MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Carlos Antil, Javiera Gutierrez y .
Fecha: 31 de Agosto de 2020
(`https://es.wikipedia.org/wiki/0_de_marzo`).

Cátedra 21

1. Flujos y Cortes en Redes

Definición 1. (Red) Sea $N = (G, u, s, t)$, diremos que es una red si:

1. $G = (V, E)$ es un digrafo.
2. $u : E \to \mathbb{R}_+$ función, la cual llamaremos función de capacidad.
3. $s \in V$ nodo origen.
4. $t \in V$ nodo destino.

Definición 2. (Valor neto de entrada-salida) Sea $x : E \to \mathbb{R}$, $v \in V$, $W \subseteq V$.

1. El valor neto de entrada hacia un nodo v se define como:

$$x^{\text{in}}(v) = x(\delta^-(v)) - x(\delta^+(v))$$

   Donde recordar que $\delta^-(v)$ son aquellos vértices vecinos que entran a v y $\delta^+(v)$ son los que salen de v.

2. El valor neto de salida desde un nodo v se define como:

$$x^{\text{out}}(v) = x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = -x^{\text{in}}(v)$$

   Lo anterior también se puede definir para un conjunto de nodos:

3. El valor neto de entrada hacia un conjunto de nodos W se define como:

$$x^{\text{in}}(W) = x(\delta^-(W)) - x(\delta^+(W))$$

4. El valor neto de salida desde un conjunto de nodos W se define como:

$$x^{\text{out}}(W) = x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W)) = -x^{\text{in}}(W)$$

Ejemplo 1. (Problema de asignación)
La función capacidad u definido anteriormente se considera uno de estos vectores x posibles.

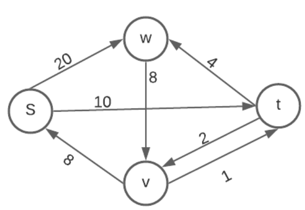

Figura 1: u es la asignación de estos valores a las aristas

Donde $u^{\text{in}}(v) = (8 + 2) - (8 + 1) = 1$ tal que $(8 + 2)$ corresponde a la suma de las aristas que entran al nodo v y $(8 + 1)$ es la suma de las aristas que salen del nodo. Mostrado en la figura 1.

Definición 3. (s-t flujos) Sea $N = (G, u, s, t)$ una red, $f : E \to \mathbb{R}$.

1. f es s-t flujo si $\forall\ v \in V - s - t$, $f^{\text{in}}(v) = 0$. (conservación de flujo)
2. El valor de un s-t flujo es $\text{valor}(f) = f^{\text{in}}(t)$.
3. Un s-t flujo f es factible si además $0 \leq f \leq u$.
4. Si P es s-t camino, χ^P es s-t flujo. Si C es ciclo, χ^C es s-t flujo.

$$\chi^P = \begin{cases} 1 & \text{arcos en } P \\ 0 & \text{arcos fuera de } P \end{cases}$$

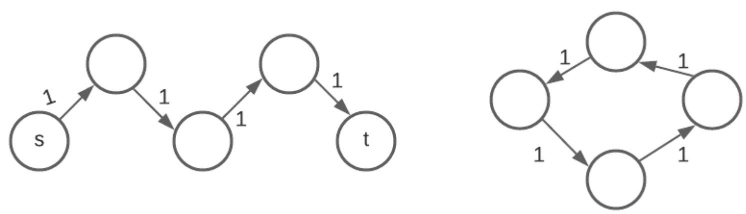

Figura 2: χ^P y χ^C $s - t$ flujo respectivamente

Ejemplo 2. (Problema de transporte)
Muchos problemas se pueden modelar como flujos. Veamos un ejemplo de problema de transporte:

Dadas las fabricas L y bodegas R:

- Cada $i \in L$ produce hasta a_i unidades binarias.
- Cada $j \in R$ almacena hasta b_j unidades diarias.
- Se pueden mandar u_{ij} unidades de i a j.

Determinar cantidad máxima que se puede producir y guardar en R.
La solución a este problema de transporte basta con crear una red, mirar que es lo que llega a t y encontrar el flujo maximal.

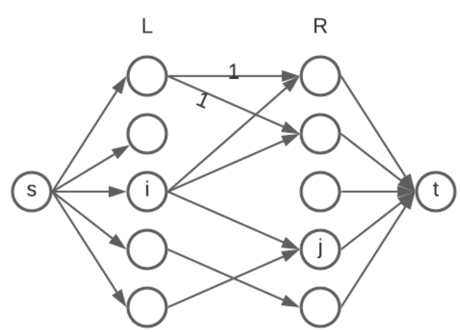

Figura 3: Problema de Transporte

2. Dualidad Débil

Proposición 1. *Sea f un s-t flujo en $N = (G, u, s, t)$, entonces valor(f) $= f^{in}(t) = f^{out}(s)$.*

- **Dem:**(La materia no se crea)

$$\begin{aligned} f^{\text{in}}(t) - f^{\text{out}} &= f^{\text{in}} + f^{\text{in}}(s) \\ &= \sum_{v \in V} f^{\text{in}}(v) \end{aligned}$$

en el cual el último paso se tiene debido a que $f^{\text{in}}(v) = 0 \ \forall v \in V - s - t$.

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} f^{\text{in}}(v) &= \sum_{v \in V} f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v)) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e - \sum_{v \in V} \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e \\ &= \sum_{e \in E} f_e - \sum_{e \in E} f_e \\ &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que $f^{\text{in}}(t) = f^{\text{out}}(s)$.

Definición 4. (s-t corte) Un *s-t* corte se define como un conjunto $X \subseteq V$ en el cual $s \in X$ y $t \notin X$,

Lema 1. *Para todo s-t flujo f y todo s-t corte X, valor(f)=$f^{out}(X)$=$f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X))$.*

- **Dem:**

$$\begin{aligned} \text{valor}(f) = f^{\text{out}}(s) &= \sum_{v \in X} f^{\text{out}}(v) \\ &= \sum_{v \in X} f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v)) \\ &= \sum_{v \in X} \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{v \in X} \sum_{e \in \delta^-(v)} \\ &= (f(E[X]) + f(\delta^+(X))) - (f(E[X]) + f(\delta^-(X))) \\ &= f^{\text{out}}(X) \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que valor$(f) = f^{\text{out}}(X)$.

Ejemplo 3. (Lema 1)

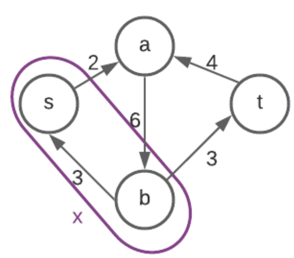

Figura 4: Ejemplo Lema 1

Donde $valor(f)$ seria, $valor(f) = 2 - 3 = -1 = 3 - 4$ y donde $f^{out}(X))$:

$$\begin{aligned} f^{out}(X)) &= f(\delta^+(X))) - f(\delta^-(X))) \\ &= (3+2) - 6 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Lo cual nos comprueba la igualdad del Lema anteriormente descrito.

Definición 5. (Capacidad s-t corte X) Definimos la capacidad de un $s-t$ corte X en (G, u, s, t) como $cap(X) = u(\delta^+(X))$.

Ejemplo 4. (Capacidad de un $s-t$ corte X)

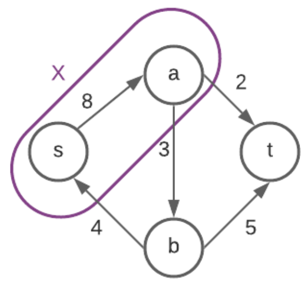

Figura 5: Capacidad de un $s-t$ corte X

En este grafo la capacidad de X es: $cap(X) = 3 + 2 = 5$.

Proposición 2. ***(Dualidad débil)*** *$\forall s-t$ flujo factible f, $s-t$ corte X, se cumple que $valor(f) \leq cap(X)$. En particular, $\max_f valor(f) \leq \min_X cap(X)$.*

- **Dem:** Sea f flujo factible, del lema anterior

$$\begin{aligned} \text{valor}(f) = f^{\text{out}}(X) &= f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X)) \\ &\leq f(\delta^+(X)) \end{aligned}$$

donde lo últimos se tiene debido a que $f(\delta^-(X)) = \sum_{e\in\delta^-(X)} f_e > 0$, dado que $f \geq 0$.

$$\begin{aligned} f(\delta^+(X)) &\leq u(\delta^+(X)) \\ &= \text{cap}(X) \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que $valor(f) \leq cap(X)$.

Más adelante se probará que se tiene dualidad fuerte, es decir, se cumple la igualdad anterior.

3. Flujos Residuales

Dada una red $N = (G, u, s, t)$ queremos encontrar un $s-t$ flujo factible que maximice $valor(f)$. ¡Es un programa lineal!

$$\max \text{valor}(f)$$

$$f^{\text{out}} = 0, \;\; \forall v \in V - s - t$$

$$0 \leq f \leq u$$

lo cual equivale a

$$\text{máx} \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0, \ \ \forall v \in V - s - t$$

$$0 \leq f_e \leq u_e, \ \ \forall e \in E$$

Simplex (no polinomial).
Métodos polinomiales: Elipsoide y Punto Interior. (polinomiales, pero no fuertemente polinomiales)
Buscaremos un algoritmo combinatorial.

Primera idea: Aumentos glotones.
Dado s-t flujo factible f en red $N = (G, u, s, t$. ¿Cómo encontrar f' con valor(f) > valor(f).
Idea: Encontrar s-t camino P en $E' := \{e \in E : f_e < u_e\}$. Mandar $cap(P) := \min_{e \in P}(u_e - f_e) > 0$ unidades de flujo por P.

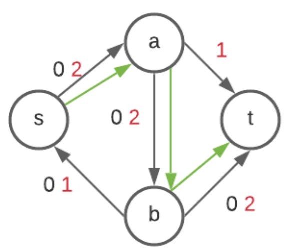

Figura 6: Donde la asignación u es de color rojo, f de color negro y un camino encontrado de color verde.

Mejor Idea: Red Residual.

Definición 6. (Red Residual) Dado s-t flujo factible f en (G, u, s, t), definimos la red residual (G^f, u^f, s, t) como $G' = (V, E \cup \overleftarrow{E})$ con $\overleftarrow{E} := \{\overleftarrow{e} : e \in E\}$ arcos nuevos tal que $\overleftarrow{e}$ es antiparalelo a e tendremos que:

1. $\forall e \in E : u^f(e) = u(e) - f(e)$.
2. $\forall e \in E : u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$.

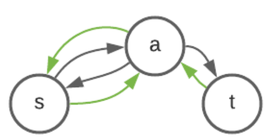

Figura 7: Grafo G^f, donde $\overleftarrow{E}$ esta señalado de color verde

Ejemplo 5. (Red Residual)
Donde podemos notar que $u^f(sa) = u(e) - f(e) = 3 - 2 = 1$ que es lo que aun puedo mandar por ahí y $u^f(\overrightarrow{sa}) = 2$ lo que puedo devolver por el grafo original. (Ver Figura 8)

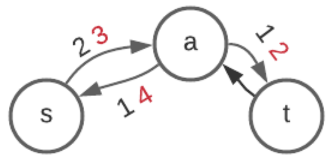

Figura 8: Donde el flujo f es de color negro y u de color rojo

Proposición 3. *Sea g un flujo residual factible en (G^f, u^f, s, t) y sea $\bar{g} : E(G) \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{g}(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e})$. Entonces:*

1. *$\bar{g}$ es s-t flujo en (G, u, s, t).*
2. *$f + \bar{g}$ es s-t flujo factible en (G, u, s, t).*
3. *valor$(f + \bar{g})$= valor(f) + valor$_{G^f}(g)$.*