MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Daniel Minaya Vargas y Felipe Urrutia Vargas.
Fecha: 11 de diciembre de 2020
(`https://es.wikipedia.org/wiki/0_de_marzo`).

Cátedra 22

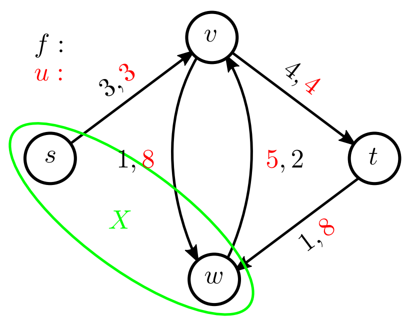
1. Recuerdo

Definición 1 (Red)**.** Decimos que $N = (G, u, s, t)$ es una red, donde $G = (V, E)$ es un dígrafo, $u : E \to \mathbb{R}_+$ función no negativa llamada *capacidad* y $s, t \in V$ vértices denominados como *fuente* y *sumidero*, respectivamente.

Definición 2 ($s-t$ flujo)**.** Decimos que $f : E \to \mathbb{R}$ es un $s-t$ flujo si existe *conservación de flujo* en cada vértice $v \in V - s - t$, esto es: $f^{\text{out}}(v) := f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v)) = 0$.

Definición 3 (Flujo factible)**.** Decimos que $f : E \to \mathbb{R}$ es un $s-t$ flujo factible si es $s-t$ flujo y satisface que $0 \le f \le u$. Además su valor se define como $\text{valor}(f) := f^{\text{out}}(s) = f^{\text{in}}(t)$.

Proposición 1 (Dualidad débil)**.** *Sea X $s-t$ corte y f flujo factible, entonces $valor(f) \le cap(X) := u(\delta^+(X))$.*



$\text{valor}(f) = 4 - 1 = 3$
$f^{\text{out}}(X) = 3 + 2 - 1 - 1 = 3$
$\text{cap}(X) = 5 + 3 = 8$

Figura 1: $s-t$ flujo factible f y $s-t$ corte X.

1.1. Observación importante

Proposición 2. *Sea OPT el valor de un $s-t$ flujo máximo en $N = (G, u, s, t)$. Entonces,*

$$OPT > 0 \iff \exists s-t \text{ camino } P \text{ de capacidad } cap(P) = \min_{e \in P} u_e > 0$$

- **Demostración:** Si existe $s-t$ camino P de capacidad positiva, entonces podemos considerar el flujo factible $f = \chi^P \text{cap}(P)$. Con esto,
$$\text{OPT} \ge \text{valor}(f) = \text{cap}(P) > 0$$
Por otro lado, si no existe tal camino, entonces definimos los conjuntos $E_+ = \{e \in E : u_e > 0\}$ y $X = \{v \in V : v \text{ es alcanzable desde } s \text{ en } E_+\}$. Notemos que $t \notin X$ pues no existe $s-t$ camino en E_+, luego $s \in X \subseteq V - t$, es decir, X es un $s-t$ corte. Sea $\text{OPT} = \text{valor}(f^*)$ con f^* $s-t$ flujo de valor máximo, entonces por *dualidad débil* se tiene que
$$\text{OPT} = \text{valor}(f^*) \le \text{cap}(X) = u(\delta^+(X)) = 0$$
dado que todo arco que sale de X necesariamente tiene capacidad nula, por definición de X y E_+.

2. Red residual y flujos residuales

Definición 4 (Red residual de un flujo)**.** Sea $N = (G, u, s, t)$ red y f $s-t$ flujo factible. Definimos la red residual de f en N como $N^f = (G^f, u^f, s, t)$, dada por:

$$G^f = (V, E \cup \overleftarrow{E}), \quad \overleftarrow{E} = \{\overleftarrow{e} : e \in E\}$$

$$\forall e \in E : \quad u^f(e) = u(e) - f(e), \quad u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$$

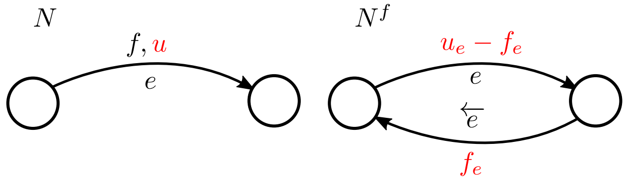


Figura 2: Red N y red residual N^f.

Definición 5 (Normalización)**.** Sea $g : E \cup \overleftarrow{E} \to \mathbb{R}$ función (no necesariamente flujo) en N^f, se define su *normalización* $\bar{g} : E \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{g}(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e})$.

Proposición 3. $\forall v \in V : g^{out}(v) = \bar{g}^{out}(v)$

- **Demostración:**

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{\text{out}}(v) &= \bar{g}^{\text{out}}(\delta_E^+(v)) - \bar{g}^{\text{out}}(\delta_E^-(v)) \\
&= \sum_{e \in \delta_E^+(v)} [g(e) - g(\overleftarrow{e})] - \sum_{e \in \delta_E^-(v)} [g(e) - g(\overleftarrow{e})] \\
&= \underbrace{\left[\sum_{e \in \delta_E^+(v)} g(e) + \sum_{e \in \delta_E^-(v)} g(\overleftarrow{e}) \right]}_{= g(\delta^+_{E \cup \overleftarrow{E}}(v))} - \underbrace{\left[\sum_{e \in \delta_E^+(v)} g(\overleftarrow{e}) + \sum_{e \in \delta_E^-(v)} g(e) \right]}_{= g(\delta^-_{E \cup \overleftarrow{E}}(v))} = g^{\text{out}}(v)
\end{aligned}$$

Corolario 1. *g es flujo en N^f ssi $\bar{g}$ es flujo en N.*

Teorema 1. *Sean f flujo factible en N, g flujo factible en N^f. Entonces,*

1. *$\bar{g}$ es flujo en N.*
2. *$f + \bar{g}$ es flujo factible en N.*
3. *valor$(f + \bar{g})$ = valor(f) + valor$_{N^f}(g)$*

- **Demostración:** 1. Directo del **Corolario 1**.

  2. Primero mostremos que $(f + \bar{g})$ es flujo. Sea $v \in V - s - t$, entonces:

  $$(f + \bar{g})^{\text{out}}(v) = f^{\text{out}}(v) + \bar{g}^{\text{out}}(v) = 0$$

  dado que $f^{\text{out}}(v) = \bar{g}^{\text{out}}(v) = 0$ al ser ambos factibles en N.

  Ahora bien, para la factibilidad basta chequear que $0 \leq f$ y $f \leq u$. Primero, para $e \in E$ tenemos:

  $$(f + \bar{g})(e) = f(e) + [\underbrace{g(e)}_{\geq 0} - g(\overleftarrow{e})] \geq f(e) - g(\overleftarrow{e}) \geq f(e) - f(e) = 0$$

  dado que $g(\overleftarrow{e}) \leq u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$.

  Luego, para $e \in E$ se tiene:

  $$(f + \bar{g})(e) = f(e) + [g(e) - \underbrace{g(\overleftarrow{e})}_{\geq 0}] \leq f(e) + g(e) \leq f(e) + u^f(e) = f(e) + u(e) - f(e) = u(e)$$

  dado que $u^f(e) = f(e) - u(e)$.

  3. valor$(f + \bar{g})$ = valor(f) + valor$(\bar{g})$ = valor$(f) + \bar{g}^{\text{out}}(s)$ = valor$(f) + g^{\text{out}}(s)$ = valor(f) + valor$_{N^f}(g)$.

La última propiedad nos dice que si g es flujo factible en N^f tal que $\text{valor}_{N^f}(g) > 0$, entonces podemos mejorar f a un flujo de mayor valor tomando $f + \bar{g}$.

Teorema 2. *Sea f, f' flujos factibles en N. Definamos g en N^f como sigue:*

$$\forall e \in E, \quad g(e) = \begin{cases} f'(e) - f(e) & \text{si } f'(e) \geq f(e) \\ 0 & \text{si } f'(e) < f(e) \end{cases} \quad , \quad g(\overleftarrow{e}) = \begin{cases} 0 & \text{si } f'(e) \geq f(e) \\ f(e) - f'(e) & \text{si } f'(e) < f(e) \end{cases}$$

Entonces:

1. *g es flujo factible en N^f.*
2. *$f' = f + \bar{g}$.*
3. *$\text{valor}(g) = \text{valor}(f') - \text{valor}(f)$.*

2.1. Consecuencias

Sea f un $s - t$ flujo factible en N y OPT valor de flujo máximo, entonces:

1. f es máximo $\iff$ el unico flujo factible en N^f es $g \equiv 0$.
2. f no es máximo $\iff$ existe flujo factible en N^f de valor OPT $-$ valor$(f) > 0$.

Definición 6 (Camino aumentante)**.** Decimos que un $s - t$ camino P en N^f es camino aumentante si $\text{cap}^f(P) = \min_{e \in E} u^f(e) > 0$.

Con lo anterior tenemos que:

1. f es máximo $\iff$ no existe camino aumentante.
2. f no es máximo $\iff$ existe camino aumentante de valor OPT $-$ valor$(f) > 0$.

Teorema 3 (Dualidad fuerte)**.** *Sea N una red. Entonces,*

$$\max\{\text{valor}(f) : f \ s - t \text{ flujo factible}\} = \min\{\text{cap}(X) : X \ s - t \text{ corte}\}$$

- **Demostración:** Notemos que a priori no tenemos derecho de escribir $\max\{\text{valor}(f) : f \ s - t \text{ flujo factible}\}$ ya que hay infinitos flujos, sin embargo, el problema de encontrar un $s - t$ flujo factible que maximice valor(f) es un programa lineal con un conjunto factible acotado no vacío, luego existe solución. Por otro lado, como hay una cantidad finita de $s - t$ cortes posibles, entonces el $\min\{\text{cap}(X) : X \ s - t \text{ corte}\}$ siempre se alcanza.

  Sea f flujo máximo (por ejemplo, la solución del PL), luego no existe camino aumentante en N^f. Definamos $X := \{v \in V : \exists s - v \text{ camino } P \text{ usando arcos de } N^f \text{ con capacidad } u^f \text{ positiva}\}$. Como todos los arcos que salen de X tienen capacidad residual $u^f = 0$, entonces $\text{cap}_{N^f}(X) = u^f(\delta^+_{E \cup \overleftarrow{E}}(X)) = 0$. Por otro lado, notemos que:

$$\begin{aligned} u^f(\delta^+_{E \cup \overleftarrow{E}}(X)) &= u^f(\delta^+_{E \cup \overleftarrow{E}}(X) \cap E) + u^f(\delta^+_{E \cup \overleftarrow{E}}(X) \cap \overleftarrow{E}) \\ &= [u(\delta^+_E(X)) - f(\delta^+_E(X))] + [f(\delta^-_E(X))]. \end{aligned}$$

  De esta forma, $\text{cap}_N(X) = u(\delta^+_E(X)) = f(\delta^+_E(X)) - f(\delta^-_E(X)) = f^{\text{out}}(X) = \text{valor}(f)$, donde la última igualdad se tiene pues X es $s - t$ corte.

2.2. Algoritmo de Ford-Fulkerson (No polinomial)

Algoritmo 1: Ford, Fulkerson (1956)

Entrada: Red $N = (G, u, s, t)$
$f : E \to \mathbb{R}, f \leftarrow 0$;
Construir N^f;
mientras *Existe camino aumentante en* N^f **hacer**
  Elegir cualquier camino aumentante P;
  $f \leftarrow f + \chi^P \mathrm{cap}^f(P)$;
  Recalcular N^f;
fin
devolver f;

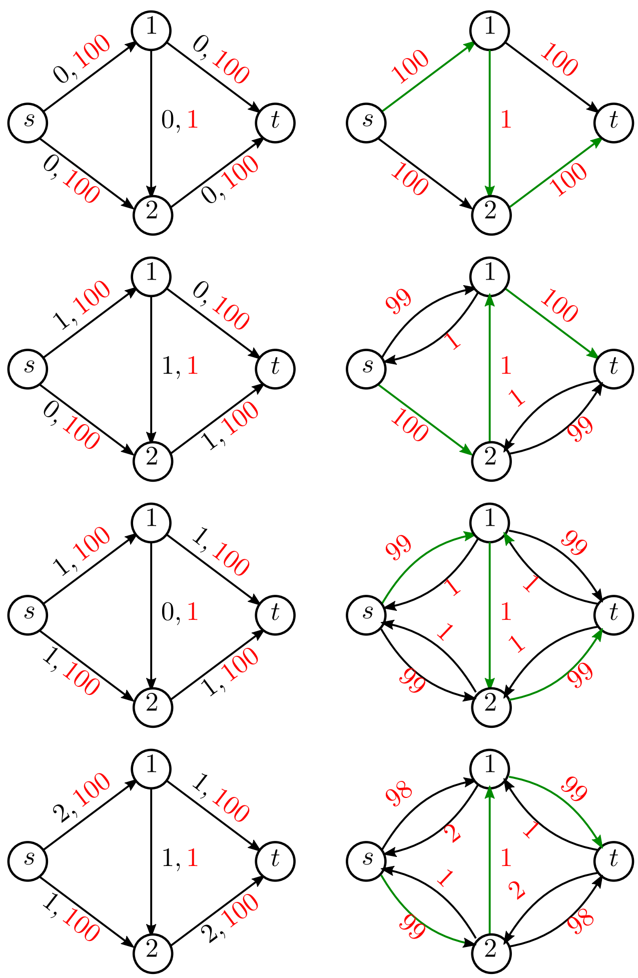


Figura 3: Ejemplo de 4 iteraciones del algoritmo.

El algoritmo de Ford-Fulkerson si termina, entrega un flujo factible de valor máximo debido a todo lo anterior visto.

Si las capacidades son números enteros, entonces el algoritmo termina en $O(\text{OPT})$ iteraciones, luego su complejidad total es $O((m+n)\text{OPT})$, pero como OPT no es polinomial en la entrada, entonces el algoritmo tampoco es polinomial.

Si las capacidades son números racionales, entonces basta multiplicar las capacidades por el mínimo común múltiplo y obtenemos un problema equivalente con capacidades enteras.

Por último, si las capacidades son números irracionales se puede probar que el algoritmo puede no terminar. Peor aún, puede darse el caso de que ni siquiera converja a OPT, es decir, si $(f_n)_n$ es una sucesión de flujos factibles, entonces puede suceder que $\text{valor}(f_n) \nearrow \alpha < \text{OPT}$.

De esta forma, el algoritmo de Ford-Fulkerson no es tan bueno, pero se puede mejorar. Edmonds-Karp propusieron en 1972 dos variantes del algoritmo Ford-Fulkerson que son polinomiales para enteros.

1. EK1: Aumentar por el camino aumentante de mayor capacidad residual. El problema de esta variante es que el número de iteraciones depende de la cantidad de números escritos, haciéndolo polinomial pero no fuertemente polinomial.
2. EK2: Aumentar por el camino aumentante con menor número de arcos. Veremos que esta variante sí es fuertemente polinomial.