TEOREMA (RABINOWITZ)

(1) $A \in \mathcal{L}(X, X)$ COMPACTO, $T \in C^1(X, X)$ COMPACTO, $T(0) = DT(0) = 0$,

$S_\lambda(u) = u - \lambda A u - T(u)$. $\quad (S_\lambda(0) = 0)$

(2) λ^* UN VALOR CARACTERÍSTICO DE A DE MULTIPLICIDAD IMPAR

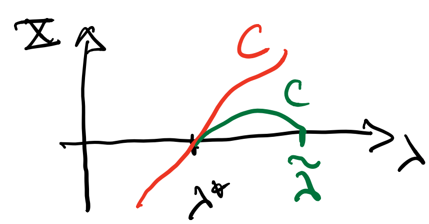
(3) C UN COMPONENTE DE $\overline{\Sigma}$ QUE CONTIENE A $(\lambda^*, 0)$.

ENTONCES O:

(a) C NO ES ACOTADO EN $\mathbb{R} \times X$

O BIEN

(b) $\exists \tilde{\lambda} \in r(A) \setminus \{\lambda^*\}$ TAL QUE $(\tilde{\lambda}, 0) \in C$



DEMOSTRACIÓN

LEMA

SEA C COMO EN (3). SUPONGAMOS QUE C ES ACOTADO Y NO CONTIENE NINGÚN $\lambda \in r(A) / \{\lambda^*\}$, $\lambda \neq \lambda^*$. ENTONCES EXISTE UN CONJUNTO ABIERTO, ACOTADO $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times X$ TAL QUE

(i) $C \subseteq \mathcal{O}$

(ii) $\partial \mathcal{O} \cap \overline{\Sigma} = \emptyset$

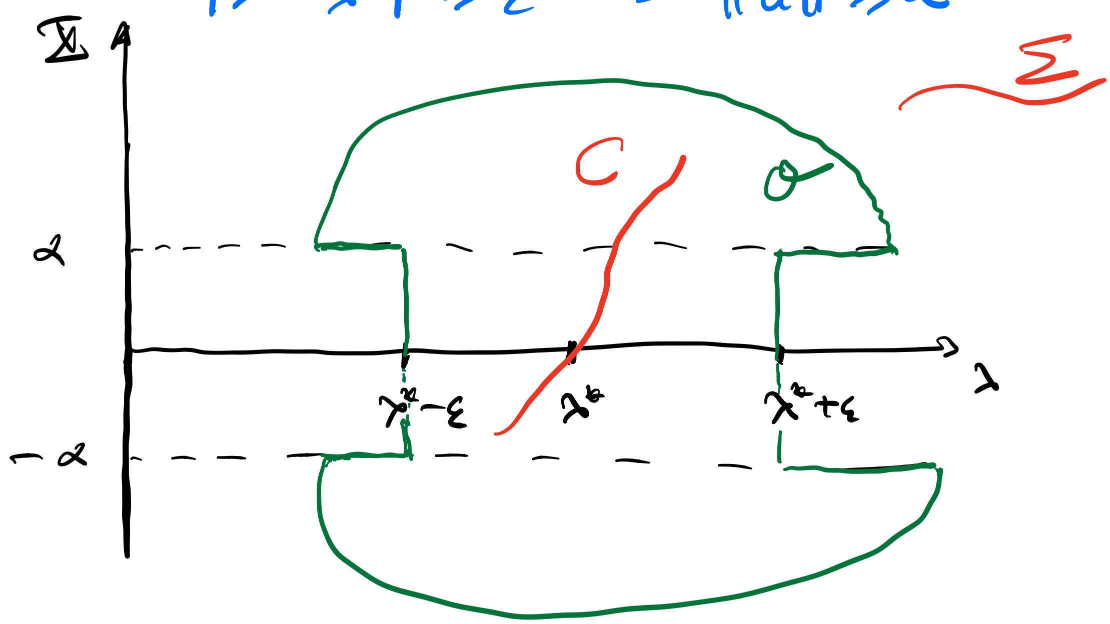
(iii) $\mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\lambda^* - \varepsilon, \lambda^* + \varepsilon)$

DONDE $\varepsilon \in (0, \delta)$

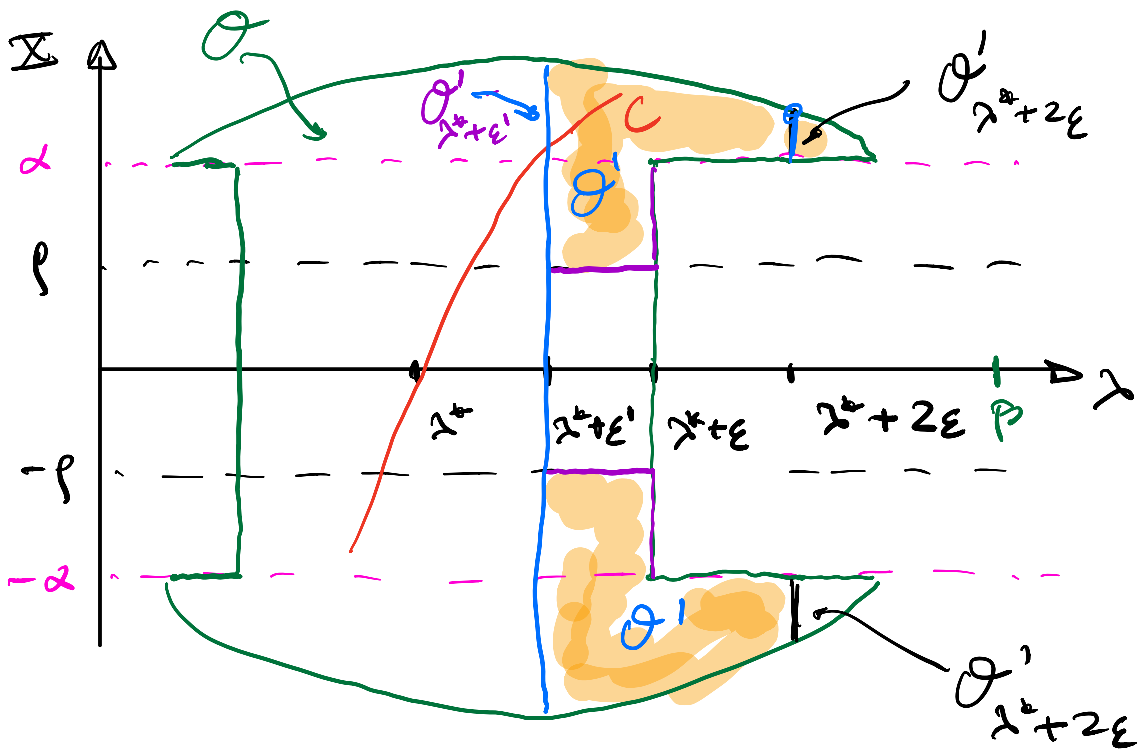
$\delta = dist(C, (\sigma(A) \setminus \{\lambda^*\}) \times \{0\})$

(iv) $\exists\, \alpha > 0$ TAL QUE SI $(\lambda, u) \in \mathcal{O}$

$|\lambda - \lambda^*| \geq \varepsilon \Rightarrow \|u\| \geq \alpha$



DEMOSTRACIÓN (DEL TEOREMA DE RABINOWITZ)



1. TOMAMOS UN β TAL QUE $\mathcal{O}_\beta$

$$\mathcal{O}_\beta = \{(\lambda, u) \mid \lambda = \beta, u \in \mathcal{O}\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_\beta = \emptyset.$$

CONSIDERAMOS $J = [\lambda^* + 2\varepsilon, \beta]$

SUPONGAMOS

$$r(A) \cap (\lambda^*, \lambda^* + 2\varepsilon) = \emptyset$$

USANDO LA PROPIEDAD (iv) DEL LEMA

$$\mathcal{O}_\lambda \cap B_\alpha = \emptyset \ , \ \lambda \in J$$

$B_\alpha = \{ \|u\| < \alpha \}$

$\Rightarrow S_\lambda(u) \neq 0$ PARA $u \in \partial\mathcal{O}_\lambda$

$\lambda \in J$

$\Rightarrow \deg(S_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, 0) = \text{CONST}, \lambda \in J$

$\mathcal{O}_\beta = \phi \Rightarrow \deg(S_\beta, \mathcal{O}_\beta, 0) = 0$

$= \deg(S_{\lambda^*+2\varepsilon}, \mathcal{O}_{\lambda^*+2\varepsilon}, 0)$

2. SEA $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$, $J' = [\lambda^*+\varepsilon', \lambda^*+2\varepsilon]$

$J' \cap r(A) = \phi$, $C \cap (J' \times \Sigma)$ ES

COMPACTO $\Rightarrow \exists \rho_0 > 0$, $\rho_0 \leq \alpha$

TAL QUE

$\Sigma \cap (J' \times \overline{B}_\rho) = \phi$, $0 < \rho < \rho_0$

ENTONCES S_λ ES ADMISIBLE EN

$\mathcal{O}'_\lambda = \mathcal{O} \cap (\{\lambda\} \times (\Sigma \setminus \overline{B}_\rho))$,

$\lambda \in J'$

$$\deg(S_{\lambda^*+\varepsilon'}, \mathcal{O}'_{\lambda^*+\varepsilon'}, 0)$$

$$= \deg(S_{\lambda^*+2\varepsilon}, \mathcal{O}'_{\lambda^*+2\varepsilon}, 0) = 0$$

AHORA

$$\mathcal{O}'_{\lambda^*+\varepsilon'} = \mathcal{O}_{\lambda^*+\varepsilon'} \setminus \overline{B_\rho}$$

$$\mathcal{O}'_{\lambda^*+2\varepsilon} = \mathcal{O}_{\lambda^*+2\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \deg(S_{\lambda^*+\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\lambda^*+\varepsilon'}, 0) = 0$$

$$\forall \rho \in (0, \rho_0)$$

$$\deg(S_{\lambda^*+\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\lambda^*+\varepsilon'}, 0) =$$

$$\deg(S_{\lambda^*+\varepsilon'}, B_\rho, 0), \quad \rho \in (0, \rho_0)$$

DE LA MISMA FORMA SE DEMUESTRA

$$\deg(S_{\lambda^*-\varepsilon'}, \mathcal{O}_{\lambda^*-\varepsilon'}, 0)$$

$$= \deg(S_{\lambda^*-\varepsilon'}, B_\rho, 0)$$

3. USAR LA INVARIANCIA DE GRADO RESPECTO A LA HOMOTOPIA

$$\deg(S_{\lambda^*-\varepsilon'}, B_\rho, 0) = \deg(S_{\lambda^*+\varepsilon'}, B_\rho, 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ i(S_{\lambda^*-\varepsilon'}, 0) & & i(S_{\lambda^*+\varepsilon'}, 0) \\ \| & & \| \\ (-1)^{b} & = & (-1)^{b'} \end{array}$$

POR OTRO LADO LA MULTIPLICIDAD DE λ^* ES IMPAR $\Rightarrow$

$b = \#\{$ VALORES. CARACT DE $A < \lambda^* - \varepsilon'\}$

$b' = \#\{$ —— " —— DE $A < \lambda^* + \varepsilon'\}$

$b' - b =$ MULTIPLICIDAD DE λ^*

$=$ IMPAR

$$(-1)^{b} = (-1)^{b'} = (-1)^{b}(-1)^{b'-b}$$
$$= -(-1)^{b}$$

CONTRADICCIÓN.