**MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.**
**Profesor:** José Soto
**Escriba(s):** Cristóbal Bravo y Diego Dominguez
**Fecha:** 20 de noviembre de 2020
(`https://youtu.be/6mCsCph0jYE`).

# Cátedra 19

## 1. Intersección de Matroides

Anteriormente se comenzó a tratar el intercambio de matroides, sin llegar a la parte algorítmica. Previo a continuar con este tema, haremos un desarrollo previo de algunas definiciones y propiedades.
Comenzamos por defirnir el grafo de intercambios de un conjunto independiente en una matroide.

**Definición 1.** Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide e $I \in \mathcal{I}$ un conjunto independiente. Se define el grafo de intercambio de I en $\mathcal{M}$ como el grafo bipartito: $G_I(\mathcal{M}) := (S, E_I)$, con partes I y $S \backslash I$, donde $xy \in E_I (x \in I, y \in S \backslash I)$, si y sólo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.

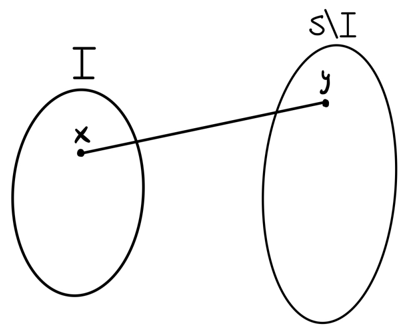


Figura 1: Grafo bipartito, con $I - x + y \in \mathcal{I}$

Consideremos $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide, $I \in \mathcal{I}$ un independiente y $G_I(\mathcal{M})$ su grafo de intercambios.

**Teorema 1.** *Sea $J \in S$ tal que $|J| = |I|$.*

1. $J \in \mathcal{I} \Rightarrow \exists$ *matching perfecto* $I \backslash J : J \backslash I$ *en* $G_I(\mathcal{M})$
2. *Existe único matching perfecto* $I \backslash J : J \backslash I$ *en* $G_I(\mathcal{M}) \Rightarrow J \in \mathcal{I}$

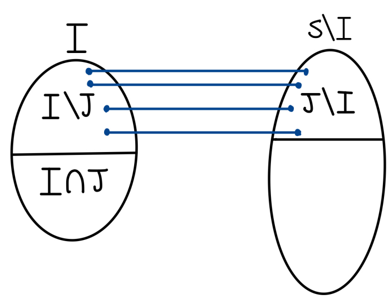


Figura 2: Matching perfecto entre $I \backslash J$ y $J \backslash I$

**Dem.**:
1) Supongamos que $H = G_I[I\backslash J \cup J\backslash I]$, el subgrafo inducido por $I\backslash J \cup J\backslash I$ (no consideramos $J \cap I$), no tiene matching perfecto.
Por el teorema de Hall, tenemos que $\exists K \subseteq J\backslash I$ tal que $|N_H(K)| < |K|$ (es decir, K tiene menos vecinos que vértices).
Como I y J tienen los mismos elementos, también los tienen $I\backslash J$ y $J\backslash I$ y como $|N_H(K)| < |K|$ y $K \subseteq J\backslash I$, entonces $(I\backslash J)\backslash N_H(K) \neq \emptyset$ .
Consideremos $x \in (I\backslash J)\backslash N_H(K)$.
Notemos que:

- $\alpha := (I \cap J) \cup N_H(K) \subseteq I \in \mathcal{I}$
- $\beta := (I \cap J) \cup K \subseteq J \in \mathcal{I}$

Como $|\alpha| < |\beta|$, por axioma de aumento: $\exists y \in \beta\backslash\alpha = K$, tal que: $A := (I \cap J) \cup N_H(K) + y \in \mathcal{I}$.
Sabemos que $xy \notin E(H)$, pues $x \notin N_H(K)$ e $y \in K$. Con ello tenemos que $I - x + y$ es dependiente, y así $I + y \notin \mathcal{I}$.
Como $I \in \mathcal{I}$, al agregar un elemento $(I + y)$ sólo puede crearse un circuito, ie: $\exists! C$ circuito $\subseteq I + y$. Sabemos que $y \in C$ (si no $C \subseteq I$, pero I es independiente).
Notemos también que $C \nsubseteq A$, pues A es independiente, entonces $\exists z \in C\backslash A$. Sabemos que $zy \notin E(H)$, pues $z \notin N_H(K)$ e $y \in K$. Entonces $I + y - z \notin \mathcal{I}$, luego $I + y - z$ tiene un circuito $C'$, pero como $z \in C$, tenemos que $C' \neq C$ y ambos están contenidos en $I + y$, pero sabemos que existe un único circuito contenido en $I + y$ $\rightarrow\leftarrow$.

2) Supongamos que tenemos un único mathching N entre $I\backslash J$ y $J\backslash I$ en $G_I(\mathcal{M})$. Orientemos N en $G_I(\mathcal{M})$ hacia I el resto hacia $S\backslash I$. Es decir, consideremos el digrafo D idéntico a $G_I(\mathcal{M})$ donde las aristas van de $J\backslash I$ a I si están en el matching N y si no se orientan de I a $S\backslash I$. Notemos que si existe un ciclo C en D, debe ser un ciclo N-alternante. Así se puede ver que $C \triangle N$ es matching perfecto entre $I\backslash J$ y $J\backslash I$, con lo que en D no pueden haber ciclos.

Como D es digrafo acíclico, entonces D tiene un orden topológico. Si $J \in \mathcal{I}$, entonces existe un circuito $C \subseteq J$, por lo que C debe intersectar $J\backslash I$. Sea $y_k$ el vértice de $C$ con mayor índice, entonces tenemos que $y_k \in span(C - y_k)$. Por otro lado si $y \in C - y_k$, es decir, $y$ se encuentra más arriba que $y_k$, entonces la arista $xy_k \notin E(G_I(m))$. Como $I - x_k \in \mathcal{I}$, entonces $I - x_k + y$ deja de ser independiente, es decir, $y \in span(I - x_k)$.
Por lo tanto, $C - y_k \subseteq span(I - x_k)$ lo que implica que $span(C - y_k) \subseteq span(I - x_k)$. Luego $y_k \in span(I - x_k)$, por lo que $I - x_k + y_k \notin \mathcal{I} \Longrightarrow x_k y_k \notin E(G_I(m)) \rightarrow\leftarrow$.

Para concluir, si se encuentra matching $N$ en $G_I(\mathcal{M})$ tal que N es el único matching perfecto de sus extremos, entonces podemos intercambiar los extremos manteniendo independencia (camino de intercambio).

**Corolario 1.** *Intercambio fuerte de bases: Sean A y B bases de una matroide. Existe una biyección $\phi : A \to B$ tal que $\forall a \in A$: $A + \phi(a) - a$ es base.*

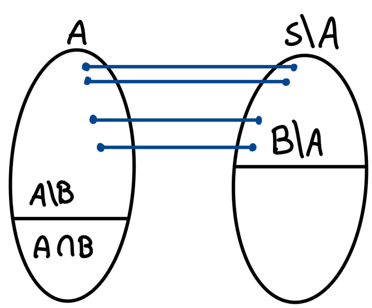


Figura 3: Biyección entre A y B.

Llamémos a N matching de intercambio.
Ahora surge la siguiente pregunta, ¿Cómo hacer algo similar en dos matroides $M_1 = (S, I_1)$, $M_2 = (S, I_2)$?.
Para responder esto hay que usar caminos que alternen entre un matching de $G_I(\mathcal{M}_1)$ y un matching $G_I(\mathcal{M}_2)$. Esto es posible de realizar gracias al siguiente algoritmo:

**Definición 2.** Digrafo de intercambios de 2 matroides:
$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ es la superposición de $G_I(\mathcal{M}_1)$ orientado de $I$ a $S \backslash I$ y $G_I(\mathcal{M}_2)$ orientado de $S \backslash I$ a $I$.

**Algorithm 1:** Algoritmo Intersección de Matroides (Aigner-Dowling 1975 / Lawler 1975)

**Entrada:** Oraculos para $\mathcal{M}_1 = (S, I_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, I_2)$
$I \rightarrow \phi$
**repeat**
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \backslash I : I + y \in I_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \backslash I : I + y \in I_2\}$
  **if** $\exists$ $X_1 - X_2$ *camino* **then**
    Encontrar X1-X2 camino más corto P;
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  **else**
    $T \leftarrow \{v \in S : \exists\ v - X_2 \text{ camino}\}$
    **Return:** $(I, T)$
  **end**
**until** ***devolver*** $(I, T)$;

Para terminar, se presenta el siguiente teorema y una idea de su demostración:

**Teorema 2.** *Si $P$ es $X_1 - X_2$ camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.*

**Dem.**
Basta probar que $J = I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$, ya que el procedimiento es análogo para $\mathcal{I}_2$, pues $P$ reverso es $X_2 - X_1$ camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)$. Para proseguir, se considera los siguiente conjuntos:
$\mathcal{M}_1' = (S + z, \mathcal{I}_1' = \{W \subseteq S : W \backslash z \in I_1\})$, con $I + z \in \mathcal{I}$ y $|J| = |I + z|$
$\mathcal{M}_2' = (S + z, \mathcal{I}_2' = \{W \subseteq S : W \in I_2\})$

Se tiene que $(I + z) + r - z = I + r \in \mathcal{I}$. Notemos que las aristas pares del camino $P + zr$ es un matching perfecto. Luego como $P$ es mínimo, no hay otro macthing perfecto entre los extremos de estas aristas. Entonces, $(I + z)\Delta V(P + zr) \in \mathcal{I}_1$, es decir, $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$

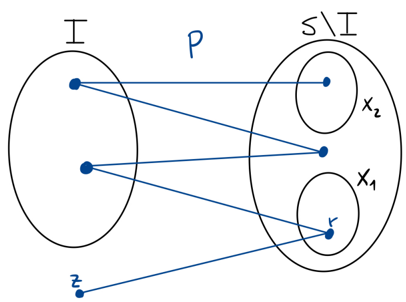


Figura 4: Representación gráfica de $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$