralidad de flujo). Si las capacidades u son valores enteros, entonces existe un s-t flujo de valor máximo tal que para todo e, f_e es un número entero.

Problema 1 Colaboración autorizada (20 puntos)

(a) **(8 puntos)** Un hospital tiene un conjunto C de especialistas. Cada mes i de un año tiene un conjunto F_i de días feriados, con $F = \bigcup_i F_i$. Cada especialista $j \in C$ especifica un conjunto $H_j \subseteq F$ de días feriados en los que tiene disponibilidad para trabajar en urgencia.

Considere el problema de determinar si es posible asignar a cada especialista $j \in C$ un subconjunto $U_j \subseteq H_j$ de días feriados disponibles de modo tal que (1) cada especialista trabaje a lo más 8 feriados al año, (2) cada especialista trabaje a lo más 1 día feriado por mes, (3) en cada día feriado haya al menos un especialista trabajando.

Modele el problema anterior usando flujos máximos en una red apropiada.

Indicación. Su solución debería ser del tipo: existe una solución para el problema dado si y solo si existe un s-t flujo de cierto valor en cierta red. Use integralidad de flujos.

(b) **(8 puntos)** Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y $u\colon E \to \mathbb{N}$ una función de capacidad a valores naturales. Sea s un elemento de V y S un subconjunto de $V - s$.

Definimos la *flujo-gammoide* asociada a (G, u, s, Z) como el sistema $(Z, \mathcal{I})$ donde $I \subseteq \mathcal{I}$ si y solo si podemos encontrar para cada $i \in I$ un s-i camino P_i tal que cada arco $e \in E$ es usado a lo más u_i veces por todos los P_i caminos (por ejemplo: si todos los u_i son iguales a 1, entonces $I \in \mathcal{I}$ si y solo si existen caminos P_i arco-disjuntos que conecten r con cada i). Es claro (no lo demuestre) que $(Z, \mathcal{I})$ es un sistema de independencia.

Demuestre que $(Z, \mathcal{I})$ es una matroide.

Indicación: Es más simple probar que $(Z, \mathcal{I})$ satisface equicardinal de las bases. Para esto considere $X \subseteq Z$ y defina una red asociada a Z apropiada. ¿Puede asociar a cada $I \in \mathcal{I}$ un s-t flujo apropiado? ¿Que pasaría si $|B_1| < |B_2|$, con B_1, B_2 bases de X?

(c) **(4 puntos)** De una demostración directa del teorema de König para grafos bipartitos a partir del teorema de flujo máximo, corte mínimo.

Indicación: Suponga dualidad débil para matchings, es decir, basta probar que existe un cubrimiento y un emparejamiento del mismo tamaño.

Problema 2 (24 puntos) Unión de matroides.

Consideremos una colección de k matroides $\mathcal{M}_i = (S_i, \mathcal{I}_i)$ para $i \in [k]$, cuyos conjuntos S_i no son necesariamente disjuntos. Llamemos para cada i, $\bar{S}_i = S \times \{i\}$ a una copia de S_i de modo tal que los conjuntos $\{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_k\}$ sean todos disjuntos y sean $\bar{S} = \bigcup_{i=1}^k \bar{S}_i$ y $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$. Cada elemento de $\bar{S}$ es un par (s, i), cuya segunda coordenada indica que s provino de la i-ésima matroide. Llamemos entonces $\varphi \colon \bar{S} \to S$ a la función que olvida la segunda coordenada. Así por ejemplo, si s es un elemento que pertenece a S_1 y a S_3 entonces $(s, 1)$ y $(s, 3)$ son elementos distintos en $\bar{S}$ con $\varphi(s, 1) = \varphi(s, 3) = s$.

Se define la **matroide suma directa** como $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_k := (\bar{S}, \mathcal{J})$ donde $\mathcal{J} = \{I \subseteq \bar{S} \colon \varphi(I \cap \bar{S}_i) \in \mathcal{I}_i, \forall i \in [k]\}$. Es fácil ver que $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ es sistema de independencia (no necesita probarlo)

(a) **(2 puntos)** Demuestre que $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ es matroide. (la demostración no es más que un párrafo).

La matroide $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ podría tener múltiples copias del mismo elemento, si este está en la intersección de varios S_i. Queremos definir una matroide unión cuyos elementos sean exactamente los elementos de S. Consideremos $\bigvee_{i=1}^k \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{M}_k = (S, \mathcal{K})$ donde $\mathcal{K} = \{\bigcup_{i=1}^k I_i \colon I_i \in \mathcal{I}_i\}$. Nuevamente, es fácil ver que $\bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}$ es sistema de independencia (no lo haga),

(b) **(2 puntos)** Demuestre que $\bigvee_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ es matroide, demostrando que es la matroide imagen de $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{M}_i$ bajo la función φ.

La matroide anterior se llama la **matroide unión** de $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k$.

En clase auxiliar se probó que para toda matroide $\mathcal{M}$ sobre un conjunto X con función de rango r y toda función $f \colon X \to Y$ sobreyectiva, la matroide imagen $\mathcal{M}_f$ sobre Y tiene función de rango $r \colon 2^Y \to \mathbb{N}$, con

$$r_f(Q) = \min_{Z \subseteq Q} r(f^{-1}(Z)) + |Q \setminus Z|, \qquad \forall Q \subseteq Y$$

Llamemos r_i a la función de rango de $\mathcal{M}_i$, $r_\oplus$ a la función de rango de $\oplus_i^k \mathcal{M}_i$ y $r_\vee$ la función de rango de $\vee_i^k \mathcal{M}_i$.

(c) **(6 puntos)** Demuestre que para todo $Q \subseteq S$, $r_\vee(Q) = \min_{Z \subseteq Q}(|Q \setminus Z| + \sum_{i=1}^k r_i(Z \cap S_i))$. Indicación: Le puede servir calcular $r_\oplus$ primero.

Use lo anterior para demostrar, en las partes d y e, los siguientes teoremas en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ con función de rango r.

(d) **(3 puntos)** Unión de independientes: Para todo $k \geq 1$, el tamaño máximo para la unión de k independientes de $\mathcal{M}$ es $\min_{Z \subseteq S}(kr(Z) + |S \setminus Z|)$.

(e) **(3 puntos)** Cobertura por independientes: Para todo $k \geq 1$, S se puede escribir como unión de k independientes de $\mathcal{M}$ si y solo si para todo $U \subseteq S$, $\quad |U| \leq kr(U)$.

(f) **(8 puntos)** Use lo anterior para demostrar que para todo grafo conexo $G = (V, E)$, E se puede escribir como unión (no necesariamente disjunta) de k árboles generadores si y solo si para todo $W \subseteq V$, $|E[W]| \leq k(|W| - 1)$

Problema 3 (16 puntos).

La primera parte del problema es un ejercicio en álgebra lineal. Sea M una matriz con filas indexadas por el conjunto F y columnas indexadas por el conjunto C, a coeficientes en $\mathbb{R}$. Recordamos que el rango de M, rango(M) corresponde al número más grande de columnas linealmente independientes de M (equivalentemente por filas linealmente independientes). Para $F' \subseteq F$, $C' \subseteq C$, llamamos $M(F', C')$ a la submatriz de M con filas en F' y columnas en C'.

(a) **(4 puntos)** Demuestre que para todo F', $\text{rango}(M) \leq \text{rango}(M(F', C)) + \text{rango}(M(F \setminus F', C))$. (Indicación: complete con ceros para trabajar con vectores del mismo tamaño).

Sea ahora A una matriz con filas F y columnas C, a coeficientes en $\mathbb{R}$, donde $|F| = |C| = n$. Suponga que A es invertible (es decir, tiene rango n).

(b) **(8 puntos)** Demuestre que para todo subconjunto de filas F' existe un subconjunto de columnas C' con $|F'| = |C'|$ tal que $A(F', C')$ y $A(F \setminus F, C \setminus C')$ son ambas invertibles.

Por ejemplo, si $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ y $F' = \{f_1, f_2\}$, entonces podemos tomar $C' = \{c_1, c_4\}$.

Indicación: Use el teorema de intersección de matroides.

(c) **(4 puntos)** Este problema no tiene que ver con las partes anteriores. Encuentre un algoritmo $O(n + m)$ que dado 2 vértices a, b de un grafo no dirigido determine un ciclo que pasa por a y b (o determine que no hay tal ciclo).