$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad t \in I \text{ c.t.p.}; \qquad x(0) = x_0 \tag{5.1}$$

$f : I \times V \times \Omega \to V$ continuamente diferenciable

$V \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos, $\mathcal{A} \subseteq L^\infty_{Loc}(I; \mathbb{R}^m)$.

$u(\cdot) \longrightarrow \exists! \; x(\cdot) = X(\cdot\,; u, x_0)$

con (x, J) solución maximal $(J \subseteq I)$

s.p.g. $J = [0, t(u, x_0))$

$t(u) := t(u, x_0)$

$$\mathcal{A}_T := \{u(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^m);\ t(u) > T\}$$

función de entrada-salida $E_T : \mathcal{A}_T \to \mathbb{R}^n$ definida por la asignación

$$u(\cdot) \mapsto E_T(u(\cdot)) = x(T),$$

1) $Acc(x_0, T) = E_T(\mathcal{A}_T)$

2) $\mathcal{A}_T \subsetneq L^\infty$: $\quad \dot{x}(t) = x(t)^2 + u(t) \quad t \in [0, T]; \qquad x(0) = 0$

$u(\cdot) \equiv 1$ $\quad x(t) = tg(t) \Rightarrow x(0) = tg(0) = 0$

$\dot{x}(t) = \sec^2(t) = x^2(t) + 1 = \dfrac{sen^2 t + cos^2 t}{cos^2 t} = \sec^2 t$ //

$\forall T > \pi/2 \Rightarrow \mathcal{A}_T \subsetneq L^\infty$

Proposición 5.4.

1. *$\mathcal{A}_T$ es un abierto de $L^\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$.*

2. *E_T es de clase C^p si f lo es.*

3. *El diferencial de E_T en un punto $u(\cdot) \in \mathcal{A}_T$ está dado por $DE_T(u(\cdot))[v(\cdot)] = y(T)$ donde $y(\cdot)$ es la solución del sistema linealizado*

$$y(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t) \quad t \in [0,T] \text{ c.t.p.} \qquad y(0) = 0 \tag{5.3}$$

con $A(t) := \nabla_x f(t, x(t), u(t))$ y $B(t) := \nabla_u f(t, x(t), u(t))$. Es decir, para cada $v(\cdot) \in L^\infty([0,T];\mathbb{R}^m)$ tenemos que

$$DE_T(u(\cdot))[v(\cdot)] = Y(T)\int_0^T Y(s)^{-1}B(s)v(s)\,\mathrm{d}s$$ ✓

donde $Y(\cdot)$ es la resolvente del sistema $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$.

4. *Si (5.1) es afín en $u(\cdot)$, es decir la dinámica es de la forma*

$$f(t,x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x),$$

entonces E_T también es derivable en $L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$ (y su dominio es un abierto de este espacio).

DEM) Ver Trélat, Sontag //

Definición 5.5. *Diremos que un control $u(\cdot) \in \mathcal{A}_T$ es* singular *si $DE_T(u(\cdot))$ no es sobreyectiva, y en caso contrario diremos que $u(\cdot)$ es* regular.

$u(\cdot)$ regular $\Longleftrightarrow$ sist. linealizado (5.3) es controlable (en $[0,T]$)

Proposición 5.6. *Si $u(\cdot)$ es un control regular, entonces E_T es una aplicación abierta en una vecindad de $u(\cdot)$.*

DEM) Sea $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ base canónica

$\Rightarrow \exists\, v_1(\cdot), \dots, v_n(\cdot) \subseteq L^\infty$ t.q. $DE_T(u(\cdot))v_i = e_i$

Defino $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\mathcal{U}$ vec. de $\lambda = 0$ en $\mathbb{R}^n$

$$\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mapsto \varphi(\lambda) = E_T\left(u(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(\cdot)\right)$$

$\varphi \in C^1 \quad \wedge \quad D\varphi(0) = [DE_T(u(\cdot))v_1 | \dots | DE_T(u(\cdot))v_n]$
$= I_n$

T.F. Invertible $\Rightarrow$ $\varphi : \underset{\cap}{\mathcal{V}} \to \mathcal{W}$ difeomorfismo
$\mathcal{U}$

para ciertos abiertos $\mathcal{V}, \mathcal{W}$

¿E_T es abierta en $\mathcal{N}$ vec. de $u(\cdot)$?

S.p.g. $E_T(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{W}$

Sea $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{N}$ arbitrario y sea $\underset{}{\tilde{\mathcal{N}}} \subseteq \mathcal{N}$ vec. de $\tilde{u}(\cdot)$

Pdq) $E_T(\tilde{\mathcal{N}})$ abierto

Sea $x_f \in E_T(\tilde{N})$ arbitrario

es decir, $\exists\, \bar{u}(\cdot) \in \tilde{N}$ t.q. $E_T(\bar{u}(\cdot)) = x_f$

$E_T(\tilde{N}) \underset{\tilde{N} \subseteq N}{\subset} E_T(N) \subseteq \mathcal{W} = \varphi(\mathcal{V})$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \wedge \tilde{\lambda} \in B(0,\delta)$ (abierta)

t.q. $\varphi(\tilde{\lambda}) = x_f$ y $\varphi(B(0,\delta))$ abierto $\subseteq \mathcal{W}$

Definimos

$$\tilde{\mathcal{V}} := \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in B(0,\delta) \;:\; \overbrace{u(\cdot) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(\cdot)}^{L(\lambda)} \subseteq \tilde{N} \right\},$$

$= B(0,1) \cap \underline{L^{-1}(\tilde{N})}$ abierto

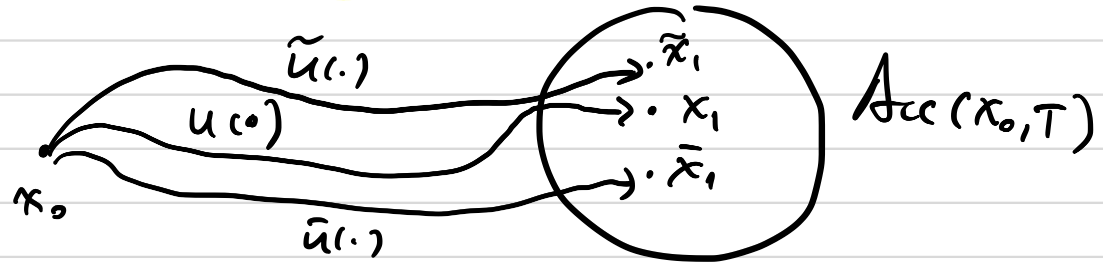
$\Rightarrow \varphi(\tilde{\mathcal{V}})$ abierto t.q. $x_f \in \varphi(\tilde{\mathcal{V}})$

y $\varphi(\tilde{\mathcal{V}}) \subseteq E_T(\tilde{N})$ $\quad \left(\overset{\Uparrow}{\bar{u}(\cdot)} = u(\cdot) + \sum \tilde{\lambda}_i v_i(\cdot) \right)$

x_f arbitrario $\Rightarrow E_T(\tilde{N})$ abierto

$\tilde{u}(\cdot)$ arbitrario en $N \Rightarrow E_T(\cdot)$ abierta en N $\blacksquare$

Definición 5.7. *Sea $x_1 \in \mathrm{Acc}(x_0, T)$ accesible mediante una trayectoria $x(\cdot)$ asociada a un control $u(\cdot)$. Diremos que* (5.1) *es* locamente controlable en torno a x_1 *(o a lo largo de la trayectoria $x(\cdot)$) si $x_1 \in \operatorname{int} \mathrm{Acc}(x_0, T)$.*



$u(\cdot)$ regular $\iff DE_T(u(\cdot))$ sobreyectiva

$\iff$ sist. linealizado es controlable (en $[0,T]$)

$\implies \exists\, \mathcal{V}$ vec. de $u(\cdot)$ t.q. $E_T(\mathcal{V})$ abierto ($\subseteq \mathrm{Acc}(x_0,T)$)

$\implies$ sist. (5.1) es local% controlable //

Teorema 5.8. *Sea $x_1 \in \mathrm{Acc}(x_0, T)$. Si el sistema linealizado* (5.3) *(en torno a la trayectoria y el control asociados a x_1) es controlable, entonces* (5.1) *es localmente controlable en torno a x_1. En particular, si el sistema controlado* (5.1) *es autónomo, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $u_1 \in \mathbb{R}^m$ son tales que $f(x_1, u_1) = 0$ y las matrices $A = \nabla_x f(x_1, u_1)$, $B = \nabla_u f(x_1, u_1)$ satisfacen la condición de Kalman, entonces tenemos que* (5.1) *es localmente controlable en torno a x_1.*

(*) $\dot{x} = f(x,u)$; $x(0) = x_1$ $\qquad f(x_1, u_1) = 0$

$\implies x(t) = x_1 \ \forall t$ a condición $u(\cdot) \equiv u_1$

Kalman$(A,B) \implies$ sist. linealizado es controlable

Primera parte $\implies$ (*) es loc. % controlable en x_1 //

Observación 5.9.

1. *En general, la controlabilidad local en torno a un punto accesible x_1 no implica que su control asociado sea regular. Por ejemplo, para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, el sistema*

$$\dot{x}(t) = u(t)^3 \quad t \in [0,T]; \qquad x(0) = x_0$$

es tal que el control $u(\cdot) \equiv 0$ es singular (pues, con la notación de la Proposición 5.4 parte 2, tenemos que $A(\cdot) \equiv B(\cdot) \equiv 0$). Sin embargo, para cada $T > 0$ ocurre que $x_0 \in \operatorname{int} \operatorname{Acc}(x_0, T)$. Luego, el sistema anterior es localmente controlable en torno a x_0.

2. *Si $u(\cdot)$ es singular en $[0,T]$, entonces también lo es en $[0,t]$ para cada $t \in [0,T]$.*

1) $u \equiv 0 \Rightarrow A \equiv 0 \quad B \equiv 2u^2 \equiv 0$

no es controlable $\Rightarrow [u(\cdot) \equiv 0$ es singular$]$

$x(t; u(\cdot) \equiv 0, x_0) = x_0 \quad \forall t$

pero $x_0 \in \operatorname{int} \operatorname{Acc}(x_0, T) \quad \forall T \Leftrightarrow$ local. controlable

//

2) Por contrarrecíproco:

$u(\cdot)$ regular en $[0,t]$ con $t \in [0,T) \Rightarrow$ lo es para $[0,T]$

$$DE_t(u(\cdot))v(\cdot) = \mathcal{Y}(t)\int_0^t \mathcal{Y}^{-1}(s) B(s) v(s)\, ds$$

$$= \mathcal{Y}(t)\int_0^T \mathcal{Y}^{-1}(s) B(s) \bar{v}(s)\, ds$$

con $\bar{v}(s) = \begin{cases} v(s) & s \in [0,t] \\ 0 & s \in (t,T] \end{cases}$

//