MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Francisco Maldonado P.
Fecha: 16 de noviembre de 2020.

Enlace a la clase

Cátedra 18

1. Intesección de Matroides

1.1. Introducción

En la presente clase hablaremos sobre intersección de matroides, un tema en profunda relación con el trabajo anterior y cuyo estudio motivaremos a partir de los desarrollos obrenidos para matchings en grafos bipartitos.
Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito para el cual queremos calcular matching de tamaño máximo, nos encontramos frente al problema de que los matching no constituyen matroide. Para abordar este problema podríamos diseñar los dos sistemas de independencia distintos siguientes, uno para el lado izquierdo $\mathcal{I}_1$ y otro para el derecho $\mathcal{I}_2$,

$$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E : \forall v \in L, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$$
$$\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E : \forall v \in R, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$$

Lo interesante de esta construcción es que en ambos casos $(E, \mathcal{I}_1), (E, \mathcal{I}_2)$, son matroides, específicamente matroides de partición. Pues cada arista del grafo es incidente a exactamente un vértice de él, por tanto se cumple lo siguiente

$$E = \bigcup_{v \in L} \delta(v) \text{ y } E = \bigcup_{v \in R} \delta(v)$$

y se muestra que la elección de una arista por vértice nos entrega una matroide de partición.

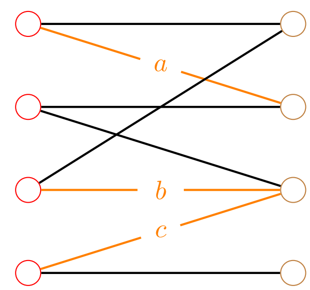


Figura 1: Ejemplo de grafo bipartito con $\{a, b, c\} \in \mathcal{I}_1$.

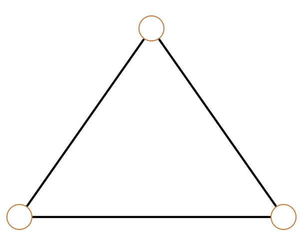


Figura 2: Ejemplo de grafo no bipartito en el cual no podemos encontrar matroides de partición válidas.

Además, convenientemente I_1, I_2 definen los matching, pues un conjunto de aristas es un matching siempre y cuando por el lado izquierdo tenga grado a lo más uno y por el lado derecho tenga grado a lo más uno (esto sólo funciona en conjuntos bipartitos, no se puede encontrar una partición de un conjunto de vértices y una partición de otro conjunto de vértices tal que las matroides asociadas sean de partición en un grafo cualquiera, un contraejemplo lo constituye el triángulo). Dicho esto, otra forma de entender el matching de tamaño máximo en un grafo bipartito es el problema de encontrar un grafo M que sea independiente en dos matroides al mismo tiempo ($M \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$) de tamaño máximo.
Podemos generalizar este problema para obtener resultados teóricos al estudio de la intersección de dos matroides cualesquiera $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1)$ y $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1)$, en las cuales queremos encontrar un conjunto que sea independiente común a ambas matroides, de tamaño máximo.

Observación: La colección de todos los conjuntos independientes en ambas matroides no es matroide pero sí sistema de independencia.

Preguntas que uno debe hacerse en este escenario:

- ¿Es posible encontrar una base de tamaño máximo en $\mathcal{I}$?
- No podemos usar glotón, pues no es matroide, ¿Cómo encontrar base máxima entonces?
  Inspiración: Caminos alternantes en grafos bipartitos.
- ¿Tenemos algo similar al teorema Köning? (Algún tipo de dualidad máx-min)
- Queremos ver aplicaciones de este problema.

1.2. Ejemplos de Intersección de Matroides

Antes de comenzar con la teoría y algoritmos, los siguientes son ejemplos de Matroides de Intersección:

- Matching en grafos bipartitos
- Branchings
- Bosques (o matroides) coloreadas

Definición 1 (Branching)**.** Un r-*branching* de un digrafo $D = (V, E)$, $r \in V$ es esencialmente un bosque orientado B, tal que para todo $v \neq r$ se tiene $deg^-_B(v) \leq 1$ y $deg^-_B(r) \leq 0$.

¿Cómo escribimos un branching como intersección de matroides?

$M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ con $\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E : |\delta^-_E(v) \cap F| \leq 1\}$ y $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroide gráfica de $(V, \overline{E})$ con $\overline{E}$ la versión no dirigida de E.

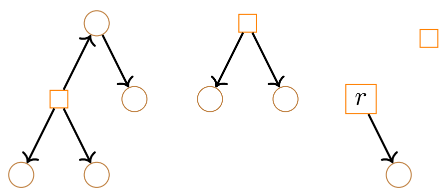


Figura 3: Ejemplo de branching.

Definición 2 (Bosques Coloreadas)**.** Los Bosques o Matroides Coloreadas son grafos $G = (V, E)$ no dirigidos tal que cada arista tiene un color $C \in [k]$.

Problema: encontrar un bosque coloreado $F \subseteq E$ donde cada color aparece a lo más una vez en F.

¿Cómo escribimos un branching como intersección de matroides?

Este problema es equivalente a encontrar un independiente común en la motroide gráfica y la matroide dada por la partición de colores.

Los ejemplos enunciados son una muestra de los tipos de problemas que pueden aparecer, no obstante hay problemas mucho más complejos, que requieren tener conocimiento de matroides que no hemos estudiado.

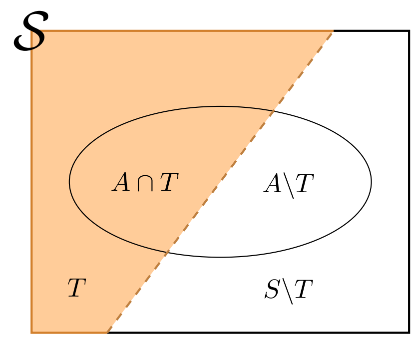
1.3. Relación de Dualidad Débil

Lo primero que haremos en este tema es tratar de obtener algún tipo de dualidad débil para intersección de matroides, buscando una relación entre independientes máximos en ambas matroides y algún objeto relacionable que alcance algún tipo de mínimo.

Notemos que si nos restringimos al caso de una sóla matroide $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$, tenemos la desigualdad $\forall A \in \mathcal{I}, |A| \leq r(\mathcal{S})$ por definición de rango . Si ahora consideramos dos matroides sobre el mismo conjunto $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1), (\mathcal{S}, \mathcal{I}_2)$, podemos obtener la siguiente desigualdad (“ extensión ” de la anterior):

$$\forall A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2, \forall T \subseteq \mathcal{S} : |A| = |A \cap T| + |A \backslash T| \leq r_1(T) + t_2(\mathcal{S} \backslash \mathcal{T})$$

Para ver cómo obtener la expresión expuesta, notemos que dado un independiente A, si queremos acotar su tamaño, podemos particionar el espacio (y por tanto el independiente) en dos conjuntos $\{T, \mathcal{S} \backslash T\}$, obteniendo que el tamaño de $A \cap T$ es a lo más el rango de todo T en la primera matroide, pues es un independiente en la primera matroide (en ambas) y subconjunto de T:



$$|A \cap T| \leq r_1(T)$$

Y por otro lado, lo que quedó en $\mathcal{S} \backslash T$ es independiente en la segunda matroide (en ambas), es menor o igual al rango de $\mathcal{S} \backslash T$, pues es el tamaño del máximo de los independientes en $S \backslash T$:

$$|A \backslash T| \leq r_2(S \backslash T)$$

Este resultado se tiene para cualquier división de A dada por cualquier $T \subseteq \mathcal{S}$, por lo cual nos entrega la siguiente relación:

$$\max_{A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |A| \leq \min_{T \subseteq S} r_1(T) + r_2(S \backslash T)$$

Esta última expresión es fácilmente generalizable al caso de k matroides $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_i)$ particionando A en k partes, como sigue

$$\max \left\{ |A| : A \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{I}_i \right\} \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i(T_i) : (T_i)_{i=1}^{k} \text{ partición de } \mathcal{S} \right\}$$

Las relaciones de tipo mín-máx (dualidad débil) son muy útiles, pues si encontramos un independiente A y una partición que alcancen la igualdad, obtendríamos directamente que A es independiente máximo y que la partición tiene sumatoria de rangos mínima, análogo a como lo hacíamos en el problema de matchings en grafos bipartitos.
Sin embargo no siempre se puede encontrar objetos que alcancen la igualdad, en el caso de dos matroides se puede, en el caso de k matroides, posiblemente no. Casi seguramente no.

1.4. Desvío: Problemas NP-Difíciles

Los problemas NP-Difíciles constituyen una clase importante de problemas para los cuales se conjetura (sospecha fundada) que no existen algorimos polinomiales de resolución. En rigor la inexistencia de algoritmos de solución polinomiales no ha sido demostrada mediante ningún teorema, no es certeza, pero es una conjetura muy bien fundada, hay extensa investigación que data de varios años y señala que de existir algoritmo polinomial para algún problema NP-Difícil, entonces todos los problemas NP-Difíciles tendrían solución polinomial, sin embargo no se ha podido encontrar ninguna solución a ninguno de los problemas de esta clase.

Ejemplos de problemas NP-Difíciles conocidos:

- Problema del *Vendedor Viajero*: Dado un conjunto de ciudades, encontrar un tour de largo mínimo que pase por todos ellas. No hay algoritmo polimonial aplicable a cualquier caso.
- *Ciclo Hamiltoniano*: Existencia de un ciclo que pase por todos los los vértices de un grafo.
- Encontrar el camino más largo de un grafo (dirigido o no dirigido). El caso general (no restringido por la no existencia de ciclos) es NP-Difícil.
- Intersección de tres matroides. ($\Rightarrow$ Camino más largo)

Mientras que la intersección de tres matroides es seguramente un problema difícil, veremos que la intersección de dos matroides es un porblema fácil (existe algoritmo polinomial).

1.5. Extensión del Teorema de Könich

Buscaremos demostrar un teorema análogo al Teorema de Könich para intersección de matroides generales.

Teorema 1 (Intersección de Matroides)**.** *Sean* $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1), (\mathcal{S}, \mathcal{I}_1)$ *dos matroides sobre* $\mathcal{S}$*. Entonces*

$$\text{máx}\{|X| : X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \text{mín}\{T \subseteq S : r_1(T) + r_2(S \backslash T)\}$$

El Teorema de König es un caso particular de este teorema, aplicado a $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito con

$$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E : \forall v \in L, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$$
$$\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E : \forall v \in R, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$$

Es directo que $\text{máx}\{|X| : X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \text{máx}\{|X| : X \text{ matching}\}$. Que la cota superior sea equivalente no es tan claro. Sea $T \subseteq E$ conjunto de aristas en G cualquiera y llamemos X_1 al conjunto de vértices de L que tocan a T y X_2 al conjunto de vértices de R que tocan a $S \backslash T$. $r_1(T) = |X_1|$ y $r_2(S \backslash T) = |X_2|$, pero además $X_1 \cup X_2$ es cubrimiento, pues si alguna arista está en T es cubierta por X_1 y si no está en T es cubierta por X_2. No es difícil notar que X_1 y X_2 son disjuntos, pues son vértices en L y R respectivamente, luego

$$r_1(T) + r_2(S \backslash T) = |X_1| + |X_2| = |X_1 \cup X_2|$$

De aquí se deriva que de cualquier subconjunto de aristas T se puede obtener un recubrimiento C y de cualquier cubrimiento C se puede obtener un subconjunto de aristas (basta tomar las aristas incidentes a los vértices en L del cubrimiento), tales que $r_1(T) + r_2(S \backslash T) = |C|$. Por lo tanto

$$\text{mín}\{r_1(T) + r_2(E \backslash T) : T \subseteq S\} = \text{mín}\{|C| : C \text{ es cubrimiento}\}$$

y se concluye el Teorema de König como corolario del teorema enunciado.

1.6. Generalización de Caminos Alternantes

La generalización de caminos alternantes al problema de la intersección de matroides no es tan fácil, porque a diferencia del problema de grafos bipartitos, en el problema actual de estudio no hay necesariamente un grafo común ras las matroides $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1), (\mathcal{S}, \mathcal{I}_1)$. Para encontrar algún análogo a caminos alternantes partamos restringiéndonos a un sólo sistema de independencia $\mathcal{J}$ arbitrario con $I \in \mathcal{J}$, y definamos los objetos siguientes:

Definición 3 (Camino Alternante Par)**.** Una secuencia $P = v_1, v_2 v_3 ... v_k$ de elementos distintos en $\mathcal{S}$, se dice camino I alternante par si sus elementos impares están en I y los pares en $\mathcal{S} \backslash I$

Definición 4 (Camino de Intercambio)**.** Un camino I-*alternante* par P es de intercambio si $I \Delta P \in \mathcal{J}$. (Al restar los elementos impares de P de I y sumar los elementos pares a I se obtiene un independiente).

En un matching teníamos las aristas dentro de este y las aristas fuera de él, y cuando encontrábamos un camino alternante podíamos sacar los elementos de este que estaban dentro del matching e ingresar aquellos que estaban fuera, obteniendo como resultado otro matching.

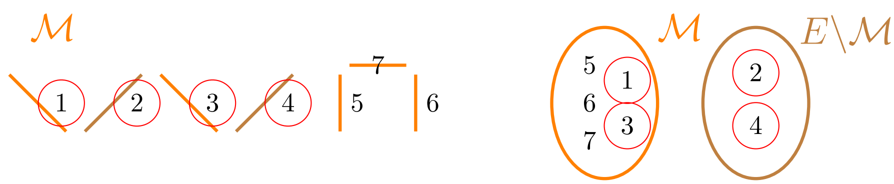
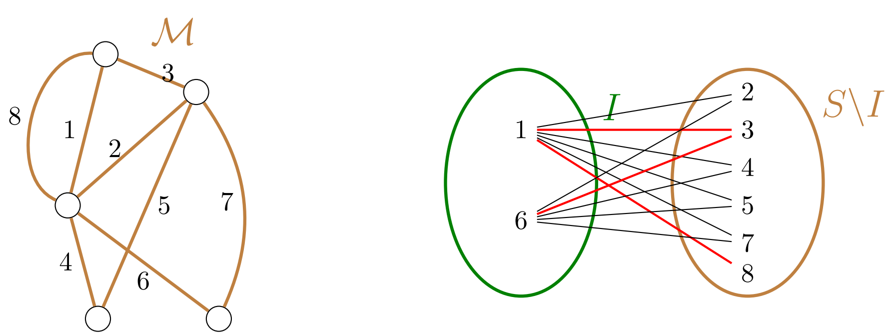


Figura 4: Camino Alternatnte (Par) $\boldsymbol{P = \{1, 2, 3, 4\}}$, en un matching es siempre de intercambio.

Es complicado lanzarse directamente a buscar caminos alternantes en la intersección de dos matroides, es por esto que comenzaremos estudiando los conceptos recién vistos para una sóla matroide. En $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ matroide gráfica, para $I \in \mathcal{I}$ independiente, el **grafo de intercambios** de I es el grafo bipartito $G' = G_I(\mathcal{M})$ con bipartición $I, \mathcal{S} \backslash I$ y tal que $xy \in E'$ si y solo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.

E.g:



Dado $I \in \mathcal{I}$, G' es el grafo cuyos vértices son los mismos de la matroide gráfica, pero sus aristas son las aristas que van desde I a $\mathcal{S} \backslash I$ y que unen vértices intercambiables. Un ejemplo lo constituye la matroide gráfica $\mathcal{M}$ ilustrada arriba junto al independiente $I = \{1, 6\}$. Si centramos nuestra atención en los vértices 3 y 8 de G' (aristas en $\mathcal{M}$), podemos notar que la las aristas $(1, 3)$ y $(1, 8)$ están presentes en G' pues al intercambiar 1 por 3 u 8 en I no generamos ningún ciclo en $\mathcal{M}$:

$$\{1, 6\} + 3 - 1 \in I \text{ y } \{1, 6\} + \{8\} - \{1\} \in I \Rightarrow (1, 3), (1, 8) \in G'$$

Lo mismo para la arista $(6, 3)$:

$$\{1, 6\} + 3 - 6 \in I \Rightarrow (6, 3) \in G'$$

Sin embargo al añadir la arista 8 generamos un ciclo que no se soluciona al quitar 6, por lo cual la arista $(6, 8)$ no está en G':

$$\{1, 6\} + 8 - 6 \notin I \Rightarrow (6, 8) \notin G'$$