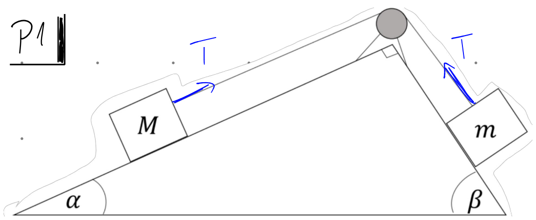
Pauta Aux #6

P1

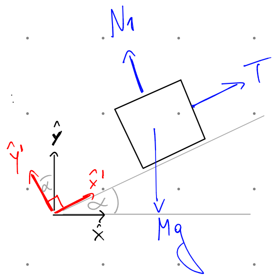


$\rightsquigarrow$ $M > m$ y $\alpha < \beta$

- sentido del movimiento
- aceleración de los bloques
- tensión de la cuerda

$\rightsquigarrow$ Realicemos los diagramas de cuerpo libre para cada masa:

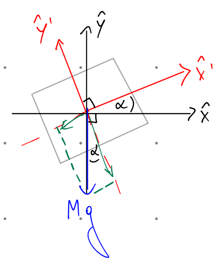
• M:



$\rightsquigarrow$ Como tenemos un plano inclinado, nos será conveniente definir un sistema de coordenadas solidario a la inclinación.

$\rightsquigarrow$ el "costo" es que la fuerza peso tiene componentes en $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$

Geométricamente tenemos:



así: $\boxed{-Mg\,\hat{y} = -Mg\sin\alpha\,\hat{x}' - Mg\cos\alpha\,\hat{y}'}$

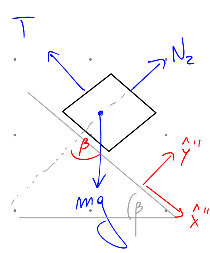
De esta manera nuestra suma de fuerzas queda:

$\hat{x}'|\quad T - Mg\sin\alpha = M\cdot a_M$

$\hat{y}'|\quad N_1 - Mg\cos\alpha = M\cdot \cancel{a_{My'}} = 0$

pues la masa no se levante del plano

• m: de manera análoga

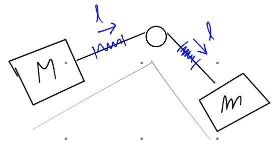


$\hat{x}''|\quad mg\sin\beta - T = m a_m$

$\hat{y}''|\quad N_2 - mg\cos\beta = 0$

Antes de juntar las ecuaciones, ¿cómo se relaciona a_m y a_M?

Para nuestro caso:



si m desciende una distancia l, la cuerda "obligará" a M avanzar una distancia l.

↪ es algo como: $d_M = d_m$ $\rightsquigarrow$ esto también aplicará para la rapidez y la aceleración!

en específico $a_M = a_m$

Llamemos a la aceleración del sistema simplemente $a = a_M = a_m$.

Así:

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}' \quad & T - Mg\sin\alpha = Ma \\ \hat{x}'' \quad & mg\sin\beta - T = ma \end{aligned}\right| \; + \quad g(m\sin\beta - M\sin\alpha) = a(M+m) \Rightarrow \boxed{a = g\,\frac{(m\sin\beta - M\sin\alpha)}{M+m}}$$

Tenemos la aceleración, ¿y el sentido?

Según nuestro sistema de referencia, si $a > 0$ el sistema va hacia la derecha

si $a < 0$ el sistema va hacia la izquierda

luego:

$$a = \frac{g}{M+m}(m\sin\beta - M\sin\alpha) > 0 \quad \text{si} \quad m\sin\beta - M\sin\alpha > 0$$ $\rightsquigarrow$ no es del todo concluyente

↳ el sistema irá a la derecha si cumple $\underbrace{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}} > \underbrace{\frac{M}{m}}$

sabemos que ambos son mayores a 1

↳ y el valor de la tensión:

de $\hat{x}'$ $$T = M(a + g\sin\alpha) = M\left(\frac{g}{M+m}(m\sin\beta - M\sin\alpha) + g\sin\alpha\right)$$

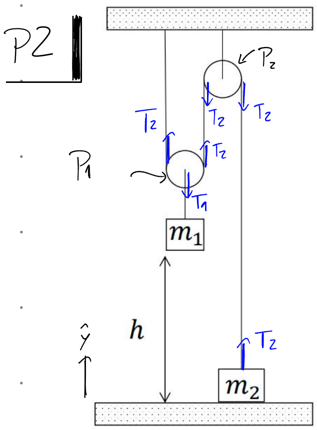
$$= \frac{Mg}{M+m}\left[m\sin\beta - M\sin\alpha + M\sin\alpha + m\sin\alpha\right]$$

$$= \frac{Mmg}{M+m}(\sin\beta + \sin\alpha)$$

de $\hat{x}''$ $$T = m(g\sin\beta - a) = mg\left(\sin\beta - \frac{(m\sin\beta - M\sin\alpha)}{M+m}\right) = \frac{mg}{M+m}\left(M\sin\beta + m\sin\beta - m\sin\beta + M\sin\alpha\right)$$

$$= Mmg/_{M+m}\,(\sin\beta + \sin\alpha)$$ ✓ lo mismo

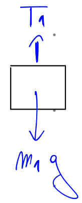
P2



$m_1 = n \cdot m_2$, ¿ a_{m_2} ? ¿ h_{max} que alcanza m_2 ?

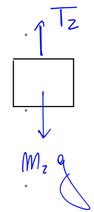
→ Realicemos los diagramas de cuerpo libre para los cuerpos:

• m_1



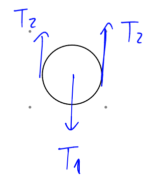
$\hat{y}]$ $m_1 \cdot a_1 = T_1 - m_1 g$ (1)

• m_2:



$\hat{y}]$ $m_2 a_2 = T_2 - m_2 g$ (2)

• P1:



al ser ideal

$\hat{y}]$ $2T_2 - T_1 = \cancel{m_{P1}} \cdot a_{P1} = 0$ (3)

De (3): $T_1 = 2T_2$

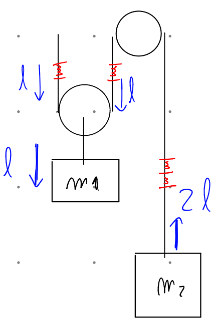
De (1): $T_1 = m_1(a_1 + g) \Rightarrow 2T_2 = m_1(a_1+g)$

De (2): $T_2 = m_2(a_2+g)$

$$T_2 = \frac{m_1}{2}(a_1+g) = m_2(a_2+g) \quad (4)$$

Ahora, dado el sistema, ¿cómo se relaciona a_1 y a_2?

↳ notemos lo siguiente:



→ si m_1 desciende una cantidad l, cada cuerda que sostiene la polea se mueve l también. Esto se traduce en que m_2 subirá $2l$

Este misma relación también se aplicará para la velocidad y para la aceleración, en específico: $a_1 = \frac{a_2}{2}$ → esta relación es para el tamaño de las aceleraciones

↳ Ahora, como m_1 baja: $\vec{a_1} = -a_1 \hat{y}$

como m_2 sube: $\vec{a_2} = +a_2 \hat{y}$

Reemplazando en (4): $\frac{m_1}{2}(-a_1 + g) = m_2(a_2+g) \iff m_1\left(-\frac{a_2}{2} + g\right) = 2m_2(a_2+g)$

Despejando a_2: $a_2\left(\frac{m_1}{2} + 2m_2\right) = g(m_1 - 2m_2) \Rightarrow a_2 = 2g\frac{(m_1-2m_2)}{m_1+4m_2} \overset{m_1 = n m_2}{=} \boxed{2g\frac{(n-2)}{(n+4)}}$

$\rightsquigarrow$ Ahora para calcular la altura máxima de m_2 hay que notar que, cuando m_1 llegue al suelo, m_2 habrá adquirido cierta velocidad que le permite seguir subiendo.

$\rightsquigarrow$ Calculemos el tiempo en que m_1 llega al suelo:

$$y_{m_1}(t^*) = 0 = h + \cancel{v_0}^{\,0} t^* - \frac{1}{2} a_1 \cdot t^{*2} \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = \sqrt{\frac{4h}{a_2}}$$

↳ Como m_1 descendió h, m_2 estará en $2h$ a una velocidad:

$$v(t) = \cancel{v_0}^{\,0} + a_2 \cdot t \Rightarrow v(t^*) = a_2 \sqrt{\frac{4h}{a_2}} = \sqrt{4h\, a_2}$$

Usando Torricelli para calcular cuánto más ascendió:

$$\cancel{v_f}^{\,0\,2} - v_i^2 = 2\, a \cdot d \quad \rightsquigarrow \text{ ahora } a = -g \text{ debido a que ya no acelera por efectos de la masa } m_1$$

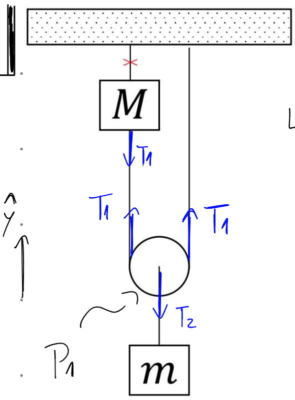
$$\Rightarrow d = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{4ha_2}{2g} = 2\frac{h}{g} a_2$$

$$\text{Así } H_{max} = 2h + d = 2h\left(1 + \frac{a_2}{g}\right) = 2h\left(1 + \frac{2(n-2)}{(n+4)}\right) = \frac{2h}{(n+4)}(n+4+2n-4)$$

$$= \frac{2h}{n+4} \cdot 3n$$

$$\therefore \boxed{H_{max} = \frac{6hn}{n+4}}$$

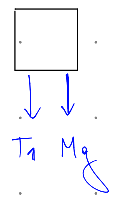
P3

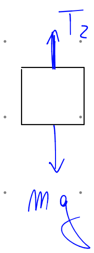


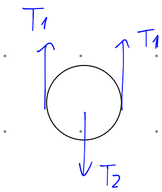
¿ a_M tras cortarse la cuerda?

↳ Intuición: al cortarse la cuerda superior a M, la cuerda inferior tirará a M, aumentando su aceleración de caída

↳ DCL

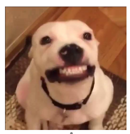
• M: 

• m: 

• P_1: 

$\hat{y}\rfloor\ -T_1 - Mg = M a_M$ (1) $\hat{y}\rfloor\ T_2 - mg = m a_m$ (2) $\hat{y}\rfloor\ 2T_1 - T_2 = 0$ (3)

¿acá me había equivocado

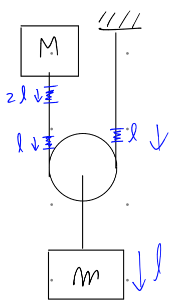
De (3): ~~$T_1 = 2T_2$~~  $\rightarrow T_2 = 2T_1$

De (1): $T_1 = -M(g + a_M) = T_2/2$

De (2): $T_2 = m(g + a_m)$

$\Big\}\ T_2 = -2M(g + a_M) = m(g + a_m)$ (4)

~ ¿Cómo se relaciona a_M y a_m?



Si M desciende 2ℓ, estos se repartirán equitativamente en las cuerdas que sostienen a la polea, haciendo que m descienda ℓ

↳ Como para la aceleración es análogo: $a_M = 2a_m$

Como ambas masas descienden: $\vec{a}_M = -a_M\hat{y}$ $\vec{a}_m = -\frac{a_M}{2}\hat{y}$

Reemplazando en (4): $-2M(g - a_M) = m\left(g - \frac{a_M}{2}\right) \Rightarrow a_M\left(2M + \frac{m}{2}\right) = g(m + 2M)$

$$\therefore\ \boxed{\vec{a}_M = -g\left(\frac{2m + 4M}{m + 4M}\right)\hat{y}}$$

si $M >> m$: $\vec{a}_M = -g\frac{(2 + 4M/m)}{1 + 4M/m}\hat{y} \approx -g\frac{4M/m}{4M/m}\hat{y} = -g\hat{y}$

si $m >> M$: $\vec{a}_M = -2g\hat{y} \rightsquigarrow \vec{a}_m = -g\hat{y}$

¿Tienen sentido estos casos?