DEFINICIÓN DE GRADO PARA TRANSFORMACIONES DE $D \subseteq \mathbb{R}^n$ A $\mathbb{R}^n$

D ABIERTO, ACOTADO EN $\mathbb{R}^n$

$\phi \in C^1(D;\mathbb{R}^n) \wedge C(\bar{D};\mathbb{R}^n)$

$Z \subseteq D$ LOS PUNTOS CRÍTICOS DE ϕ

$J_\phi(x)$ EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ $\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial x_l}\right)_{k,l=1\dots n}$

p VALOR REGULAR DE ϕ SI

$$\phi^{-1}(p) \cap Z = \emptyset$$

DEFINIMOS

$$\deg(\phi, D, p) = \sum_{x \in \phi^{-1}(p)} \operatorname{sign} J_\phi(x)$$

¿QUÉ PASA SI $\phi^{-1}(p) \cap Z \neq \emptyset$?

APROXIMAR p CON q TALES QUE

$$\phi^{-1}(q) \cap Z = \emptyset$$

$$\deg(\phi, D, p) = \lim_{q \to p} \deg(\phi, D, q)$$

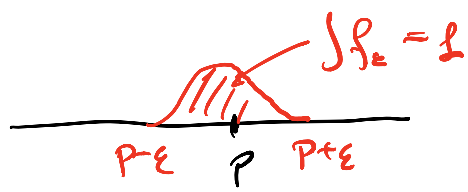
CONSIDERAMOS p, $\phi^{-1}(p) \cap Z = \emptyset$

SEA $\{f_\varepsilon\}$ UNA FAMILIA DE FUNCIONES CONTINUAS TALES QUE:

$$f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(1) $$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)\,dx = 1$$

(2) $$\operatorname{supp} f_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(p)} = K_\varepsilon$$



CONSIDERAMOS:

$$I_\varepsilon = \int_D f_\varepsilon(\phi(x))\, J_\phi(x)\,dx$$

AFIRMACIÓN:

$$I_\varepsilon = \deg(\phi, D, p), \quad \varepsilon \text{ PEQUEÑO}$$

DEMOSTRACIÓN

SEAN $\{x_1 \ldots x_N\} = \phi^{-1}(p)$, $x_j \in D$

SI ε PEQUEÑO $\Rightarrow \exists A_{\varepsilon j}$ ABIERTOS

$x_j \in A_{\varepsilon j}$, $j = 1 \ldots N$

$$\phi : A_{\varepsilon_j} \longrightarrow K_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(p)}$$

ES UN DIFEOMORFISMO. $(J_\phi(x_j) \neq 0)$

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon(\phi(x)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} A_{\varepsilon_j}$$

$$I_\varepsilon = \int_D f_\varepsilon(\phi(x)) J_\phi(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{A_{\varepsilon_j}} f_\varepsilon(\phi(x)) J_\phi(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sign} J_\phi(x_j) \int_{A_{\varepsilon_j}} f_\varepsilon(\phi(x)) |J_\phi(x)|\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sign} J_\phi(x_j) \int_{K_\varepsilon} f_\varepsilon(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sign} J_\phi(x_j) = \deg(\phi, D, p)$$

<u>UNOS LEMAS CAA</u>

<u>LEMA 1</u>

SEA v UN CAMPO VECTORIAL CLASE C^1 DE SOPORTE COMPACTO. ENTONCES

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} v = 0$$

SUPONDREMOS $\phi \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$

$v = (v^1, \dots, v^n)$, $\operatorname{div} v = f$,

$\operatorname{supp} f = K$ COMPACTO

LEMA 2

SI $K \cap \phi(\partial D) = \emptyset$ ENTONCES EXISTE UN CAMPO VECTORIAL $u \in C^1(D)$, $\operatorname{supp} u \subseteq D$ TAL QUE:

$\operatorname{div} u = g$ DONDE:

$$g(x) = f(\phi(x)) J_\phi(x)$$

DEMOSTRACIÓN

$$\left(\frac{\partial \phi^k}{\partial x_l}\right)_{k,l} = J$$

$a^{kl}(x)$ DETERMINANTE DEL MENOR DE LA MATRIZ J OBTENIDO ELIMINANDO LA FILA Y LA COLUMNA DE $\frac{\partial \phi^k}{\partial x_l}$

DEFINIMOS:

$$u^i(x) = \sum_j v^j(\phi(x)) a^{ji}(x)$$

$(\operatorname{div} v = f)$

$u \in C^1(D)$ ($\text{USAR } \phi \in C^2$)

BASTA PROBAR

$$\operatorname{div} u = g$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_i} = \sum_{k,j} \frac{\partial v^j}{\partial x_k}(\phi(x)) \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} a^{ij}(x)$$

$$+ \sum_j v^j(\phi(x)) \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_i}(x)$$

$$(*)\begin{cases} \operatorname{div} u = \operatorname{div} v \, J_\phi(x) \\ \quad + \sum_{i,j} v^j(\phi(x)) \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_i} \\ = g(x) + \sum_j v^j(\phi(x)) \sum_i \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_i} \end{cases}$$

EJERCICIO 1

LLENAR DETALLES DE $(*)$ Y DEMOSTRAR

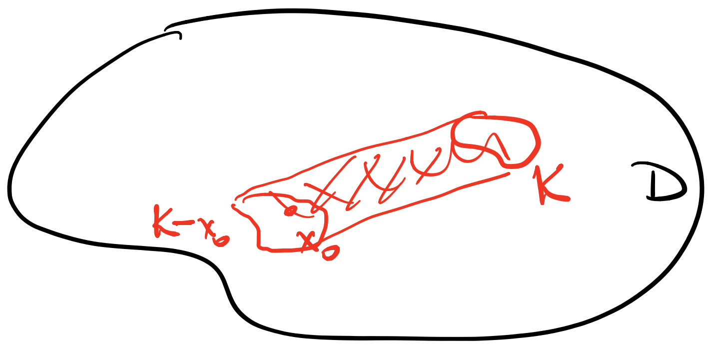
$$\sum_j v^j(\phi(x)) \sum_i \frac{\partial a^{ij}}{\partial x_i} = 0$$

LEMA 3

SEA $f \in C(\bar{D})$, $\operatorname{supp} f = K \subseteq D$.
SEA x_0 TAL QUE EL ENVOLVENTE CONEXO DE $K \cup (K - x_0) \subseteq D$,
ENTONCES EXISTE UN $v \in C^1(D)$,
$v = (v^1, \dots, v^n)$ TAL QUE:

$$\operatorname{div} v = f(x) - f(x + x_0)$$

DEMOSTRACIÓN



SEA $\phi = f(x) - f(x + x_0)$. DEFINIMOS

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} \phi(x + t x_0)\, dt$$

$$v^i(x) = x_{0i}\, \Phi(x), \quad x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$$

EJERCICIO 2 TERMINAR LA DEMOSTRACIÓN DE LEMA 3.

COROLARIO

SEA $x(s)$ UNA CURVA CONTINUA EN $\mathbb{R}^n$

f COMO EN EL LEMA ANTERIOR, $\operatorname{supp} f = K$,

$K \subseteq M$ CONVEXO, $M \cap \partial D = \emptyset$ Y

$M - x(s) \cap \partial D = \emptyset$. ENTONCES

$$f(x+x_0) - f(x + x(1)) = \operatorname{div} v$$

PARA CIERTO v, $\operatorname{supp} v \subseteq D$.

EJERCICIO 3 DEMOSTRAR EL COROLARIO.

LEMA

SEA $\phi \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$. SEAN

$p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial D)$ TALES QUE

$\phi^{-1}(p_1) \cap Z = \phi^{-1}(p_2) \cap Z = \emptyset$.

SI p_1 Y p_2 ESTAN EN EL MISMO COMPONENTE CONEXO DE $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial D)$ ENTONCES:

$$\deg(\phi, D, p_1) = \deg(\phi, D, p_2)$$

DEMOSTRACIÓN

$\phi^{-1}(p) \cap Z = \emptyset \Rightarrow$

$$deg(\phi, D, p) = \int f_\varepsilon(\phi(x)) J_\phi(x) dx$$

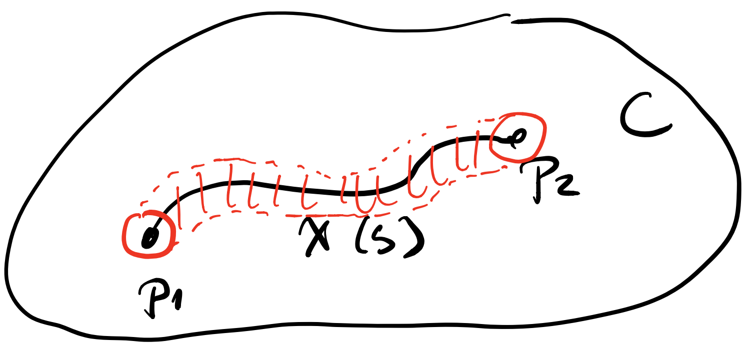
AHORA EXISTE UNA CURVA CONTINUA $x(s)$ DENTRO DEL COMPONENTE C DE $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial D)$ QUE CONTIENE p_1, p_2 TAL QUE

$$\tilde{x}(0) = 0 \quad , \quad \tilde{x}(1) = p_2 - p_1$$

$$x(s) = \tilde{x}(s) + p_1 \subseteq C \quad , \quad s \in [0,1]$$

ADEMAS EXISTE UN ε TAL QUE

$$B_\varepsilon(p_1) + \tilde{x}(s) \cap \phi(\partial D) = \emptyset$$



EL COROLARIO DE LEMA 3

$$f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x + p_2 - p_1) = \operatorname{div} v$$

LEMA 2 $\Rightarrow$

$$f_\varepsilon(\phi(x)) J_\phi(x) - f_\varepsilon(\phi(x) + p_2 - p_1) J_\phi(x)$$

$= \operatorname{div} u$

$\Rightarrow$ (LEMA 1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} u = 0$

$$\int_D f_\varepsilon(\phi(x)) J_\phi(x)\,dx = \deg(\phi, D, p_1)$$

$$= \int_D f_\varepsilon(\phi(x) + p_2 - p_1) J_\phi(x)\,dx$$

$$g_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x + p_2 - p_1)$$

$$= \int_D g_\varepsilon(\phi(x)) J_\phi(x)\,dx = \deg(\phi, D, p_2)$$

EJERCICIO 4:

DEMOSTRAR QUE SI $\phi \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$

$\phi^{-1}(p) \cap Z \neq \emptyset$ ENTONCES

PARA TODA SUCESIÓN $\{q_n\}$, $q_n \to p$

$\phi^{-1}(q_n) \cap Z = \emptyset$ TENEMOS:

$$\lim_{n\to\infty} \deg(\phi, D, q_n) \text{ EXISTE}$$

Y NO DEPENDE $\{q_n\}$.

LEMA

SEA $\phi \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$. ENTONCES SI $p \notin \phi(\partial D)$, $\phi^{-1}(p) \cap Z = \emptyset$ EXISTE UNA VECINDAD $\mathcal{U}$ DE ϕ EN LA TOPOLOGIA DE C^1 TAL QUE:

$$\deg(p, \phi, D) = \deg(p, \psi, D), \quad \forall \psi \in \mathcal{U}$$

EJERCICIO 5 DEMOSTRAR EL LEMA SUPONIENDO ADICIONALMENTE

$$\phi^{-1}(p) = \{x\} \quad \text{(ES UN SINGLETON)}$$

COROLARIO

SI $\phi \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, SI $p, q \notin \phi(\partial D)$ $p, q \notin \phi(Z)$ Y ESTAN EN EL MISMO COMPONENTE DE $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial D)$ ENTONCES

$$\deg(\phi, D, p) = \deg(\phi, D, q)$$

EJERCICIO 6 DEMOSTRAR EL COROLARIO USANDO EL LEMA ANTERIOR.

GRADO DE UNA FUNCIÓN CONTINUA

DEFINICIÓN

SEA $\phi \in C(\bar{D})$, $\{\phi_n\}$ UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES CLASE C^1 CONVERGENTE UNIFORMEMENTE A ϕ. ENTONCES PARA $\forall p$, $p \notin \phi(\partial D)$ LA SUCESIÓN

$\deg(\phi_n, D, p)$ ESTÁ BIEN DEFINIDA

PARA $n > N$ Y ADEMÁS

$\lim_{n\to\infty} \deg(\phi_n, D, p)$ EXISTE Y NO

DEPENDE DE LA SUCESIÓN.

DEFINIMOS:

$$\lim_{n\to\infty} \deg(\phi_n, D, p) = \deg(\phi, D, p)$$

EJERCICIO 7 SEA $\{\phi_t\}$ UNA FAMILIA DE TRANSFORMACIONES CLASE C^1 CONTINUA EN t EN LA TOPOLOGÍA DE C^1, $0 \leq t \leq 1$. SI $p \notin \phi_t(\partial D)$ ENTONCES:

$$\deg(\phi_0, D, p) = \deg(\phi_1, D, p)$$

EJERCICIO 8 LA FUNCION,

$$\phi \longmapsto \deg(\phi, D, p) \quad (p \notin \phi(\partial D))$$

ES CONTINUA EN LA TOPOLOGIA UNIFORME

(LA TOPOLOGIA DE $\mathbb{C}$)

EJERCICIO 9 (GRADO ES INVARIANTE DE HOMOTOPIA)

SI $\{\phi_t\}$, $0 \leq t \leq 1$ ES UNA

FAMILIA EN $C(\overline{D})$ CONTINUA EN t

EN LA TOPOLOGIA UNIFORME, $p \notin \phi_t(\partial D)$

$$\Rightarrow \deg(\phi_0, D, p) = \deg(\phi_1, D, p)$$