Clase 23 MA3705. 11 de diciembre 2020.

Tabla

- Descomposición de Flujo
- Edmonds-Karp

Descomposición de Flujo

Teorema de descomposición de flujo

$f \geq 0$ un s-t flujo en G. $\mathcal{P}_{s,t}$: s-t caminos. $\mathcal{P}_{t,s}$: t-s caminos. $\mathcal{C}$: ciclos.

Teorema: existen constantes $\lambda \geq 0$ tal que:

valor$(f) = 0$ entonces $f = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

valor$(f) > 0$ entonces $f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

valor$(f) < 0$ entonces $f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{t,s}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

El número total de coeficientes no nulos es a lo más $|E|$

Demostración: Inducción en $|E|$.

- Borrar arcos con flujo 0.
- Si existe ciclo C. Sea $\lambda_C = \min_{e \in C} f(e) = f(e^*)$ entonces $f' = f - \lambda_C \chi^C$ es s-t flujo no negativo en $G - e$ de igual valor.

Teorema de descomposición de flujo

- Suponemos acíclico.
- Si valor$(f) > 0$, sea $X = \{v\colon$ alcanzables desde s con arcos$\}$
- Si $t \notin S$, entonces
- Luego $t \in S$ y existe s-t camino P.
- Casi valor$(f) < 0$ análogo.

Corolario importante

Sea f es un s-t flujo factible en N con valor$(f) > 0$.
El teorema de descomposición de flujo garantiza que

$$f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C,$$

con todos los $\lambda \geq 0$ y a lo más m términos no nulos.

Luego, existe un s-t camino en N con $\displaystyle\min_{e \in P} f_e \geq$

Edmond-Karp 1: Caminos de mayor capacidad

Algoritmo de Edmonds-Karp de mayor capacidad

Edmonds, Karp (1972)

Entrada: Red $N = (G, u, s, t)$ con capacidades enteras

$f\colon E \to \mathbb{R}$, $f \leftarrow 0$

Construir N_+^f. (solo capacidad positiva)

mientras *Existe camino aumentante* P *en* N_+^f **hacer**

  Elegir P de mayor capacidad residual.

  $f \leftarrow f + \chi^P \overline{\mathsf{cap}^f(P)}$.

  Recalcular N_+^f.

fin

devolver f.

Teorema

EK1 termina en $O(m \log \mathrm{OPT})$ iteraciones.

Edmonds Karp de mayor capacidad

Sea OPT el valor del flujo óptimo. Sea v_k el valor del flujo f^k de la k-ésima iteración.

1. Existe flujo en N^{f^k} de valor:
2. Luego, existe camino aumentante de valor:
3. Luego $\mathrm{OPT} - v^{k-1} \leq$
4. Por lo tanto

Observaciones

1. EK1 es un algoritmo débilmente polinomial.
2. No se sabe si es fuertemente polinomial (abierto)

Edmond-Karp 2: Caminos de mayor capacidad

Algoritmo de Edmonds-Karp de mayor capacidad

EDMONDS, KARP (1972)

Entrada: Red $N = (G, u, s, t)$ con capacidades enteras

$f : E \to \mathbb{R}$, $f \leftarrow 0$

Construir N_+^f. (solo capacidad positiva)

mientras *Existe camino aumentante* P *en* N_+^f **hacer**

  Elegir P de menor número de arcos.

  $f \leftarrow f + \chi^P \overline{\mathrm{cap}^f(P)}$.

  Recalcular N_+^f.

fin

devolver f.

Teorema

Edmonds Karp es fuertemente polinomial.

Capas: BFS en N_+^f

Sea G_i grafo residual (N_+^f) en la i-ésima iteración.
Construir capas $L_0^i, L_1^i, \ldots, L_r^i$ basadas en BFS: $\text{dist}_i(s, v) = k \iff v \in L_v^i$
Camino P elegido respeta las capas (va de una a la siguiente).

Lema

Arcos que salen: $E(G_i) \setminus E(G_{i+1}) \subseteq P$
Arcos que entran $E(G_{i+1}) \setminus E(G_i) \subseteq$ reversos de P.

Consecuencias

Lemas

1. $\forall v, i \colon \mathsf{dist}_i(s, v) \leq \mathsf{dist}_{i+1}(s, v)$
2. $\forall e \in E \cup \overleftarrow{E}$. e sale de $E(G_i)$ para a lo más $n/2$ iteraciones i distintas.

Complejidad de Edmonds-Karp 2

1. En la iteración i, al menos 1 arco sale de $E(G_i)$.
2. Como cada arco sale a lo más $O(n)$ veces, el número total de iteraciones es:
3. Cada iteración toma:

Teorema

Edmonds-Karp tiene complejidad

Resumen algorítmico para flujos y cortes (suponemos $n = O(m)$)

1. Dado f es s-t flujo factible máximo, se puede encontrar s-t corte mínimo en tiempo $O(m)$.
2. Algoritmos para datos enteros:

Algoritmo	Complejidad
Ford-Fulkerson (1956)	$O(m\mathrm{OPT})$
Edmonds-Karp I (1972)	$O(m \log \mathrm{OPT})$
Edmonds-Karp II (1972)	$O(nm^2)$
Goldberg-Tarjan (1988)	$O(n^2m), O(n^3), O(nm \log n)$
Orlin+King Rao Tarjan (2013)	$O(nm)$

Con muchas mejoras en el caso de capacidades pequeñas.