

# Apuntes de Mecánica

©Ricardo Muñoz M.<sup>1</sup>

Apuntes para curso FI2001 - 2010/1

<sup>1</sup>*Afiliación:* Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile. Avda. Blanco Encalada 2002, Piso 4. Email: [rmunoz@dgf.uchile.cl](mailto:rmunoz@dgf.uchile.cl)



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>I</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Sistemas de Coordenadas y Cinemática</b>	<b>3</b>
2.1. Vector posición . . . . .	3
2.1.1. Sistema de Referencia . . . . .	4
2.2. Sistemas de Coordenadas . . . . .	4
2.2.1. Coordenadas cartesianas en 2D . . . . .	4
2.2.2. Coordenadas polares . . . . .	5
2.2.3. Coordenadas cartesianas en 3D . . . . .	6
2.2.4. Coordenadas cilíndricas . . . . .	7
2.2.5. Coordenadas esféricas . . . . .	7
2.2.6. Advertencia sobre notación . . . . .	8
2.2.7. Cambios de coordenadas . . . . .	8
2.2.8. Selección del sistema de coordenadas a usar . . . . .	10
2.2.9. Coordenadas intrínsecas . . . . .	11
2.3. Cinemática de la partícula . . . . .	14
2.3.1. Velocidad y Aceleración . . . . .	14
2.3.2. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas intrínsecas . . . . .	15
2.3.3. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas cartesianas . . . . .	16
2.3.4. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas polares . . . . .	16
2.3.5. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas . . . . .	17
2.3.6. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas esféricas . . . . .	17
2.3.7. Un último comentario . . . . .	18
<b>3. Dinámica: Leyes de Newton y Fuerzas</b>	<b>21</b>
3.1. Leyes de Newton . . . . .	21
3.1.1. Primera . . . . .	21
3.1.2. Segunda . . . . .	22
3.1.3. Tercera . . . . .	23
3.2. Fuerzas . . . . .	23
3.2.1. Formas de representar las fuerzas . . . . .	23
3.2.2. Atracción gravitacional y peso . . . . .	24
3.2.3. Resortes . . . . .	25
3.2.4. Fuerzas en fluidos: Roce viscoso y F. de presión . . . . .	26
3.2.5. Fuerzas de Contacto: Normal y Roce . . . . .	27
3.2.6. Cuerdas y barras . . . . .	29
3.2.7. Otras fuerzas . . . . .	32

3.3.	Dos partículas . . . . .	32
3.3.1.	Sistema de dos partículas aisladas y masa reducida . . . . .	32
3.4.	Metodología usual y Ejemplos . . . . .	33
3.4.1.	Pasos típicos de solución . . . . .	33
3.4.2.	Problema de roce estático . . . . .	35
<b>4.</b>	<b>Momento Angular y Torque</b> . . . . .	<b>39</b>
4.1.	Momento Angular . . . . .	40
4.2.	Ecuación del Momento Angular . . . . .	40
4.3.	Torques . . . . .	41
4.3.1.	Torques nulos . . . . .	42
4.4.	Momento angular constante . . . . .	42
4.4.1.	Momento angular parcialmente constante . . . . .	43
4.5.	Ejemplos . . . . .	44
4.5.1.	Ejemplo 1 . . . . .	44
4.5.2.	Ejemplo 2 . . . . .	45
4.5.3.	Ejemplo 3 . . . . .	46
4.5.4.	Ejemplo 4 . . . . .	47
4.5.5.	Ejemplo 5 . . . . .	47
<b>5.</b>	<b>Energía y Trabajo</b> . . . . .	<b>51</b>
5.1.	Energía cinética . . . . .	51
5.2.	Trabajo . . . . .	53
5.2.1.	Trabajo de fuerza constante . . . . .	53
5.2.2.	Trabajo de roce viscoso . . . . .	54
5.2.3.	Trabajo de fuerza de resorte . . . . .	55
5.3.	Fuerzas Conservativas y Energía Potencial . . . . .	56
5.4.	Ecuación de la EMT . . . . .	57
5.5.	3 Preguntas . . . . .	57
5.5.1.	Dado $\vec{F}_c(\vec{r})$ , cómo calculo $V_{\vec{F}_c}(\vec{r})$ ? . . . . .	57
5.5.2.	Dado $V_{\vec{F}_c}(\vec{r})$ , cómo calculo $\vec{F}_c(\vec{r})$ ? . . . . .	58
5.5.3.	Dado $\vec{F}(\vec{r})$ , cómo puedo verificar si es conservativa ? . . . . .	58
<b>6.</b>	<b>Equilibrios y Oscilaciones</b> . . . . .	<b>61</b>
6.1.	Equilibrios y pequeñas oscilaciones . . . . .	61
6.1.1.	Puntos de equilibrio . . . . .	62
6.1.2.	Pequeñas oscilaciones . . . . .	63
6.1.3.	Generalizaciones . . . . .	64
6.2.	Oscilaciones amortiguadas . . . . .	71
6.2.1.	Sobre-amortiguamiento . . . . .	71
6.2.2.	Sub-amortiguamiento . . . . .	72
6.2.3.	Amortiguamiento crítico . . . . .	73
6.3.	Oscilaciones forzadas . . . . .	74
6.4.	Oscilaciones con forzamiento y atenuación . . . . .	77
6.4.1.	Transiente y régimen estacionario . . . . .	77
6.4.2.	Solución de régimen estacionario . . . . .	77
6.5.	Modos normales . . . . .	79
6.6.	Comentarios . . . . .	81

<b>7. Fuerzas Centrales</b>	<b>83</b>
7.1. Constantes del movimiento . . . . .	83
7.2. Ecuación de Binet . . . . .	84
7.3. Órbitas gravitacionales . . . . .	84
7.3.1. Ecuación física de la trayectoria . . . . .	85
7.3.2. Ecuación geométrica de la trayectoria . . . . .	86
7.3.3. Relación entre fórmulas físicas y geométricas . . . . .	87
7.4. Tipos de órbitas gravitacionales . . . . .	88
7.4.1. Órbita circular . . . . .	88
7.4.2. Órbita elíptica . . . . .	89
7.4.3. Órbita parabólica . . . . .	90
7.4.4. Órbita hiperbólica . . . . .	91
7.5. Diagramas paramétricos . . . . .	92
7.5.1. Órbitas según excentricidad . . . . .	92
7.5.2. Órbitas según energía y momento angular . . . . .	92
7.5.3. Órbitas según rapidez y dirección en un punto . . . . .	92
7.5.4. Órbitas según potencial efectivo . . . . .	93
7.6. Leyes de Kepler . . . . .	95
7.6.1. Primera ley . . . . .	95
7.6.2. Segunda ley . . . . .	95
7.6.3. Tercera ley . . . . .	96
7.7. Resumen . . . . .	97
<b>8. Movimiento Relativo</b>	<b>99</b>
8.1. Sistema no inercial . . . . .	100
8.2. Ecuación de Movimiento . . . . .	102
8.3. Ecuación de movimiento en SRNI . . . . .	104
8.4. Fuerzas inerciales . . . . .	105
8.4.1. Fuerza inercial por aceleración de O: $\vec{F}_o = -m\vec{A}_o$ . . . . .	105
8.4.2. Fuerza Centrífuga: $\vec{F}_{cf} = -m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r})$ . . . . .	107
8.4.3. Fuerza de Coriolis: $\vec{F}_{co} = -2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}$ . . . . .	108
8.4.4. Fuerza Transversal: $\vec{F}_T = -m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}$ . . . . .	108
8.5. Efectos de la rotación terrestre . . . . .	109
8.5.1. Péndulo en reposo . . . . .	109
8.5.2. Péndulo cortado . . . . .	110
8.5.3. Péndulo de Foucault . . . . .	113
<b>9. Sistemas de Partículas</b>	<b>115</b>
9.1. Definición del Sistema . . . . .	116
9.2. Movimiento del Sistema . . . . .	117
9.2.1. Centro de Masa . . . . .	117
9.2.2. Movimiento del Centro de Masa . . . . .	117
9.2.3. Movimiento Relativo al Centro de Masa . . . . .	118
9.3. Energía Mecánica del Sistema . . . . .	119
9.3.1. Energía Cinética del Sistema de Partículas . . . . .	119
9.3.2. Conservación de Energía para Sistemas de Partículas . . . . .	120
9.4. Momento Angular del Sistema . . . . .	122
9.4.1. Momento Angular respecto del Origen . . . . .	122
9.4.2. Momento Angular respecto a otros puntos . . . . .	123

9.4.3. Momento Angular relativo al Centro de Masa . . . . .	124
<b>10. Impulsos y choques</b>	<b>125</b>
10.1. Impulsos . . . . .	126
10.1.1. Impulso lineal . . . . .	126
10.1.2. Mecánica Instantánea . . . . .	128
10.1.3. Otras consideraciones . . . . .	129
10.2. Choques . . . . .	130
10.2.1. Choque de partícula con pared . . . . .	130
10.2.2. Choque de 2 partículas . . . . .	131
10.2.3. Energía en choques . . . . .	132
10.2.4. Choques elásticos . . . . .	133
<b>11. Sistemas Rígidos y Sólidos</b>	<b>135</b>
11.1. Resumen de Sistemas de Partículas . . . . .	136
11.2. Definición de sistema rígido . . . . .	136
11.3. Momento angular de una estructura rígida . . . . .	137
11.3.1. Momento angular respecto al Centro de Masa . . . . .	137
11.3.2. Momento angular en movimiento con punto fijo . . . . .	139
11.4. Energía cinética de una estructura rígida . . . . .	139
11.4.1. Energía cinética relativa al Centro de Masa . . . . .	139
11.4.2. Energía cinética en movimiento con punto fijo . . . . .	140
11.5. Matriz de Inercia . . . . .	140
11.5.1. Ejemplo . . . . .	142
11.5.2. Algunas propiedades . . . . .	143
11.5.3. Cambio de $I$ por traslación del origen: Teorema de Steiner . . . . .	143
11.5.4. Cambio de $I$ por rotación de ejes: Direcciones Principales de Inercia . . . . .	145
11.6. Sólidos . . . . .	146
11.6.1. Distribución continua de masa . . . . .	146
11.6.2. Propiedades extendidas . . . . .	147
11.6.3. Condición de no-resbalamiento . . . . .	147
<b>12. Epílogo</b>	<b>149</b>
<b>A. Vectores y Matrices</b>	<b>151</b>
A.1. Vectores: aspectos básicos . . . . .	151
A.1.1. Producto punto y producto cruz . . . . .	151
A.1.2. Fórmulas misceláneas . . . . .	152
A.2. Matrices: valores y vectores propios . . . . .	152
<b>B. Ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>157</b>
<b>C. Integrales de Línea</b>	<b>159</b>
C.1. Representación de la curva $\mathcal{C}$ . . . . .	159
C.2. El vector desplazamiento $d\vec{r}$ . . . . .	160
C.3. Coordenadas cartesianas . . . . .	161
C.3.1. Ejemplo . . . . .	161
C.4. Coordenadas polares . . . . .	163
C.4.1. Ejemplo . . . . .	164
C.5. Colofón . . . . .	165

<b>D. Campos Escalares</b>	<b>167</b>
D.1. Representación Gráfica . . . . .	167
D.2. Derivadas Parciales . . . . .	169
D.3. El Operador Gradiente . . . . .	170
D.3.1. El Operador Rotor . . . . .	170





# Prefacio

Estos apuntes se basan en el programa del curso de Mecánica y también parcialmente en los apuntes del Profesor Patricio Aceituno. Siendo apuntes relativamente “jóvenes” agradeceré al lector hacerme saber errores o problemas que ellos de seguro contienen.



# Capítulo 1

## Introducción

En este curso estudiaremos la ecuación

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.1)$$

Con toda seguridad la frase anterior causará a algunos gran enfado, pues quien ya ha visto la ecuación 1.1 desde séptimo básico (según mis sobrinas) tiene todo el derecho a esperar algo más en segundo año de Ingeniería. A otros, en cambio, la misma frase puede brindarles la complacencia de una (falsa) sensación de seguridad. Para qué preocuparme del curso si el tema central lo he visto tantas veces, y, dado que estoy aquí, obviamente lo domino? Para unos y otros, por tanto, explicitaremos aquí tres diferencias que hacen a este curso necesario, importante, y, en muchas formas, novedoso.

**Generalidad.** Haremos el esfuerzo de aplicar 1.1 en la forma más general que podamos.

Por ejemplo, no nos limitaremos a estudiar movimiento rectilíneo, ni plano, ni circular, sino que tales serán sólo casos muy particulares del movimiento completamente tridimensional que seremos capaces de abordar. Veremos también que en el caso general el momento de inercia de un cuerpo sólido es sólo un elemento de una estructura más compleja denominada tensor de inercia, o bien que trabajo=fuerza por distancia es sólo una forma muy particular para calcular el trabajo de una fuerza y que muchas veces no sirve. Dada esta búsqueda de generalidad, tendremos que estar muy alertas a no ocupar indiscriminadamente recetas o fórmulas aprendidas antes que, en su letra muy chica, llevaban consigo alguna restricción importante en su validez. Ella explicará también que ocupemos buena parte del tiempo en derivar paso a paso nuestras ecuaciones. Tal es la única forma de saber el rango de validez de las conclusiones obtenidas, y, por lo tanto, de saber bien cuándo podemos y cuándo no podemos utilizar algún resultado previo.

**Matemáticas.** Esperamos hasta ahora para este “último” curso sobre la ecuación 1.1 porque ya contamos con algunas de las herramientas matemáticas requeridas para abordarlo con la generalidad que buscamos. Usaremos ampliamente la geometría y trigonometría, el álgebra de vectores y matrices, el cálculo diferencial e integral, y resolveremos varias ecuaciones diferenciales ordinarias rozando incluso el análisis de campos escalares y vectoriales. Algunas de estas matemáticas han sido vistas en cursos previos y otras se ven en cursos paralelos, por lo que será muy conveniente estar repasando y practicando el uso de estos artilugios. Sin embargo, siendo éste un curso de física y no de matemáticas, el repaso y ejercitación de éstas serán tareas principalmente del estudiante, quedando en las clases expositivas relegadas a menciones breves y en estos apuntes a la categoría de apéndices.

**Enfoque de los problemas.** Por último, el estilo de los problemas que plantearemos podrá ser también novedoso para algunos. Raras veces indicaremos la metodología específica a utilizar para resolver los problemas, sino que preguntaremos por efectos físicos: cuándo se separa una partícula de una superficie?, cuál es la altura máxima que alcanza?, cómo crece la tensión de la cuerda con su largo?, etc. Será trabajo del estudiante traducir esas preguntas en condiciones físicas y ecuaciones matemáticas que permitan responder a la pregunta. Por un lado, la misma generalidad que mencionamos antes hará que al final del curso sean varias las formas distintas en que cada problema puede ser enfrentado, debiendo cada alumno entonces encontrar el camino de solución que más le acomode. Por otra parte, plantear los problemas del modo dicho los hace parecerse más a aquéllos que realmente enfrenta el ingeniero o el científico en su trabajo: manejar técnicas y conceptos básicos, aplicarlos en forma correcta y paso a paso en pos de un objetivo, encontrar el resultado buscado o predecir el comportamiento del sistema en estudio, y reflexionar acerca de sus resultados, la validez que ellos tienen y las consecuencias que de ellos se derivan.

Terminemos esta introducción defendiendo de alguna forma a la mecánica clásica o la física newtoniana, en las que este curso se enmarca, respecto de quien las pudiese mirar con desdén pensando que sólo la mecánica cuántica o la física relativista están realmente vivas. Aunque nos esforcemos en presentar las materias del curso como problemas ha mucho ya definidos y resueltos, se recomienda al estudiante vivaz mantenerse alerta y con espíritu inquisitivo ante las dudas que lo asalten o las preguntas en las que el profesor “carraspee” antes de contestar. Mal que mal a lo largo de los contenidos de este curso no es difícil imaginar a Newton reflexionando acerca del concepto de velocidad e inventando el cálculo diferencial, o a Einstein reflexionando acerca de sistemas de referencia móviles y llegando al concepto de relatividad, o bien a Gibbs y otros padres de la termodinámica moderna pasando desde los conceptos de sistemas en equilibrio al estudio de los sistemas fuera del equilibrio. Más aún, incluso quedándonos en el terreno de la mecánica clásica, todavía plantea ésta problemas en la frontera de la ciencia como la turbulencia en fluidos o el caos y la predictabilidad de sistemas complejos no lineales. Tal como lo demuestran día a día los pronósticos del tiempo y el transantiago, estos problemas son de gran importancia y están muy lejos de estar resueltos.

## Capítulo 2

# Sistemas de Coordenadas y Cinemática

Siendo un objetivo principal de este curso el poder describir el movimiento de una partícula en el espacio, partiremos este capítulo mostrando distintas formas (métodos o sistemas) que se usan para describir cuantitativamente una posición cualquiera en el espacio. Una vez estudiados varios sistemas para describir posiciones espaciales nos ocuparemos de seguir la posición de una partícula individual mientras ella se mueve en el tiempo. Surgen entonces los conceptos de velocidad y aceleración de la partícula cuyo estudio es materia de la cinemática.

### 2.1. Vector posición

La descripción precisa de una posición en el espacio se hace generalmente en forma relativa a alguna referencia. Así por ejemplo, decimos “Pedrito está sentado 2 filas más adelante y tres bancos a la derecha de Oscarito”. Suponiendo que sabemos dónde está Oscarito la descripción anterior me indica la posición de Pedrito. Oscarito en este caso es nuestro punto de referencia para describir la posición de Pedrito.

En el caso general describiremos la posición de cualquier punto  $P$  del espacio respecto de un punto  $O$  del espacio que consideraremos nuestra referencia. La posición de  $P$  referida al punto  $O$  constituye lo que matemáticamente se conoce como un vector: el vector  $\vec{OP}$  (ver figura 2.1). Enfatizamos que el vector  $\vec{OP}$  no es una abstracción matemática sino que es un objeto muy físico que describe la geometría de la posición espacial de  $P$  respecto de  $O$ . Como todo vector,  $\vec{OP}$  tiene tres propiedades geométricas que le son propias: magnitud (la distancia entre  $O$  y  $P$ ), dirección (la dirección de la recta que pasa por  $O$  y  $P$ ) y sentido (va de  $O$  a  $P$ ). Conocer el vector  $\vec{OP}$  es conocer estas tres propiedades, y viceversa.

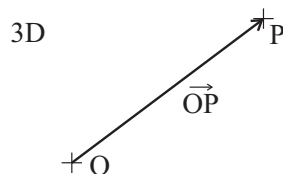


Figura 2.1: Vector  $\vec{OP}$  en espacio 3D.

### 2.1.1. Sistema de Referencia

El vector  $\vec{OP}$  sólo depende de la posición de P y de O. Dados ambos puntos, el vector  $\vec{OP}$  es uno sólo y está completamente definido (es decir, su magnitud, dirección y sentido están completamente definidos).

Un buen manejo del álgebra de vectores es requisito fundamental para este curso, por cuanto así como la posición espacial de la partícula es un vector, también lo son su velocidad, aceleración y las fuerzas que la afectan. Por lo tanto, manejaremos vectores para arriba y para abajo, les haremos productos puntos, productos cruces y los someteremos a todo la artillería de herramientas matemáticas que adquirimos en otros cursos. La regla de la mano derecha debemos saber aplicarla correctamente aunque seamos zurdos!

## 2.2. Sistemas de Coordenadas

Dado un vector  $\vec{OP}$  y un sistema de direcciones o ejes de referencia definidos en el espacio, el siguiente paso es definir un sistema de coordenadas para describir el vector. Para esto existen diversos métodos o sistemas alternativos. A veces resulta conveniente describir matemáticamente el vector  $\vec{OP}$  con distancias a los ejes o planos de referencia. Otras veces lo describiremos mediante algunos ángulos, o con una combinación de distancias y ángulos. En fin, lo importante es reconocer aquí que para describir un mismo vector tendremos a nuestra disposición una variedad de sistemas o métodos alternativos, algunos de los cuales presentaremos a continuación. El objeto de aprender a utilizar estos varios sistemas es que cuando nos enfrentemos a un problema particular seamos capaces de reconocer y aplicar el sistema que simplifique su solución.

Los métodos para describir matemáticamente un vector reciben el nombre genérico de sistemas de coordenadas. Ellos asocian unívocamente a cada vector del espacio un conjunto de números denominados “coordenadas”. En el caso de un vector posición existente en un espacio tridimensional (3D) el sistema de coordenadas que utilicemos asociará un trío  $(a_1, a_2, a_3)$  a cada punto P del espacio. La forma específica como se definen y determinan las coordenadas  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  dependen del sistema de coordenadas elegido, pero una vez definido éste, cada punto del espacio tiene asociado un único trío  $(a_1, a_2, a_3)$  y dado un trío  $(a_1, a_2, a_3)$  debo ser capaz de identificar exactamente el punto del espacio P al cual esas coordenadas se refieren. Cuando restringo el espacio considerado a 2 dimensiones (por ejemplo sólo me interesa describir todos los puntos sobre la cubierta de una mesa) las coordenadas serán 2, mientras que si me interesa describir puntos sólo a lo largo de una recta los vectores estarán en general restringidos a 1 dimensión y bastará una sola coordenada para describirlos matemáticamente.

### 2.2.1. Coordenadas cartesianas en 2D

Partamos considerando el sistema de coordenadas más simple de explicar para describir la posición de puntos ubicados en una superficie plana (espacio 2D). El sistema cartesiano rectangular utiliza el siguiente método para asociar coordenadas a un punto P:

1. Defina pasando por el punto O dos ejes auxiliares, X e Y, perpendiculares entre sí.
2. Las coordenadas  $x$  e  $y$  del punto P son las distancias del punto P a los ejes Y y X, respectivamente.
3. Las coordenadas reciben signos que indican el sentido a lo largo de los ejes en que se deben medir las distancias para llegar al punto P.

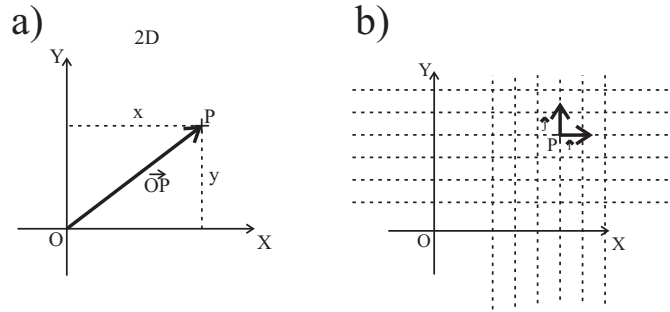


Figura 2.2: a) Sistema cartesiano rectangular en 2D. b) Elementos del sistema cartesiano rectangular.

La figura 2.2a ilustra la definición de las coordenadas cartesianas rectangulares en un plano. Conviene explicitar los elementos que se asocian a cada sistema de coordenadas, a saber:

**Ejes de referencia:** uno o más ejes auxiliares que pasan por el punto O y que sirven para definir las coordenadas. En el caso de un espacio 3D se trata a veces de planos de referencia.

**Coordenadas:** distancias o ángulos que definen los valores numéricos  $(a_1, a_2, a_3)$  para cada punto del espacio. Cuando las coordenadas son distancias se habla de un sistema cartesiano.

**Grilla coordenada:** familias de líneas imaginarias creadas manteniendo una coordenada fija y haciendo variar las restantes coordenadas en todo su rango de variación. En el caso de un espacio 3D se generan de este modo superficies en el espacio. Cuando las familias de curvas son perpendiculares entre sí se habla de un sistema de coordenadas rectangular.

**Vectores unitarios:** en cada punto del espacio se define un conjunto de vectores unitarios que tienen la dirección y sentido en que una de las coordenadas aumenta manteniendo todas las demás fijas. Cuando los vectores unitarios para todos los puntos del espacio son iguales se habla de un sistema de coordenadas homogéneo.

La figura 2.2b muestra estos elementos para el sistema cartesiano definido más arriba. Los vectores unitarios de este sistema se denominan usualmente  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ . Podemos ver que el sistema descrito es homogéneo por cuanto los vectores  $\hat{i}$  resultan idénticos para todos los puntos del espacio (tiene igual magnitud, dirección y sentido), y lo mismo ocurre para  $\hat{j}$ . Los vectores unitarios son útiles para expresar el vector posición de P en función de ellos. Para el sistema de coordenadas recién definido está claro que se puede escribir:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}. \quad (2.1)$$

### 2.2.2. Coordenadas polares

Un sistema alternativo para describir posiciones en un espacio plano (2D) es el llamado sistema de coordenadas polares. El método en este caso es

1. La coordenada  $r$  del punto P será simplemente su distancia al punto O.

2D

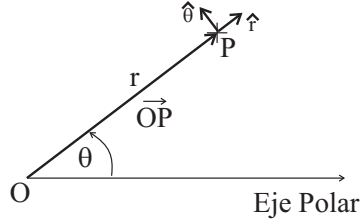


Figura 2.3: Coordenadas polares.

- Defina pasando por el punto O un eje llamado polar. La coordenada  $\theta$  del punto P será el ángulo formado entre el eje polar y la recta OP.

La figura 2.3 ilustra el sistema polar y sus elementos. Puede verse que es un sistema no cartesiano (una de sus coordenadas es un ángulo) pero rectangular. Los vectores unitarios de este sistema se denotan típicamente como  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ . Este sistema es no homogéneo puesto que los vectores unitarios cambian de dirección en distintos puntos del espacio. Más específicamente, ellos dependen de la coordenada  $\theta$  del punto considerado, es decir

$$\hat{r} = \hat{r}(\theta), \quad (2.2)$$

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\theta). \quad (2.3)$$

El vector posición de un punto P se expresa en los términos de este sistema polar en la simple forma

$$\vec{r} = r\hat{r}. \quad (2.4)$$

Una mirada rápida de 2.4 podría hacernos pensar que sólo la coordenada  $r$  es importante para definir el vector  $\vec{r}$  y que la coordenada  $\theta$  no lo afecta. Esto parece raro puesto que sabemos que necesitamos 2 coordenadas para describir un punto arbitrario de un plano. El problema se resuelve mirando 2.2 y reconociendo que la influencia de la coordenada  $\theta$  en 2.4 es a través del vector unitario  $\hat{r}$ .

### 2.2.3. Coordenadas cartesianas en 3D

Para describir puntos en un espacio 3D podemos agregar al sistema cartesiano de 2D un tercer eje Z perpendicular a X e Y. Las coordenadas de P son este caso  $(x, y, z)$  definidas como las distancias a los planos de referencia YZ, XZ y XY, respectivamente. Los vectores unitarios son ahora  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . Por convención el tercer eje se define apuntando en el sentido tal que se cumpla

$$\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}, \quad (2.5)$$

de manera que  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  conforme lo que se llama una tríada de vectores unitarios derecho que cumple

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad (2.6)$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad (2.7)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad (2.8)$$

y los productos cruces conmutados producen los resultados con el signo opuesto. La figura 2.4 ilustra este sistema de coordenadas.



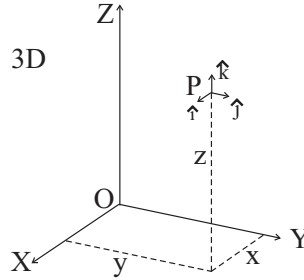


Figura 2.4: Coordenadas cartesianas en 3D.

### 2.2.4. Coordenadas cilíndricas

Un sistema de coordenadas alternativo para describir puntos en 3D es el de las coordenadas cilíndricas. En éste se usa como referencia un plano que pasa por el punto O. La proyección del punto P sobre este plano se describe con coordenadas “polares”  $r$  y  $\theta$ . La tercera coordenada, usualmente llamada  $z$ , es simplemente la distancia entre P y el plano de referencia. Los vectores unitarios en este sistema son la tríada derecha  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k})$ . La figura 2.5a ilustra las definiciones asociadas a las coordenadas cilíndricas. La descomposición del vector  $\vec{r}$  usando los vectores unitarios y las coordenadas de este sistema es

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k}. \quad (2.9)$$

### 2.2.5. Coordenadas esféricas

La primera coordenada en este sistema es simplemente la distancia entre P y el origen O, la que llamaremos  $r$ . Las dos coordenadas adicionales son ángulos. En forma parecida al caso de las cilíndricas se ocupa también aquí como referencia un plano que pasa por el punto O y un eje (llamado azimutal) contenido en él. El ángulo entre este eje y la proyección de P sobre el plano define la coordenada llamada ángulo azimutal, el cual denotaremos  $\phi$ . Perpendicular al plano mencionado y pasando por O se define un segundo eje de referencia (eje cenital). El ángulo entre este eje y el vector posición es la coordenada llamada ángulo cenital que denotaremos por  $\theta$ . La tríada derecha de vectores unitarios en este caso es  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ . La figura 2.5b ilustra este sistema. La descomposición de  $\vec{r}$  usando los elementos de

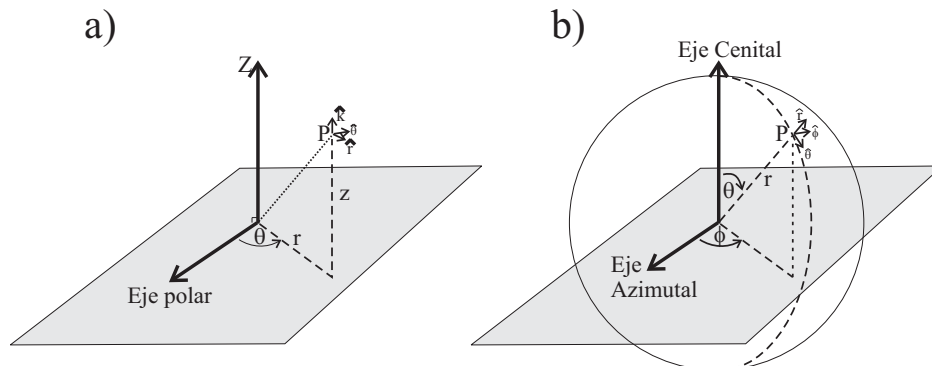


Figura 2.5: a) Coordenadas cilíndricas. b) Coordenadas esféricas.

este sistema alcanza la máxima simplicidad formal:

$$\vec{r} = r\hat{r}. \quad (2.10)$$

Sin embargo, es simple ver que este sistema de coordenadas es no homogéneo y los vectores unitarios son función de  $\theta$  y  $\phi$ , por lo que 2.10 incluye efectivamente la dependencia del vector posición con las tres coordenadas de este sistema.

### 2.2.6. Advertencia sobre notación

Corresponde aquí una advertencia a tener cuidado acerca de la notación, nombres, símbolos y convenciones cuando se usan los distintos sistemas de coordenadas descritos y los muchos otros que se pueden definir. No existiendo una Real Academia de Sistemas de Coordenadas es un hecho de que distintos libros usan distintos símbolos para las mismas coordenadas o los mismos símbolos para distintas coordenadas. Es un hecho también que distintos profesores de este mismo curso usarán distintos símbolos a los usados más arriba. Por último es también un hecho que un mismo profesor ha usado para las mismas coordenadas distintos símbolos en distintos semestres. Todo lo cual apunta a que debéis estar alerta a no memorizar símbolos y ecuaciones sin estar seguros de qué convención están usando.

Para enfatizar lo anterior aún más notemos explícitamente dos curiosidades de los símbolos con que se definieron los distintos sistemas de coordenadas presentados más arriba. En primer lugar notemos que tanto en los sistemas polares, cilíndricos y esféricos le hemos llamado  $r$  a una de las coordenadas. A pesar de haberles dado el mismo símbolo ellas corresponden en general a distancias definidas en forma distinta. Mientras que en polares y esféricas la coordenada  $r$  es la distancia directa entre O y P, en cilíndricas la coordenada  $r$  fue definida como la distancia entre O y *la proyección de P sobre el plano de referencia*. Podríamos haberle dado a las coordenadas distinto símbolo, pero no lo hicimos precisamente para enfatizar que uno debe estar muy atento a las definiciones y convenciones del sistema que está usando, sin dejarse llevar ciegamente por los símbolos.

Una segunda curiosidad acerca de los símbolos usados son el ángulo azimutal en esféricas y el ángulo polar de las coordenadas cilíndricas. En efecto, puede verse que la definición de ambos es extremadamente similar y con buena voluntad (haciendo coincidir los planos y ejes de referencia de los 2 sistemas) pueden ser completamente idénticos. Sin embargo, recibieron cada uno distintos símbolos ( $\theta$  en el caso cilíndrico y  $\phi$  en el caso esférico). Nuevamente este es un llamado de atención a tener cuidado de no “asumir” que un símbolo representa algo que no es. En resumen, cada uno es libre de definir los símbolos que uno desee para las distintas coordenadas, pero luego se debe ser consistente con esas propias definiciones para llegar al resultado correcto que es uno solo.

### 2.2.7. Cambios de coordenadas

Si los varios sistemas coordenados entregan distintas coordenadas para los mismos puntos del espacio, entonces deben existir relaciones entre las coordenadas obtenidas con los distintos sistemas. Ocurrirá seguido que en un mismo problema usaremos a nuestra conveniencia varios sistemas y, por lo tanto, manejar bien las relaciones de cambio de coordenadas es fundamental.

Previo a establecer las relaciones entre las coordenadas de dos sistemas se debe definir en forma precisa cada uno por separado. Se debe establecer claramente la posición de ambos orígenes (podrían ser distintos) y los ejes y planos de referencia de cada uno. Consideremos

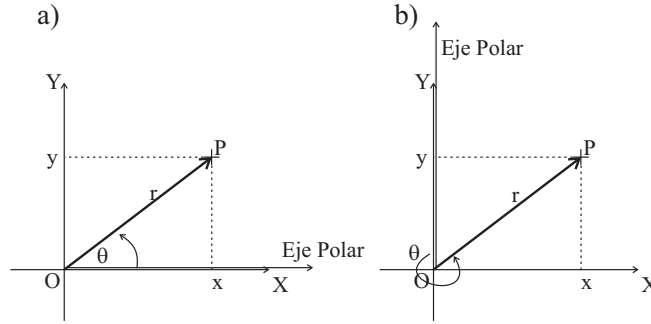


Figura 2.6: Punto descrito con cartesianas y polares. a) Eje polar coincide con eje X. b) Eje polar coincide con eje Y

el caso ilustrado en la figura 2.6a en que un plano 2D se describe con un sistema cartesiano y un sistema polar. Los puntos de origen de ambos sistemas coinciden y el eje polar se hace coincidir con el eje X cartesiano. Para este caso particular la geometría permite establecer las relaciones entre las coordenadas cartesianas y polares de cualquier punto del espacio:

$$x = r \cos \theta, \quad (2.11)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (2.12)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.13)$$

$$\theta = \arctan(y/x). \quad (2.14)$$

Más aún, podemos establecer las siguientes relaciones entre los vectores unitarios de los dos sistemas:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \quad (2.16)$$

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}, \quad (2.17)$$

$$\hat{j} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}. \quad (2.18)$$

Enfaticemos que la forma exacta de estas relaciones depende de la definición precisa de los dos sistemas involucrados. Por ejemplo, se deja propuesto establecer las relaciones entre los 2 sistemas de la figura 2.6b en que ahora el eje polar se ha hecho coincidir con el eje cartesiano Y.

Para su uso posterior agregaremos un último ejemplo de relación entre sistemas coordenados. La figura 2.7 muestra un espacio 3D descrito por un sistema cartesiano y uno esférico. Los ejes azimutal y cenital de este último se han hecho coincidir con los ejes cartesiano X y Z, respectivamente. Se deja propuesto mostrar las siguientes relaciones entre las coordenadas de ambos sistemas:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (2.19)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (2.20)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (2.21)$$

y mostrar también que se cumplen las siguientes relaciones entre sus vectores unitarios:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{k} + \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j}, \quad (2.22)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{k} + \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j}, \quad (2.23)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}. \quad (2.24)$$

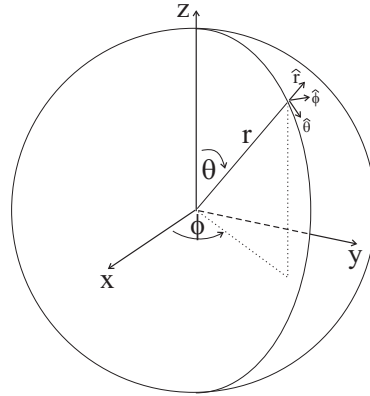


Figura 2.7: Punto descrito con coordenadas esféricas y cartesianas.

### 2.2.8. Selección del sistema de coordenadas a usar

Si hubiese un sistema de coordenadas que siempre fuese el más simple de usar en todos los problemas, no cabe duda de que todos los demás sistemas ya se habrían olvidado. El hecho de que presentemos varios sistemas refleja que dependiendo del problema abordado cada uno tendrá ventajas y desventajas que se debe ponderar al tratar de obtener la solución buscada de la manera más simple. La solución no depende del sistema escogido, y en principio cualquier sistema (correctamente aplicado) sirve para resolver cualquier problema. Pero, dependiendo del problema particular y del sistema utilizado, la solución puede obtenerse en pocos pasos o en muchas hojas (con las consiguientes oportunidades de error).

Muchas veces la geometría del problema considerado da una idea del sistema de coordenadas más eficiente a usar. Por ejemplo si estamos considerando la posición de una argolla inserta en un aro circular de radio  $R$  es muy probable que las coordenadas polares sean las más simples de usar. La razón de esto es que la restricción física “inserto en una argolla circular de radio  $R$ ” se describe matemáticamente en forma muy simple si uno usa coordenadas polares:

$$r = R, \quad (2.25)$$

es decir, establecemos inmediatamente que una de las coordenadas polares de la argolla es una constante conocida. Por el contrario, la misma restricción física en coordenadas cartesianas se expresaría algo así como

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.26)$$

En este caso ambas coordenadas de la argolla pueden cambiar pero están sujetas a cumplir siempre la condición cuadrática 2.26. Vemos que la expresión de una misma restricción física tiene complejidades matemáticas muy distintas según el sistema coordenado con que se describa el espacio.

Por último cabe agregar que en problemas más complejos se puede utilizar varios sistemas coordenados para abordar distintos aspectos de él, aplicando cada uno donde cada uno facilita las cosas y estableciendo las relaciones entre ellos de la manera descrita en la sección anterior.

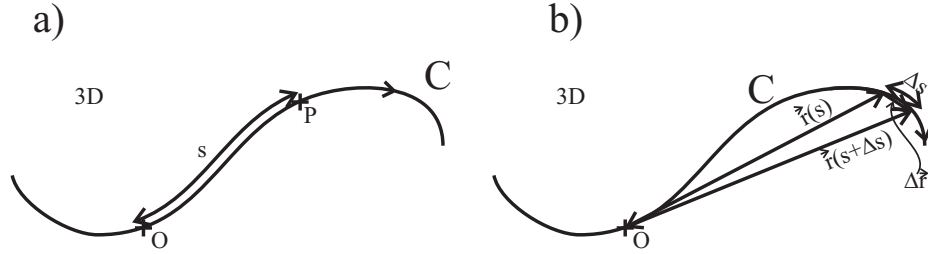


Figura 2.8: a) Coordenadas intrínsecas. b)  $\Delta s$  tiende a  $\|\Delta\vec{r}\|$  cuando  $\Delta s \rightarrow 0$ . También  $\Delta\vec{r}$  tiende a ser tangente a  $\mathcal{C}$  en el mismo límite.

### 2.2.9. Coordenadas intrínsecas

Terminamos esta sección de sistemas coordenados presentando uno algo más esotérico que los ya vistos, pero que será útil al momento de explicar algunos conceptos más adelante. A diferencia de los sistemas ya conocidos, el sistema de coordenadas intrínsecas no sirve para describir la posición de cualquier punto del espacio, sino que sólo es útil para describir la posición de puntos  $P$  ubicados sobre una curva  $\mathcal{C}$ . Esta curva  $\mathcal{C}$  puede tener en el espacio una forma tan “alambicada” como uno quiera, pero la supondremos completamente conocida. Si los puntos  $P$  a describir están sobre la curva  $\mathcal{C}$ , entonces para identificar la posición de uno de ellos en particular sólo basta definir sobre la curva un origen  $O$  e indicar la distancia *medida sobre la curva* a la cual el punto  $P$  se encuentra. Es decir, nos basta sólo una coordenada que llamaremos  $s$ : distancia del punto  $P$  medida sobre la curva a partir de  $O$ . Se dará a  $s$  un signo que señale en qué dirección debemos medir la distancia indicada (ver Figura 2.8a). Podemos ver que este sistema de coordenadas está intrínsecamente ligado a una curva  $\mathcal{C}$  que debemos conocer, y de ahí su nombre (también son llamadas a veces coordenadas naturales).

Para los puntos  $P$  sobre  $\mathcal{C}$  su vector posición,  $\vec{r} = \vec{OP}$  queda completamente definido si se indica su coordenada  $s$ , por lo cual podemos decir que en este caso

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \quad (2.27)$$

En cada punto  $P$  de la curva podemos definir también una tríada de vectores unitarios. El más directo de definir es el vector unitario,  $\hat{t}$ , tangente a la curva  $\mathcal{C}$  en el punto  $P$ . La figura 2.8b ilustra el hecho de que  $\hat{t}$  se puede definir matemáticamente como

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \quad (2.28)$$

ya que en el límite indicado el vector  $\Delta\vec{r}$  toma una dirección tangente a la curva y  $\Delta s$  tiende al valor de la magnitud de  $\Delta\vec{r}$ , por lo que efectivamente  $\Delta\vec{r}/\Delta s$  tiende a ser un vector unitario y tangente a la curva  $\mathcal{C}$ , es decir, tiende a  $\hat{t}$ . Como en general el vector  $\hat{t}$  va cambiando su dirección a lo largo de la curva consideramos también que

$$\hat{t} = \hat{t}(s). \quad (2.29)$$

De hecho la integral de 2.28 nos entrega la relación entre el vector posición de  $P$  y el vector unitario  $\hat{t}$ :

$$\vec{r} = \int_0^s \hat{t}(s') ds', \quad (2.30)$$

donde por un prurito matemático hemos distinguido el límite de la variable de integración poniendo una cremilla sobre esta última.

Un segundo vector unitario en  $\mathcal{P}$  surge de considerar el vector  $d\hat{t}/ds$ . En efecto, dado que  $\hat{r}$  es un vector unitario, se cumple para todo  $s$  que

$$\hat{t}(s) \cdot \hat{t}(s) = 1, \quad (2.31)$$

lo cual se puede derivar respecto a  $s$  para encontrar que

$$\hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{ds} = 0. \quad (2.32)$$

Por lo tanto,  $d\hat{t}/ds$  es efectivamente un vector siempre perpendicular a  $\hat{t}$  y nos servirá para definir el segundo vector unitario asociado a este sistema de coordenadas. El único problema del vector  $d\hat{t}/ds$  para ser un vector unitario es que nadie nos garantiza que su magnitud sea unitaria. Por lo tanto, el segundo vector unitario lo definiremos como

$$\hat{n} \equiv \frac{1}{\|d\hat{t}/ds\|} \frac{d\hat{t}}{ds}. \quad (2.33)$$

De esta forma el vector normal,  $\hat{n}$ , resulta efectivamente perpendicular a  $\hat{t}$  y efectivamente unitario. Por último el tercer vector unitario de la tríada lo podemos definir ahora simplemente como

$$\hat{b} \equiv \hat{t} \times \hat{n}. \quad (2.34)$$

### Radio de curvatura

Si en la curva  $\mathcal{C}$  el vector unitario tangente no cambia a lo largo de ella, se tiene entonces que  $\|d\hat{t}/ds\| = 0$ . Físicamente el hecho de que  $\hat{t}$  no cambie con  $s$  nos indica que la curva  $\mathcal{C}$  es una línea recta. Por otra parte, si la curva  $\mathcal{C}$  es “muy curva” es fácil ver que  $\|d\hat{t}/ds\|$  crece en magnitud. Por lo tanto, el valor de  $\|d\hat{t}/ds\|$  está muy relacionado con la “curvatura” de  $\mathcal{C}$ . De hecho se define el radio de curvatura de  $\mathcal{C}$  en la forma

$$\rho \equiv \frac{1}{\|d\hat{t}/ds\|}. \quad (2.35)$$

Si  $\mathcal{C}$  es una línea recta su radio de curvatura es infinito, mientras que si  $\mathcal{C}$  es “muy cerrada”, su radio de curvatura es pequeño. En una curva cualquiera el radio de curvatura va cambiando a lo largo de ella, es decir,  $\rho = \rho(s)$ . Con la ayuda de  $\rho$  la definición del vector unitario  $\hat{n}$  de 2.33 se puede escribir como

$$\hat{n} = \rho \frac{d\hat{t}}{ds}. \quad (2.36)$$

### Ejemplo

Consideremos la curva  $\mathcal{C}$  de la figura 2.9. Se trata de una curva plana de forma sinusoidal, cuya forma la describiremos matemáticamente en coordenadas cartesianas. Pertenecen a  $\mathcal{C}$  todos los puntos del plano de coordenadas  $(x, y)$  que cumplan la relación

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad (2.37)$$

donde  $A$  y  $L$  son 2 parámetros de la curva que suponemos conocidos. Se pide determinar el radio de curvatura de  $\mathcal{C}$  en una de sus cumbres (por ejemplo en el punto  $x = L/4, y = A$ ).

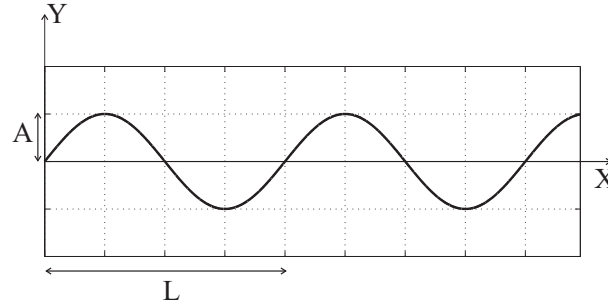


Figura 2.9: Curva plana sinusoidal.

Para usar la definición 2.35 del radio de curvatura necesitamos conocer la expresión de  $\hat{t}(s)$ . Ya que esta relación no la conocemos directamente, veamos qué sabemos del vector  $\hat{t}$ . Dado que  $\hat{t}$  es tangente a la curva, entonces lo podemos expresar en términos de los vectores unitarios cartesianos en la forma

$$\hat{t} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (2.38)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de la tangente a la curva. Hemos avanzado un paso pues ahora 2.38 nos indica la relación  $\hat{t}(\theta)$ . Nos acordamos ahora de nuestros cursos de cálculo que el ángulo de la tangente de una curva tiene mucha relación con la derivada de ella. En efecto se cumple que

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad (2.39)$$

por lo que en este caso 2.37 nos dice que

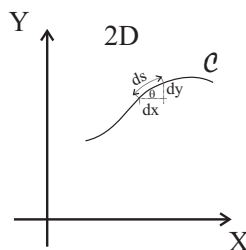
$$\tan \theta = A \frac{2\pi}{L} \cos \left( \frac{2\pi x}{L} \right). \quad (2.40)$$

Hemos avanzado otro paso, puesto que ahora 2.40 nos ha dado la relación  $\theta(x)$ . Finalmente, nos falta establecer la relación  $x(s)$ . Esta se justifica en la Figura 2.10, que nos permite decir que para una curva plana

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta. \quad (2.41)$$

Con 2.38, 2.40, y 2.41 podemos finalmente calcular la derivada que requiere la definición de  $\rho$  puesto que por la regla de la cadena

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{d\hat{t}}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{ds} \quad (2.42)$$

Figura 2.10: Relación entre  $ds$ ,  $dx$ ,  $dy$  y  $\theta$  en curva plana.

de tal modo que en este caso se obtiene

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = (-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) \left( -A \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \sin \left( \frac{2\pi x}{L} \right) \right) \cos^3\theta. \quad (2.43)$$

En la cumbre  $x = L/4$  y  $\theta = 0$ , por lo que el radio de curvatura resulta

$$\rho_{\text{cumbre}} = \frac{L^2}{A(2\pi)^2}. \quad (2.44)$$

El resultado es dimensionalmente correcto pues el radio de curvatura resulta con dimensiones de longitud. También es físicamente plausible pues si nos imaginamos, por ejemplo, que  $L$  aumenta manteniendo  $A$  constante veremos que la curva en la cumbre se hace “menos curva” (y más “recta”) y por ende esperamos que el radio de curvatura crezca, que es lo que efectivamente la expresión obtenida cumple. Notemos que en este ejemplo algunas relaciones usadas son válidas sólo para curvas planas. La teoría de las coordenadas naturales para curvas generales en el espacio se describe con detalle en otros cursos.

## 2.3. Cinemática de la partícula

Todo lo anterior ha sido una discusión enteramente espacial o geométrica. Deliberadamente no usamos la palabra “tiempo” pues nos concentramos en adquirir herramientas para describir posiciones en el espacio y no había necesidad de hablar de movimiento ni de partícula. Aprendimos que una posición cualquiera en un espacio 3D se describe con un vector, y que hay muchos métodos alternativos para describir matemáticamente un vector posición mediante sistemas de coordenadas. Ahora no hablaremos de un punto del espacio cualquiera sino que consideraremos el vector posición de un objeto particular el cual podrá cambiar su posición en el espacio a medida que pasa el tiempo. Si  $\vec{r}$  es el vector posición que “sigue” al punto de interés, entonces  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , o, lo que es lo mismo, las coordenadas de  $\vec{r}$  son funciones del tiempo ( $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$ ).

### 2.3.1. Velocidad y Aceleración

Al estudiar un vector posición  $\vec{r}$  que es función del tiempo, es muy natural considerar el desplazamiento de  $\vec{r}$  entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  definido como

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (2.45)$$

y es muy natural asociar el concepto de velocidad (media entre  $t_1$  y  $t_2$ ) al término

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \Delta\vec{r}. \quad (2.46)$$

Un paso completamente genial es darse cuenta de que cuando  $t_2$  se acerca a  $t_1$  la expresión 2.46 se aproxima en general a un valor bien definido que da lugar a la variable que llamaremos velocidad (instantánea), definida por

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \langle \vec{v} \rangle = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.47)$$

Aprovechemos el vuelo y definamos inmediatamente la aceleración del punto que estamos siguiendo en la forma

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.48)$$



Su definición se justifica por lo útil que resultará en el estudio de la dinámica de una partícula que haremos en el capítulo siguiente.

Si conocemos  $\vec{r}(t)$  de nuestro punto móvil, entonces las definiciones 2.47 y 2.48 nos permiten calcular su velocidad y su aceleración. A la inversa, si conocemos la aceleración  $\vec{a}(t)$  de nuestro punto, entonces

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^t \vec{a}(t') dt', \quad (2.49)$$

donde la velocidad en algún instante  $t_o$  debe ser conocida si queremos conocer  $\vec{v}(t)$  para todo  $t$ . Y si conocemos  $\vec{v}(t)$  entonces la posición de nuestro punto la calculamos como

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_q) + \int_{t_q}^t \vec{v}(t') dt', \quad (2.50)$$

donde la posición en algún instante  $t_q$  debe ser conocida si queremos conocer  $\vec{r}(t)$  para todo  $t$ .

### 2.3.2. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas intrínsecas

Llamamos trayectoria a la curva en el espacio descrita por el vector posición de la partícula  $\vec{r}(t)$ . Si consideramos a la trayectoria de la partícula como la curva de referencia de un sistema de coordenadas intrínsecas, entonces la velocidad de la partícula la podemos calcular usando la regla de la cadena en la forma

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad (2.51)$$

donde  $s$  es la coordenada distancia medida a lo largo de la trayectoria. Recordemos de 2.28 que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{t}, \quad (2.52)$$

por lo que en coordenadas intrínsecas (a la trayectoria) la velocidad de la partícula se puede escribir como

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{t}. \quad (2.53)$$

Esta expresión nos informa que la velocidad de la partícula es siempre tangente a su trayectoria (pues tiene componente sólo en  $\hat{t}$ ), y su magnitud es igual a la tasa de cambio de la distancia recorrida por la partícula medida sobre su trayectoria, es decir

$$v \equiv \|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt}. \quad (2.54)$$

La magnitud  $v$  del vector velocidad la llamaremos rapidez de la partícula.

La aceleración en intrínsecas la podemos obtener derivando 2.53 respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{t})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{dt}, \quad (2.55)$$

donde en el último término hemos reconocido que al movernos sobre la curva el vector unitario tangente puede ir cambiando de dirección. De hecho la última derivada se puede calcular con la ayuda de 2.36

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \hat{n} v, \quad (2.56)$$

lo cual podemos reemplazar en 2.55 para obtener la expresión de la aceleración en coordenadas intrínsecas

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}, \quad (2.57)$$

donde hemos usado un punto para denotar una derivada respecto al tiempo. Esta última expresión nos informa que la aceleración (los cambios del vector velocidad) tienen una parte asociada al cambio de la magnitud de la velocidad (aceleración tangencial) y otra parte asociada al cambio de la dirección de la velocidad, la cual podemos llamar aceleración centrípeta (apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria).

Las expresiones 2.53 y 2.57 nos brindan una posibilidad de calcular el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula si conocemos su velocidad y aceleración en un punto. En efecto, se deja propuesto usar 2.53 y 2.57 para calcular  $\vec{a} \times \vec{v}$  y luego mostrar que se cumple

$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}. \quad (2.58)$$

Recalcamos, sin embargo, que  $\rho$  es un concepto que fue definido en forma puramente geométrica para una curva cualquiera, por lo que 2.58 es un método de cálculo y no su definición.

### 2.3.3. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas cartesianas

En el caso que hayamos privilegiado el uso de coordenadas cartesianas para describir la posición de la partícula entonces

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (2.59)$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}, \quad (2.60)$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}. \quad (2.61)$$

Notar que al derivar el vector posición con respecto al tiempo, sólo derivamos las coordenadas y no los vectores unitarios, por cuanto en el sistema cartesiano, siendo éste homogéneo, los vectores unitarios no cambian si la partícula se mueve en el espacio.

### 2.3.4. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas polares

En este caso el vector posición se podía escribir

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad (2.62)$$

por lo que la velocidad es entonces

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}. \quad (2.63)$$

En este caso tenemos que al ir siguiendo a la partícula en el tiempo, ella va cambiando su posición espacial, y dado que en este sistema no homogéneo los vectores unitarios cambian en el espacio (ver 2.2 y 2.3) nos hemos visto obligados a incluir en 2.63 el término  $d\hat{r}/dt$ . Viendo 2.2 sabemos que  $\hat{r}$  cambia sólo con la coordenada  $\theta$ , por lo que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\hat{r}}{d\theta}. \quad (2.64)$$

Con la ayuda de 2.15 y 2.16 es sencillo mostrar que

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad (2.65)$$

por lo que finalmente la velocidad en polares se puede expresar como

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (2.66)$$

Volviendo a derivar 2.66 respecto al tiempo y siguiendo un procedimiento análogo a lo anterior encontramos la aceleración en polares

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}, \quad (2.67)$$

donde hemos usado también que  $d\hat{\theta}/d\theta = -\hat{r}$  (obtenido con 2.15 y 2.16).

### 2.3.5. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas se tiene

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k}, \quad (2.68)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}, \quad (2.69)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}. \quad (2.70)$$

### 2.3.6. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en coordenadas esféricas

Para encontrar las expresiones de la velocidad y aceleración en coordenadas esféricas partimos de 2.22-2.24. Derivando estas expresiones con respecto al tiempo se verifica que

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}, \quad (2.71)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi}, \quad (2.72)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta}. \quad (2.73)$$

Estamos ahora en condiciones de obtener las expresiones de la velocidad y aceleración en coordenadas esféricas derivando el vector posición respecto al tiempo:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad (2.74)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}, \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + \\ & (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \\ & (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Notar que la aceleración azimutal,  $a_\phi$ , puede escribirse también como

$$a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{d(\dot{\phi}r^2\sin^2\theta)}{dt}. \quad (2.77)$$

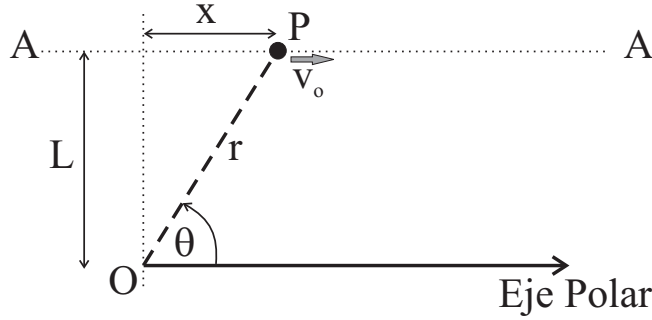


Figura 2.11: Ejemplo

### 2.3.7. Un último comentario

Así como los distintos sistemas de coordenadas nos daban varias alternativas para describir un mismo vector posición en el espacio, todas las expresiones de velocidad vistas recién nos dan alternativas de descripción de una misma velocidad: la velocidad de la partícula. Por lo tanto, la magnitud, dirección y sentido de la velocidad deben resultar idénticos independientemente de si expresamos la velocidad en intrínsecas, cartesianas o cualquier otro sistema coordenado, es decir, se cumple por ejemplo que

$$\dot{s} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} = \left( \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\phi} \sin \theta)^2 \right)^{1/2}, \quad (2.78)$$

en la medida que las coordenadas  $s$ ,  $(x, y, z)$  y  $(r, \theta, \phi)$  describan la posición de la misma partícula. Lo mismo ocurre para la aceleración: todas las formas vistas aplicadas a una partícula individual deben entregar el mismo vector aceleración, es decir, su magnitud, dirección y sentido calculado con 2.61, 2.67, 2.70 o 2.76 deben ser los mismos.

### Ejemplo

Para ilustrar lo anterior consideremos el caso de la figura 2.11 en que una partícula P se mueve a lo largo de una recta AA con rapidez constante conocida  $v_o$ . A pesar de que lo más simple sería describir su posición con coordenadas cartesianas 1D a lo largo de AA, por alguna razón hemos decidido describir la posición de P usando un sistema polar con origen ubicado a una distancia  $L$  de la recta AA y con su eje polar paralelo a ella. Por lo tanto, las coordenadas  $r$  y  $\theta$  de la partícula son función del tiempo. Se pide encontrar  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{r}$  y  $\ddot{\theta}$  en función de  $r$ ,  $L$  y  $v_o$  y determinar la aceleración de la partícula usando la expresión de coordenadas polares 2.67.

Definimos la variable auxiliar  $x$  en la figura, de tal forma que las condiciones geométricas y cinemáticas del problema las podemos expresar como

$$r^2 = L^2 + x^2, \quad (2.79)$$

$$\tan \theta = \frac{L}{x}, \quad (2.80)$$

$$\dot{x} = v_o. \quad (2.81)$$

Derivando 2.79 respecto al tiempo obtenemos

$$2r\dot{r} = 2x\dot{x} = 2xv_o \quad (2.82)$$

de donde

$$\dot{r} = \frac{xv_o}{r}. \quad (2.83)$$

Volviendo a derivar

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{v_o^2}{r} - \frac{xv_o}{r^2} \dot{r}, \\ &= \frac{v_o^2}{r} - \frac{xv_o}{r^2} \frac{xv_o}{r}, \\ &= \frac{v_o^2 r^2 - x^2 v_o^2}{r^3}, \\ &= \frac{L^2 v_o^2}{r^3}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Para calcular  $\dot{\theta}$  partimos derivando 2.80 respecto al tiempo

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} = -\frac{Lv_o}{x^2}, \quad (2.85)$$

de donde

$$\dot{\theta} = -\frac{Lv_o}{x^2} \cos^2 \theta. \quad (2.86)$$

Pero de la geometría del problema también se tiene que  $\cos \theta = x/r$ , por lo que

$$\dot{\theta} = -\frac{Lv_o}{r^2}. \quad (2.87)$$

Notemos que si  $v_o > 0$  hemos obtenido que  $\dot{\theta} < 0$ , lo que es consistente con la física del problema. Finalmente, con 2.84 y 2.87 armemos la aceleración radial en polares

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{L^2 v_o^2}{r^3} - r \left( -\frac{Lv_o}{r^2} \right)^2 = 0. \quad (2.88)$$

Podemos ver que a pesar de que este movimiento simple descrito en polares tiene  $\ddot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  bastante complejos, la aceleración de la partícula (que se mueve con velocidad constante) sigue siendo cero. Se deja propuesto mostrar que también la aceleración azimutal,  $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$  se anula en este caso.



## Capítulo 3

# Dinámica: Leyes de Newton y Fuerzas

El capítulo anterior nos entregó varias herramientas para describir el movimiento de una partícula en el espacio, pero no para explicarlo o predecirlo. Es decir, si conocemos  $\vec{a}(t)$  y las condiciones iniciales ya somos capaces de conocer  $\vec{r}(t)$ , pero quién me dice cuánto vale  $\vec{a}(t)$ ?. En este capítulo veremos que una buena “explicación” del movimiento se logra a través del concepto de fuerzas.

### 3.1. Leyes de Newton

Si bien hemos aprendido y utilizado las Leyes de Newton desde nuestros primeros cursos de física en el colegio, detrás de ellas hay más de lo que a primera vista se ve. Mal que mal en ellas están presentes conceptos como masa y fuerza que no son necesariamente fáciles de definir o explicar en forma precisa. Una discusión profunda de la filosofía y de la lógica de estas Leyes, sin embargo, queda fuera del alcance de este curso (dejándole esa tarea a los cursos de física más avanzados), y nos limitamos aquí a presentarlas de una manera más bien convencional (aunque rimada), tratando de enfatizar lo que importa a su aplicación más que a su filosofía.

#### 3.1.1. Primera

*El movimiento que vemos de un cuerpo aislado es, o bien uniforme, o bien reposado.*

Un cuerpo aislado se refiere a una partícula que no interactúa con nada (también llamada partícula libre), y cuyo movimiento se apreciará, de acuerdo a este principio, como reposo o como movimiento uniforme (velocidad constante). Subyacente a este principio está el hecho de que debemos estar apreciando o midiendo el movimiento de la partícula respecto de un Sistema de Referencia Inercial (SRI), el cual consideraremos como un sistema de referencia cuyo origen y ejes están en reposo “absoluto”, o, al menos, en reposo “respecto a las estrellas lejanas”. Podemos decir entonces que, respecto de un SRI, una partícula libre se observará en reposo o con velocidad uniforme. En un capítulo posterior de este curso veremos que cuando una partícula libre tiene un movimiento complicado o no-uniforme la conclusión a sacar es que su movimiento lo estamos describiendo o midiendo respecto de un sistema de referencia no inercial (SRNI). Hasta que no lleguemos a ese

capítulo, sin embargo, siempre supondremos que el sistema de referencia que usamos es un SRI.

### 3.1.2. Segunda

*La interacción de un cuerpo con su universo  
es a través de fuerzas  
que modifican su movimiento.*

Si bien el concepto de fuerza es muy intuitivo, la relación entre fuerza y movimiento no es trivial. De hecho, queda propuesto preguntar al hermano(a) chico(a) si una fuerza aplicada a una caja sobre el suelo producirá una velocidad o un cambio de velocidad en la caja. Con alta probabilidad quien no haya sido “introducido” a las Leyes de Newton responderá que al aplicar una cierta “fuerza” a la caja, ésta adquiere una cierta “velocidad”. Esto es así porque en general los movimientos de la vida diaria (sobre todo en los tiempos antiguos, pre-newtonianos) son relativamente lentos y dominados por fuerzas de roce.

La Segunda Ley de Newton establece la relación “correcta” entre fuerza y movimiento. Más aún, considera el hecho que una misma fuerza puede dar lugar a mayores o menores cambios en la velocidad del objeto, dependiendo de su inercia. Se define entonces la cantidad de movimiento o momentum (lineal) de la partícula como el vector

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}, \quad (3.1)$$

donde  $m$  es la masa inercial de la partícula y  $\vec{v}$  su velocidad. Con esta definición la Segunda Ley se expresa

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (3.2)$$

Para una partícula de masa constante obtenemos la ya conocida ecuación

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (3.3)$$

En esta segunda ley encontramos lo que estábamos buscando: una explicación para el cambio (o no cambio) del movimiento de las partículas. Esta “explicación” resulta buena ya que el concepto de fuerza lo es. Construiremos en la próxima sección varios modelos de fuerza que nos representarán en forma muy exitosa una variada gama de interacciones entre las partículas y su universo. Conociendo entonces las interacciones de la partícula con su universo, aplicando los modelos de fuerza respectivos, usando luego la Segunda Ley, podremos finalmente explicar y predecir el movimiento de la partícula (o cuerpo) que nos interesa.

Aparte de su utilidad y eficacia para representar interacciones, las fuerzas tienen una muy benigna propiedad adicional. Las fuerzas resultan ser vectores que cumplen el Principio de Superposición, por el cual cuando una partícula tiene múltiples interacciones con su universo, uno puede determinar en forma independiente las fuerzas,  $\vec{F}_i$ , asociadas a cada interacción, sumar los vectores resultantes obteniendo la llamada fuerza neta,  $\vec{F}_{\text{neta}}$ , y aplicar la segunda ley en la forma

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{neta}} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.4)$$



### 3.1.3. Tercera

*Dos cuerpos que interactúan  
se ejercen fuerzas  
de igual magnitud, de igual dirección,  
pero siempre, siempre, en oposición.*

Esta podría considerarse como la versión física de la “Regla de oro” moral: lo que hacemos a otros, otros nos lo hacen. Las fuerzas de interacción entre distintas partículas van de a pares. La fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la partícula 2 (llamémosla  $\vec{F}_{21}$ ) es de igual magnitud y dirección pero de opuesto sentido a la que la partícula 2 ejerce sobre la 1 (llamémosla  $\vec{F}_{12}$ ), es decir,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (3.5)$$

Aplicaremos este principio con gran ventaja y profusión cuando al final del curso estudiemos la dinámica de un número grande de partículas que interactúan entre sí.

## 3.2. Fuerzas

Las leyes de Newton nos dicen que el momentum de la partícula cambia (o no cambia) según las fuerzas que la afectan. Por lo tanto, el problema de predecir el movimiento de una partícula pasa a ser ahora una cuestión de identificar y cuantificar las fuerzas actuando sobre ella.

Las fuerzas representan la interacción física entre la partícula y el resto del universo. Esta interacción puede tomar varias formas, y cada una de ellas se representa o modela con algún tipo de fuerza. Dependiendo del nivel del análisis estos modelos serán más o menos simples y más o menos *ad-hoc*. Nosotros, por ejemplo, utilizaremos modelos de fuerzas relativamente simples, con la desventaja de que tendremos distintos modelos para una variedad de interacciones. Para un físico teórico, en cambio, que usa modelos más complejos y generales, las fuerzas (interacciones) fundamentales son muy pocas, y está permanentemente tratando de generalizar el modelo aún más para unificarlas.

### 3.2.1. Formas de representar las fuerzas

Las distintas fuerzas que nosotros consideraremos tendrán varias formas de definición. Lo más simple sería dar la definición de la fuerza en función del tiempo, por ejemplo, considerar que conocemos la función

$$\vec{F} = \vec{F}(t). \quad (3.6)$$

De este modo podríamos reemplazar en 3.4 y resolver la ecuación de movimiento para  $\vec{r}(t)$ . Esta alternativa, sin embargo, no es muy común. La función  $\vec{F}(t)$  es conocida *a priori* sólo para algunos tipos de interacciones muy particulares. Un ejemplo podría ser un motor que podemos controlar para que entregue a la partícula (por ejemplo, un auto) una fuerza prescrita en el tiempo.

Otro tipo de interacciones se modelan haciendo que la fuerza dependa de la posición espacial de la partícula, es decir, en este caso se define la fuerza en la forma

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}), \quad (3.7)$$

donde  $\vec{r}$  es la posición de la partícula. Este es el caso, por ejemplo, de las fuerzas de atracción gravitacional y de resortes, que presentaremos más adelante, en que las fuerzas

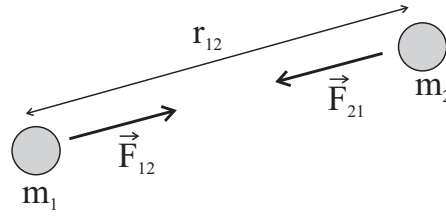


Figura 3.1: Atracción gravitacional

dependen de la posición de la partícula relativa a otro cuerpo con masa (fuerza gravitacional) o relativa al otro extremo del resorte.

Para otras interacciones el mejor modelo es una fuerza que depende de la velocidad de la partícula

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{v}), \quad (3.8)$$

como en el caso de los roces viscosos de partículas que se mueven en un fluido.

Por último, hay otras interacciones cuyo modelo asociado no indica en forma explícita una expresión para  $\vec{F}$ , sino que se expresa en una restricción al movimiento de la partícula (fuerzas de restricción). Este es el caso, por ejemplo, de una partícula en contacto con una superficie. La fuerza normal que la superficie ejerce sobre la partícula no se conoce *a priori*, pero se sabe que en esa interacción el movimiento de la partícula no puede penetrar hacia dentro de la superficie. Esta restricción cinemática es una condición adicional que reemplaza en este caso a una definición explícita de la fuerza en la forma 3.6, 3.7 o 3.8.

En cualquiera de los casos considerados, sin embargo, la definición (implícita o explícita) de las fuerzas actuando sobre la partícula entrega ecuaciones adicionales a la 2a Ley de Newton, que cierran el problema matemático y, de alguna forma, permiten resolver  $\vec{r}(t)$ .

### 3.2.2. Atracción gravitacional y peso

Una de las fuerzas fundamentales es la atracción gravitacional entre masas. Para dos partículas, 1 y 2, esta interacción se modela como

$$\vec{F}_{12} = F \hat{r}_{12}, \quad (3.9)$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad (3.10)$$

donde  $\vec{F}_{12}$  es la fuerza percibida por la partícula 1 debido a su interacción gravitacional con 2,  $G$  es una constante universal,  $m_1$  y  $m_2$  son las respectivas masas y  $r_{12}$  es la distancia entre las dos partículas. En 3.9  $\hat{r}_{12}$  es el vector unitario que va de 1 a 2, por lo que esta fuerza es siempre de atracción (ver Figura 3.1).

Con el valor empírico de  $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$  se propone estimar el tiempo que tardarían 2 partículas de masa 1 kg en juntarse debido a su atracción gravitacional, si estuviesen separadas entre sí inicialmente 1 m, y alejadas infinitamente de cualquier otro cuerpo.

### Peso

Para cuerpos que se mueven cerca de la superficie de la Tierra la atracción gravitacional más significativa que perciben es la asociada a la masa terrestre,  $M_T$ , debido a su gran magnitud ( $M_T \sim 5,988 \times 10^{24} \text{kg}$ ). Más aún, en este caso particular la distancia entre las

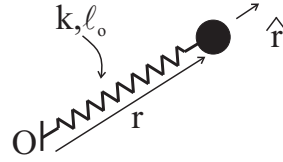


Figura 3.2: Fuerza de resorte.

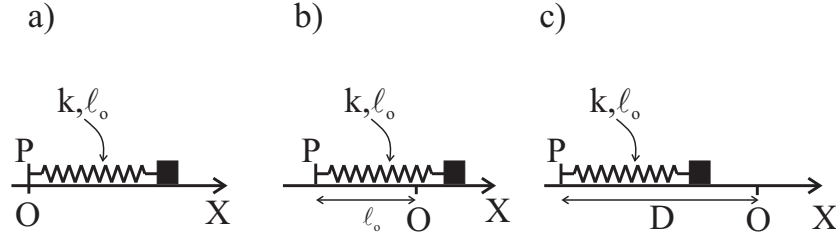


Figura 3.3: 1 resorte y 3 sistemas

“partículas” es muy aproximadamente el radio terrestre,  $R_T \sim 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ , por lo que la fuerza percibida por un cuerpo de masa  $m$  ubicado en la cercanía de la superficie terrestre es aproximadamente

$$\vec{F} \sim -\frac{GM_T m}{R_T^2} \hat{k} = -mg_o \hat{k}, \quad (3.11)$$

donde  $\hat{k}$  es el vector unitario que apunta en la dirección de la vertical local.  $g_o = GM_T/R_T^2 \sim 9,8 \text{ ms}^{-2}$  es llamada aceleración de gravedad a nivel de la superficie terrestre.

### 3.2.3. Resortes

El movimiento de una partícula ligada a un punto fijo mediante un resorte está restringido parcialmente. El resorte presenta una resistencia a ser extendido o comprimido respecto de su longitud “relajada” que llamamos su largo natural,  $\ell_o$ . Para un resorte ideal y lineal la magnitud de la fuerza que ejerce sobre la partícula se considera proporcional a la diferencia entre la longitud del resorte y su largo natural, siendo la constante de proporcionalidad un segundo parámetro propio del resorte que llamaremos constante elástica,  $k$ . La fuerza del resorte sobre la partícula es paralela al resorte y su sentido es tal que siempre trata de que el resorte vuelva a su largo natural. En el caso de la figura 3.2 describimos la posición de la partícula con un sistema polar (o esférico) con origen en el extremos fijo del resorte. En este caso expresamos la fuerza del resorte en la forma

$$\vec{F} = -k(r - \ell_o)\hat{r}, \quad (3.12)$$

donde  $r$  es el largo del resorte en el momento considerado y  $\hat{r}$  es el vector unitario radial.

La expresión matemática específica que usamos para describir la fuerza de un resorte sobre una partícula depende mucho de la configuración del sistema punto fijo-resorte-partícula y del sistema de coordenadas utilizado. Para ilustrar esto consideremos los 3 casos de la figura 3.3. En los tres casos tenemos el mismo sistema punto fijo (P)-resorte-partícula, pero usamos distintos sistemas coordenados para describir la posición de la partícula. Se deja propuesto verificar que la fuerza del resorte sobre la partícula se expresa

en cada caso en la forma

$$\vec{F} = \begin{cases} -k(x - \ell_o)\hat{i} & \text{caso a),} \\ -kx\hat{i} & \text{caso b),} \\ -k(D + x - \ell_o)\hat{i} & \text{caso c).} \end{cases} \quad (3.13)$$

Para cada configuración de la figura 3.3 la expresión correspondiente debe cumplir las propiedades físicas de la fuerza del resorte: magnitud proporcional al estiramiento del resorte respecto de su largo natural y tendencia a llevar al resorte a su largo natural.

Las soluciones típicas del movimiento de partícula con resorte son oscilaciones en torno al largo natural. Por ejemplo, para el caso de la figura 3.3b) la ecuación de movimiento en el eje X de la partícula sería

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (3.14)$$

cuya solución general es

$$x(t) = A \sin(\omega_o t) + B \cos(\omega_o t), \quad (3.15)$$

donde  $\omega_o^2 = k/m$  es llamada la frecuencia natural del sistema resorte-partícula. Las constantes  $A$  y  $B$  se determinan a partir de condiciones iniciales particulares. Una forma equivalente de la solución 3.15 es

$$x(t) = C \sin(\omega_o t + \delta), \quad (3.16)$$

donde ahora las constantes libres son  $C$  (amplitud de la oscilación) y  $\delta$  (constante de fase).

El resorte es el ejemplo más simple de visualizar de una clase general de sistemas que tienen fuerzas de restitución que tienden a llevar a la solución a un estado de equilibrio. De hecho, como veremos más adelante, muchos sistemas que se mueven en torno de un equilibrio estable se comportan como un resorte.

### 3.2.4. Fuerzas en fluidos: Roce viscoso y F. de presión

Un cuerpo que se mueve inmerso en un fluido percibe en su interacción con éste dos tipos de fuerzas: un roce viscoso que trata de frenarlo y una fuerza de presión. En la apreciación de cuerpos que vuelan, como aves y aviones, es donde el rol de estas dos fuerzas alcanza su máxima expresión. En efecto, son las diferencias de la fuerza de presión actuando sobre el contorno del ala las que dan la sustentación necesaria al objeto impidiendo que éste caiga. En muchos casos estas diferencias de presión aumentan mientras más rápido se mueve el cuerpo al interior del fluido. Sin embargo, a mayor velocidad el roce viscoso aumenta también con el consiguiente costo energético. El delicado balance entre estas dos fuerzas es el que resuelve apropiadamente cada objeto volador identificado, desde el pequeño chicol hasta el gigante Airbus 380.

#### Roce viscoso

La fuerza de roce viscoso se modela en la forma

$$\vec{F} = -F\hat{t}, \quad (3.17)$$

$$F = kv^n, \quad (3.18)$$

donde  $\hat{t}$  es el vector unitario tangente a la trayectoria (y, por lo tanto, tiene la dirección de la velocidad  $\vec{v}$  de la partícula). 3.17 indica que esta fuerza se opone siempre al movimiento relativo entre la partícula y el fluido, mientras que 3.18 indica que su magnitud depende de la rapidez con algún exponente  $n$  y constante  $k$ . Estos últimos parámetros son función

del tipo de fluido considerado, de propiedades de la partícula (forma, tamaño, tipo de superficie) y del carácter laminar o turbulento que el flujo del fluido desarrolla en torno al cuerpo en movimiento. En general tales parámetros se obtendrán a partir de experimentos, aunque en casos muy simples se pueden derivar a partir de ecuaciones básicas.

Resolvamos la ecuación de movimiento para el caso más simple de una partícula en movimiento rectilíneo sometida sólo a una fuerza viscosa lineal

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}. \quad (3.19)$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$x = A + Be^{-t/\tau}, \quad (3.20)$$

donde  $\tau = m/k$  es una constante de tiempo de este problema. Imponiendo las condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = v_o$  la solución particular es

$$x(t) = v_o\tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right). \quad (3.21)$$

La rapidez de la partícula cambia por su parte en la forma

$$\dot{x}(t) = v_o e^{-t/\tau}. \quad (3.22)$$

Este decaimiento exponencial de la rapidez hasta el reposo (relativo al fluido) es el efecto típico de un roce viscoso.

### Fuerzas de presión

La fuerza de presión actuando sobre la superficie exterior de un cuerpo inmerso en un fluido se modela en la forma

$$\vec{F} = -F\hat{n}, \quad (3.23)$$

$$F = pA, \quad (3.24)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario normal que sale de la superficie, y  $A$  es el área donde la presión  $p$  actúa. Las fuerzas de presión serán fundamentales en el análisis del movimiento de los fluidos, fascinante tema que será tratado en otros cursos.

### 3.2.5. Fuerzas de Contacto: Normal y Roce

#### Normal

Una partícula en contacto con una superficie percibe como restricción a su movimiento el hecho de no poder penetrar al interior de la superficie. Esta interacción con la superficie se modela como una fuerza,  $\vec{N}$ , que la superficie ejerce sobre la partícula. Esta interacción se expresa matemáticamente en la forma

$$\vec{N} = N\hat{n}, \quad (3.25)$$

$$N \geq 0, \quad (3.26)$$

$$d\vec{r} \cdot \hat{n} \geq 0, \quad (3.27)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario que sale perpendicularmente de la superficie (ver Figura 3.4) y  $d\vec{r}$  es el desplazamiento de la partícula. En palabras, las condiciones 3.25 a 3.27 pueden

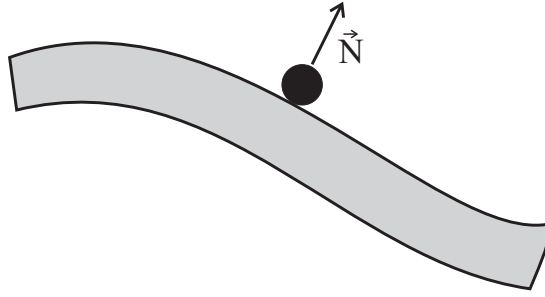


Figura 3.4: Fuerza normal.

describirse como: la normal actuando sobre la partícula es cero o sale perpendicular a la superficie y la partícula puede desplazarse sobre la superficie o por encima de la superficie, pero no puede penetrarla. En 3.26 y 3.27 las igualdades y desigualdades ocurren de a pares: la normal es mayor que cero ( $N > 0$ ) cuando la partícula efectivamente se mueve sobre la superficie ( $d\vec{r} \cdot \hat{n} = 0$ ), mientras que si la partícula se mueve “fuera” de la superficie ( $d\vec{r} \cdot \hat{n} > 0$ ) entonces  $N = 0$  (aunque se puede dar el caso  $N = 0$  y  $d\vec{r} \cdot \hat{n} = 0$ ).

Como dijimos antes en este tipo de interacciones la magnitud de la fuerza es usualmente una incógnita, y la condición a imponer es la condición cinemática 3.27. Muchas veces un caso de interés particular es aquél en que una partícula moviéndose sobre una superficie llega a una condición tal en que se “despega” de ella. Este caso lo resolvemos calculando el valor de la normal para su movimiento sobre la superficie y evaluando la condición en que ésta se anula. Después del despegue la normal sigue siendo nula (perdemos una incógnita) al mismo tiempo que la partícula deja de “sentir” la restricción 3.27 a su movimiento (perdemos una ecuación) y el movimiento de la partícula debe seguir resolviéndose bajo estas nuevas condiciones.

### Roce estático

Para que un cuerpo sobre una superficie comience a deslizar sobre ella es necesario en general imponer una fuerza que supere un cierto umbral. Esta resistencia a iniciar el desplazamiento de un cuerpo sobre una superficie la modelaremos asumiendo la existencia de una fuerza de roce estático cuya magnitud es la necesaria para que el deslizamiento no ocurra. Agregaremos además la condición de que la magnitud de esta fuerza de roce no puede superar un valor máximo, de tal manera que si el reposo relativo entre el cuerpo y la superficie exige que la fuerza de roce estático tenga una magnitud mayor entonces el reposo relativo no es posible y el cuerpo desliza sobre ella.

Matemáticamente esta fuerza de roce estático se define por

$$\vec{F} = F\hat{t}, \quad (3.28)$$

$$d\vec{r} \cdot \hat{t} = 0, \quad (3.29)$$

$$|F| \leq F_{\max}, \quad (3.30)$$

$$F_{\max} = \mu_e N, \quad (3.31)$$

donde  $\hat{t}$  es un vector unitario tangente a la superficie. Al igual que en el caso de la normal, en este caso la magnitud de la fuerza de roce estático es usualmente una incógnita, y la condición adicional es de tipo cinemático: la partícula debe estar en reposo relativo a la superficie. Bajo esta suposición se resuelve para la magnitud de  $\vec{F}$  y se compara luego con la restricción 3.30. Si tal desigualdad se cumple entonces el problema está resuelto y la

partícula efectivamente no se mueve sobre la superficie. Por el contrario, si la magnitud requerida de  $\vec{F}$  resulta mayor a  $F_{\max}$ , entonces la suposición de no deslizamiento era incorrecta y debemos resolver el problema con deslizamiento (usando en este caso un roce cinético). Notemos que en nuestro modelo el límite máximo de la fuerza de roce estático se supone proporcional a la magnitud de la normal, lo cual es nuevamente una modelación de lo que se observa en la realidad.

Una situación típica a analizar con este modelo es evaluar alguna condición crítica para que una partícula en reposo sobre una superficie comience a resbalar. Esta condición crítica es justamente aquella en que la magnitud de la fuerza de roce estático requerida es igual a  $F_{\max}$ , por lo que podemos usar la igualdad en 3.30.

### Roce cinético

El “freno” que siente una partícula cuando desliza sobre una superficie se modela con una fuerza de roce cinético que escribiremos en la forma

$$\vec{F} = -F\hat{t}, \quad (3.32)$$

$$F = \mu_c N, \quad (3.33)$$

donde  $\hat{t}$  es un vector unitario tangente a la superficie y en la dirección de la velocidad de la partícula. Notemos que en este caso la magnitud de la fuerza está prescrita en función de la normal.

### Nota sobre superficies móviles

Las tres fuerzas descritas antes son de contacto entre partícula y superficie. Es importante reconocer que en sus definiciones lo relevante es el movimiento de la partícula *respecto* de la superficie. Si la superficie está en reposo no hay confusión. Pero en ciertos sistemas las superficies se mueven y esta acotación es pertinente. Así por ejemplo, una partícula sobre una superficie móvil sentirá un roce *estático* en la medida que la partícula y la superficie se muevan ambas a la par, y, por tanto, no exista movimiento relativo de una respecto de la otra.

#### 3.2.6. Cuerdas y barras

Las fuerzas que modelan el efecto de cuerdas y barras en el movimiento de partículas son, al igual que las fuerzas normal y de roce estático, de las que en general no se conoce su magnitud *a priori* sino que sólo se conoce la restricción cinemática que ellas imponen.

### Cuerdas

La restricción a su movimiento percibida por una partícula ligada a un punto fijo mediante una cuerda de largo  $L$  es que ella no puede alejarse a una distancia mayor que  $L$  del extremo fijo. Esta restricción al movimiento se modela con una fuerza  $\vec{T}$  expresada como

$$\vec{T} = -T\hat{r}, \quad (3.34)$$

$$T \geq 0, \quad (3.35)$$

$$r \leq L, \quad (3.36)$$

donde hemos usado un sistema de coordenadas esféricas (o polares si el problema es 2D) con origen en el extremo fijo de la cuerda (ver Figura 3.5). Notemos que en 3.35 no

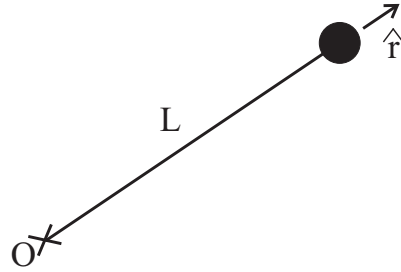


Figura 3.5: Partícula atada a cuerda.

permitimos que la tensión ejercida por una cuerda sea negativa, debido a que, por ser flexible, la cuerda no impide a la partícula acercarse al otro extremo. Nuevamente las desigualdades 3.35 y 3.36 van usualmente de a pares: una cuerda tensa ( $T > 0$ , agrega una incógnita al problema) mantiene a la partícula a una distancia  $L$  del extremo fijo ( $r = L$ , agrega una ecuación), mientras que si la partícula está más cerca ( $r < L$ , agrega una incógnita) la cuerda está destensada ( $T = 0$ , elimina una incógnita).

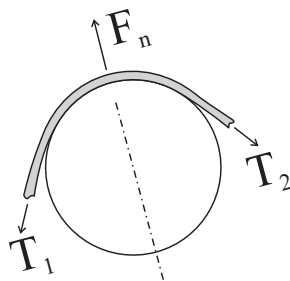
Una cuerda ideal (sin masa y muy lisa) “transmite” una tensión de igual magnitud en toda su extensión aunque existan elementos físicos que la hagan cambiar de dirección. Por ejemplo en la figura 3.6 una cuerda cambia de dirección al pasar por una polea. Considerando brevemente el pedazo de cuerda en torno a la polea, su ecuación de movimiento debe siempre anular la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él, debido esto a que su masa es muy pequeña. Más aún, no existiendo roce con la polea la única fuerza que ésta le ejerce a la cuerda es de tipo normal. Con estas dos condiciones la única posibilidad que cabe es que las 2 tensiones actuando en los extremos del pedazo de cuerda tengan efectivamente la misma magnitud.

### Barras

Una partícula que está ligada a un punto fijo mediante una barra percibe una fuerza  $\vec{T}$  que también está definida de manera implícita mediante una restricción cinemática. Esta última es, sin embargo, más fuerte que en el caso de una cuerda, puesto que la barra impide tanto el acercamiento como el alejamiento de la partícula respecto del otro extremo. La restricción cinemática es, por lo tanto,

$$r = L, \quad (3.37)$$

donde  $L$  es el largo de la barra y usamos nuevamente coordenadas polares con origen en el punto fijo para describir la posición de la partícula (ver Figura 3.7). La fuerza  $\vec{T}$  que la

Figura 3.6: Cuerda ideal y polea sin roce. La simetría exige que  $T_1 = T_2$ .



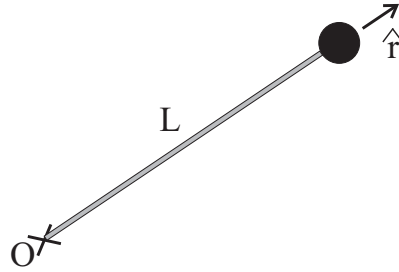


Figura 3.7: Partícula y barra.

barra ejerce sobre la partícula puede, en general, tener *todas* las componentes no nulas y de cualquier signo, es decir, en el caso plano

$$\vec{T} = T_r \hat{r} + T_\theta \hat{\theta}, \quad (3.38)$$

donde la tensión radial de la barra,  $T_r$ , y la tensión transversal de la barra,  $T_\theta$ , pueden en general tener cualquier signo. El hecho de que la barra pueda ejercer una tensión transversal,  $T_\theta$ , se debe a su rigidez. A diferencia de una cuerda ideal, la barra ideal se resiste a ser flectada, lo que indica su capacidad de producir este esfuerzo transversal. Sin embargo, si esta tensión transversal existe o no en un caso particular depende mucho del tipo de “conexión” (o apoyo en jerga ingenieril) que existe entre el punto fijo y la barra. En efecto, consideremos los dos casos ilustrados en la figura 3.8. En el caso A la barra está empotrada (o soldada) al punto fijo y en este caso la tensión de la barra tiene en general una componente transversal no nula. En el caso B, en cambio, el soporte de la barra al punto fijo es rotulado, permitiéndose libremente el giro en torno a él. En este caso la barra ideal, a semejanza de la cuerda, tiene una tensión sólo longitudinal, es decir,

$$\vec{T} = T_r \hat{r}, \quad (3.39)$$

aunque  $T_r$  bien puede ser  $>$ ,  $<$  o  $=$  a cero según el caso. La demostración de que en este caso  $T_\theta = 0$  requiere el concepto de momento angular y torque que se verá en un capítulo posterior.

### Extremos móviles

Aunque hemos llamado “fijo” al extremo de la cuerda o barra que no tiene a la partícula, este punto podría perfectamente estar en movimiento, en cuyo caso las restricciones cinemáticas 3.36 y 3.37 se deben entender siempre referidas a la posición relativa de la partícula respecto del otro extremo de la cuerda o barra.

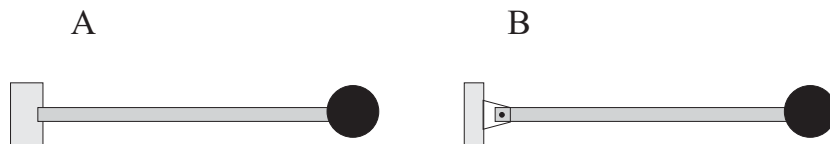


Figura 3.8: A: Barra con apoyo empotrado. B: Barra con apoyo rotulado.

### 3.2.7. Otras fuerzas

Los modelos de fuerzas presentados más arriba son los que usaremos más frecuentemente en este curso. Sin embargo, hay otros tipos de interacciones que no hemos descrito y que en ciertos casos dan lugar a fuerzas importantes para el movimiento de algunas partículas. En particular, no hemos mencionado las interacciones de tipo electromagnético que originan fuerzas importantes para el movimiento de partículas cargadas eléctricamente.

## 3.3. Dos partículas

Según lo visto antes, la ecuación de movimiento para una partícula es

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{neto}}, \quad (3.40)$$

que en el caso 3D corresponde a 3 ecuaciones diferenciales escalares a resolver. Cuando incorporamos al análisis 2 partículas que pueden interactuar entre sí, las ecuaciones de movimiento de cada una pueden escribirse como

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{\text{neto},1}, \quad (3.41)$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{neto},2}, \quad (3.42)$$

donde los subíndices 1 y 2 denotan cada partícula. Si las partículas interactúan entre sí, significa que dentro de la fuerza neta percibida por cada partícula está la fuerza que le ejerce su compañera, es decir, podemos escribir

$$\vec{F}_{\text{neto},1} = \vec{F}_{\text{neto,ext},1} + \vec{F}_{12}, \quad (3.43)$$

$$\vec{F}_{\text{neto},2} = \vec{F}_{\text{neto,ext},2} + \vec{F}_{21}, \quad (3.44)$$

donde  $\vec{F}_{nm}$  representa la fuerza percibida por la partícula  $n$  en su interacción con la partícula  $m$ . Por acción y reacción se cumple que

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (3.45)$$

de tal manera que las ecuaciones de movimiento se escriben ahora

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{\text{neto,ext},1} + \vec{F}_{12}, \quad (3.46)$$

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{neto,ext},2} - \vec{F}_{12}. \quad (3.47)$$

Notemos que ahora 3.46-3.47 corresponde a un sistema de 6 ecuaciones diferenciales escalares. Estas 6 ecuaciones están acopladas entre sí debido a que  $\vec{F}_{12}$  depende en general de la posición tanto de la partícula 1 como de la partícula 2 (por ejemplo, si ambas estuvieran unidas entre sí por un resorte). Por lo tanto, para obtener la solución completa del problema (es decir, conocer  $\vec{r}_1(t)$  y  $\vec{r}_2(t)$ ) las 6 ecuaciones deben ser resueltas en forma simultánea (analíticamente si se puede, o bien numéricamente).

### 3.3.1. Sistema de dos partículas aisladas y masa reducida

Consideremos el caso de un sistema de dos partículas que sólo interactúan entre sí ( $\vec{F}_{\text{neto,ext},1} = \vec{F}_{\text{neto,ext},2} = 0$ ). Sumando 3.46 y 3.47 con esta condición obtenemos

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{0}. \quad (3.48)$$

Que equivale a

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{cte.} \quad (3.49)$$

Es decir, el momentum lineal total de las 2 partículas se conserva constante.

Podemos ir un paso más y describir el movimiento de la partícula 2 relativo a la partícula 1 definiendo el vector  $\vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Para encontrar la ecuación de evolución de  $\vec{R}_2(t)$  partimos de las ecuaciones de movimiento de cada partícula en este caso

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad (3.50)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \quad (3.51)$$

de donde la ecuación para  $\vec{R}_2$  es

$$\ddot{\vec{R}}_2 = \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} - \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{F}_{21}, \quad (3.52)$$

que podemos escribir como

$$\mu \ddot{\vec{R}}_2 = \vec{F}_{21} \quad (3.53)$$

donde hemos definido la masa reducida del sistema como  $\mu = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ . Si la fuerza de interacción entre las partículas es función de la distancia entre ambas ( $|\vec{R}_2|$ ), entonces 3.53 es una ecuación diferencial para  $\vec{R}_2(t)$ . Es decir, para un sistema de dos partículas que sólo interactúan entre sí, el movimiento relativo de una de ellas respecto a la otra se describe por una ecuación de movimiento de una partícula aislada, salvo que la masa de ella debe ser reemplazada por la masa reducida del sistema de dos partículas. Notemos que si  $m_1 \ll m_2$  entonces  $\mu \sim m_1$

## 3.4. Metodología usual y Ejemplos

### 3.4.1. Pasos típicos de solución

Al abordar un problema de dinámica los pasos usuales son los siguientes.

#### Comprensión del problema

Es muy importante comprender correctamente el problema a resolver, ya que si nos equivocamos en esto, trataremos de resolver un problema distinto al que el profesor tenía en mente, y quizás el nuevo problema ni siquiera tenga solución. Comprender el problema pasa por leer varias veces su enunciado, mirar con detención la figura acompañante, imaginar físicamente el sistema descrito (a veces conviene imaginarse cómo podría uno construir en la realidad el sistema descrito) y estar seguro de entender los datos que se entregan y de los resultados pedidos. El análisis debe ser con espíritu crítico, pues a veces los problemas están mal planteados o confusamente descritos, y en tal caso tenemos el derecho a solicitar una mejor explicación. Un buen análisis inicial incluso debe sugerirnos cuál es la solución o al menos qué características cualitativas podría presentar de acuerdo a nuestra intuición física (la cual se desarrolla comprendiendo bien los conceptos básicos y aplicándolos resolviendo muchos problemas). En ocasiones hay problemas en que con un buen argumento físico la solución se obtiene inmediatamente en este análisis inicial, mientras que “echándole p’adelante”, sin pensar físicamente, nos entregará la (con suerte) misma solución sólo después de varias hojas de respuesta.

### Buen dibujo

Después de comprender el problema, realizar un buen dibujo del sistema en estudio es fundamental. Pondremos allí los datos conocidos, definiremos los ángulos importantes del problema y también una o más variables auxiliares que nos ayuden a resolverlo. Si bien al corregir pruebas uno ve que el 99 % de los estudiantes hacen dibujos, una fracción no despreciable podría denominarse con cierta razón “mamarracho”, en el cual no se distinguen las variables, o son muy chicos, o están hechos con el pulso de una madrugada de sábado. Ese tipo de dibujos en general no ayuda mucho a la solución del problema y más bien lo dificulta, por lo que si en algún momento me doy cuenta de que está quedando así, más me convendría borrarlo y partir de nuevo.

### Diagrama de cuerpo libre

En el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) ponemos nuestra partícula de interés junto con las fuerzas que la afectan, incluyendo su dirección y sentido en que las consideraremos positivas. Debemos tener especial cuidado de no omitir ninguna fuerza que podría estar actuando de acuerdo a la situación física del problema, y también debemos cuidarnos de no poner fuerzas que el enunciado nos dice explícitamente que son despreciables o que no existen.

### Selección de sistema de referencia y coordenadas

Definimos entonces el sistema de referencia (origen y ejes) a utilizar y el sistema de coordenadas empleado, tratando de seleccionar el sistema que simplifique la representación del movimiento y/o de las fuerzas presentes en el problema.

### Ecuación de movimiento

Escribimos ahora la ecuación de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (3.54)$$

desarrollando ambos lados de la ecuación. Usamos la expresión general de la aceleración que corresponde al sistema de coordenadas escogido (Capítulo 1), y expresamos cada una de las fuerzas del DCL en ese mismo sistema. El resultado de este paso es en general 3 ecuaciones escalares, correspondientes a las 3 componentes de la ecuación de movimiento.

### Aplicación de restricciones cinemáticas o geométricas

Típicamente el problema contendrá restricciones cinemáticas o geométricas, que nos indican *a priori* que la partícula no se mueve en forma libre por el espacio, sino, por ejemplo, lo hace sobre una superficie esférica de radio  $R$ . En este paso debemos imponer todas las restricciones cinemáticas que el problema tiene en la expresión general de la aceleración que escribimos en el paso anterior.

### Identificación de incógnitas y condiciones

La ecuación de movimiento más las restricciones cinemáticas nos debieran entregar un sistema cerrado de ecuaciones e incógnitas. Por ejemplo, las fuerzas de restricción como una Normal son usualmente una incógnita del problema, pero por otra parte nos agregan una condición cinemática de que la partícula se desplaza sobre la superficie conocida.

Es bueno, entonces, detenerse brevemente en este paso para apreciar las ecuaciones e incógnitas del problema, recordar cuál es el resultado requerido, y definir la estrategia para obtenerlo (la mayor parte de las veces no necesitamos resolver *todas* las incógnitas del problema).

### Solución matemática

Recién aquí viene la solución matemática que puede pasar por una manipulación algebraica y/o soluciones de ecuaciones diferenciales, tendientes a obtener la respuesta solicitada. Es bueno ir verificando en cada paso matemático que se mantenga la consistencia dimensional (de unidades) en las ecuaciones que se obtienen, ya que apenas aparece una inconsistencia de unidades ella es un aviso de que es 100% seguro que hemos cometido un error. Tenemos entonces 2 alternativas: o ignoramos ese aviso y seguimos “echándole p’adelante” (con el riesgo de que el error cometido era importante y nos descarrile completamente nuestra solución), o bien revisamos para atrás, detectamos el error, corregimos lo que haya que corregir y seguimos adelante con nuestra confianza reforzada. Es nuestra elección.

### Verificación y apreciación de la solución

Finalmente, al obtener un resultado final siempre es bueno chequear su consistencia dimensional y física y compararla con nuestra intuición inicial del problema.

#### 3.4.2. Problema de roce estático

Consideremos el problema de la figura 3.9 en que una partícula de masa  $m$  se encuentra apoyada sobre una barra que rota en un plano vertical con velocidad angular constante,  $\omega_0$ . Entre la partícula y la barra hay un roce estático caracterizado por un coeficiente  $\mu$ . Si en la condición inicial  $\theta = 0$  y la partícula se encuentra a una distancia  $R$  del eje de giro de la barra, se pide determinar el ángulo  $\theta_*$  en que la partícula comienza a deslizar sobre la barra (en cualquiera de las dos direcciones: centrípeta o centrífuga).

La solución comienza por establecer el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la partícula en que graficamos todas las fuerzas que la afectan. Además elegimos un sistema de coordenadas para describir su movimiento. Estos elementos se ilustran en la figura 3.10.

A continuación escribimos la ecuación de movimiento de la partícula, expresando fuerzas y aceleraciones en el sistema coordenado elegido. En este caso usaremos coor-

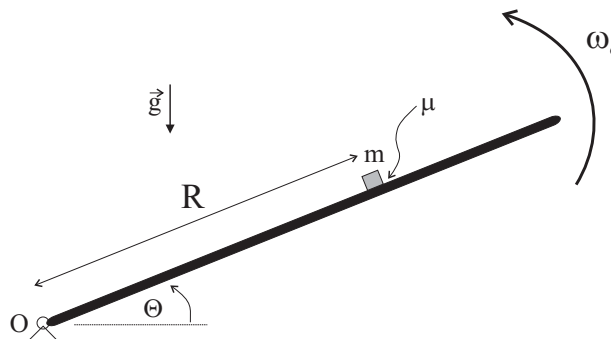


Figura 3.9: Partícula sobre barra rotante.

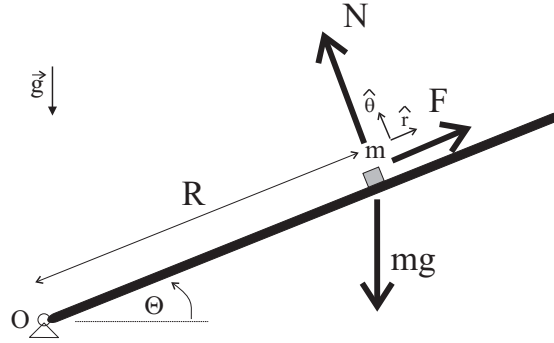


Figura 3.10: DCL y vectores unitarios.

denadas polares, por lo que la ecuación de movimiento es

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F - mg \sin \theta, \quad (3.55)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = N - mg \cos \theta. \quad (3.56)$$

Nos falta imponer las restricciones cinemáticas del problema. En la medida que no haya ocurrido el deslizamiento de la partícula se tiene que

$$r = R, \quad (3.57)$$

$$\dot{r} = 0, \quad (3.58)$$

$$\ddot{r} = 0, \quad (3.59)$$

mientras que en la medida que la partícula se mantenga rotando con la barra se tiene que

$$\dot{\theta} = \omega_o, \quad (3.60)$$

$$\ddot{\theta} = 0. \quad (3.61)$$

Reemplazando estas condiciones en 3.55-3.56 obtenemos las ecuaciones

$$-mR\omega_o^2 = F - mg \sin \theta, \quad (3.62)$$

$$0 = N - mg \cos \theta. \quad (3.63)$$

Notemos que en este problema las fuerzas  $N$  y  $F$  son las incógnitas de 3.62-3.63, puesto que la cinemática de la partícula está completamente especificada (antes del eventual deslizamiento). Por lo tanto, podemos resolver el problema para nuestras incógnitas, obteniendo

$$F = -mR\omega_o^2 + mg \sin \theta, \quad (3.64)$$

$$N = mg \cos \theta. \quad (3.65)$$

Para simplificar el análisis trabajaremos con las fuerzas adimensionalizadas por  $mg$ :

$$\mathcal{F} \equiv \frac{F}{mg} = -\mathcal{R} + \sin \theta, \quad (3.66)$$

$$\mathcal{N} \equiv \frac{N}{mg} = \cos \theta, \quad (3.67)$$

donde  $\mathcal{R} \equiv R\omega_o^2/g$  es un parámetro adimensional que indica la importancia relativa de la rotación versus la gravedad en este problema.

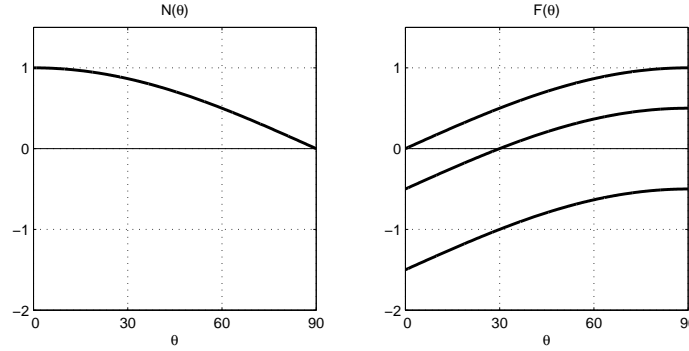


Figura 3.11: Variación de  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{F}$  con el ángulo  $\theta$ . Las tres curvas del panel derecho son para  $\mathcal{R} = 0$ ,  $\mathcal{R} = 0,5$ , y  $\mathcal{R} = 1,5$ .

La figura 3.11 ilustra las dependencias de  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{F}$  con el ángulo  $\theta$ . La fuerza de roce, en particular, es función también del valor del parámetro  $\mathcal{R}$ . El panel izquierdo de la figura muestra que en este problema de rotación uniforme la normal no depende de la velocidad angular y que se mantiene positiva en el rango de ángulos entre 0 y  $90^\circ$ . Esto indica que la partícula no se despegará de la barra antes de que ésta llegue a la posición vertical.

Por su parte, el panel derecho de la figura 3.11 nos muestra que cuando  $\mathcal{R} > 0$  los valores de  $\mathcal{F}$  para ángulos pequeños resultan negativos. Esto indica que cuando la barra pasa cerca de la horizontal la partícula tiende a escaparse centrífugamente alejándose del eje de rotación, por lo cual, si la partícula no desliza sobre la barra, entonces la fuerza de roce estático debe ser en la dirección *opuesta* de la que supusimos en nuestro DCL. Para mayores inclinaciones de la barra (y siempre que la rotación no sea “muy fuerte”, i.e.  $\mathcal{R} < 1$ ) el signo de  $\mathcal{F}$  pasa a ser positivo, indicando que el peso comienza a “ganar” la competencia y la partícula tiende a deslizar centripetamente, para evitar lo cual se requiere un roce estático que efectivamente tiene la dirección supuesta en nuestro DCL.

La figura 3.11 indica los valores que  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{F}$  toman en función del ángulo de inclinación de la barra bajo el supuesto que la partícula *no ha deslizado sobre ella*. Sin embargo, para verificar que efectivamente no haya habido deslizamiento debemos estar seguros de que se cumpla la condición del roce estático:

$$|F| \leq \mu_e N, \quad (3.68)$$

que para nuestro caso podemos escribir como

$$|\mathcal{F}| \leq \mu \mathcal{N}. \quad (3.69)$$

Notemos que  $\mathcal{N}$  se aproxima a cero cuando la barra se acerca a la verticalidad, mientras que, en general,  $|\mathcal{F}|$  no lo hace. Concluimos entonces que para algún ángulo menor que  $90^\circ$  la desigualdad 3.69 deja de cumplirse. Ese ángulo,  $\theta_*$  es precisamente lo que nos preguntan.

Resolveremos el problema de la siguiente manera. Para cada ángulo  $\theta$  calcularemos la fracción  $|\mathcal{F}|/\mathcal{N}$  de acuerdo a la solución 3.66-3.67. A esta fracción le llamaremos el coeficiente de roce *requerido*,  $\mu_R$ , por cuanto si el coeficiente de roce real ( $\mu$ ) es mayor que este valor requerido ( $\mu > \mu_R$ ) entonces la condición estática es posible, mientras que si  $\mu < \mu_R$  la condición estática no es posible y debe haber ocurrido el deslizamiento antes. Usemos pues 3.66-3.67 para calcular  $\mu_R$ :

$$\mu_R = \frac{|\mathcal{F}|}{\mathcal{N}} = \frac{|-\mathcal{R} + \sin \theta|}{\cos \theta} = \left| -\frac{\mathcal{R}}{\cos \theta} + \tan \theta \right|. \quad (3.70)$$

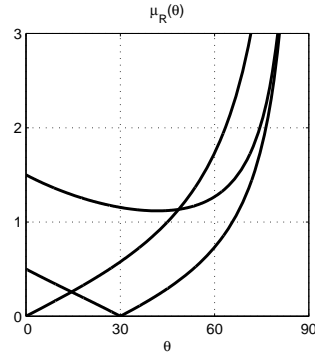


Figura 3.12: Variación de  $\mu_R$  con el ángulo  $\theta$ . Las tres curvas son para  $\mathcal{R} = 0$ ,  $\mathcal{R} = 0,5$ , y  $\mathcal{R} = 1,5$ .

El gráfico de  $\mu_R$  en función de  $\theta$  para distintos valores del parámetro  $\mathcal{R}$  se muestra en la figura 3.12. El valor de  $\mu_R$  para  $\theta = 0$  es  $\mu_R(0) = \mathcal{R}$ . Se desprende de la figura que la solución del problema es

$$\theta_* = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu < \mathcal{R} \\ \theta_s & \text{si } \mu > \mathcal{R} \end{cases} \quad (3.71)$$

donde  $\theta_s$  es solución de la ecuación

$$-\frac{\mathcal{R}}{\cos \theta_s} + \tan \theta_s = \mu. \quad (3.72)$$

La descripción en palabras de esta solución es que para  $\mu < \mathcal{R}$  la partícula desliza radialmente hacia afuera inmediatamente en  $\theta_* = 0$ , mientras que en el caso contrario la partícula desliza centrípetamente en  $\theta_* = \theta_s$ .



## Capítulo 4

# Momento Angular y Torque

Así como en el siguiente capítulo anterior motivaremos la definición de la energía cinética de la partícula preguntándonos qué factores hacen cambiar el módulo de su vector momento, en este capítulo tratamos de responder la pregunta acerca de qué factores hacen cambiar la dirección del vector momento. Esta pregunta es muy relevante en todos los problemas mecánicos que tratan acerca de rotación de la partícula, y en los que nos interesa especialmente su velocidad angular. Nuevamente la respuesta a la pregunta planteada no puede surgir más que de la 2a Ley de Newton.

Antes de entrar en materia, conviene tener presente desde un principio que la rotación no sólo depende del momentum,  $\vec{p}$ , de la partícula, sino que también depende del punto respecto del cual estoy observando o describiendo esa rotación. La figura 4.1 ilustra este hecho. La partícula de la figura se mueve con velocidad constante a lo largo de una recta. Tres observadores fijos ubicados en los puntos A, B y C apreciarán una “rotación” muy distinta de la partícula respecto de ellos. Para el observador en A la partícula no rota ( $\alpha = \pi/2 = \text{constante}$ ). Para el observador en B la partícula rota en sentido antihorario ( $\dot{\beta} < 0$ ). Por último, para el observador en C la rotación es incluso en sentido contrario ( $\dot{\gamma} > 0$ ). Los tres observadores concordarán en el momentum  $\vec{p}$  de la partícula, pero al momento de comparar su observación de la rotación de ella se producirán agrias discusiones! Se hace hincapié en este aspecto, pues en todas las variables relacionadas con rotación uno siempre deberá estar diciendo en forma explícita *respecto a qué punto del espacio* está describiendo o analizando esa rotación.

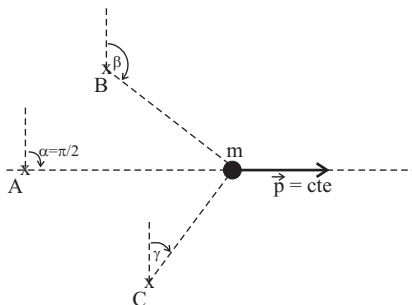


Figura 4.1: Rotación vista por 3 observadores.

## 4.1. Momento Angular

La variable dinámica que resulta más útil para describir la rotación de la partícula es su llamado momento angular. Tal como se dijo recién, se puede definir el momento angular de la partícula respecto de cualquier punto del espacio. Por ejemplo, el momento angular de la partícula respecto al punto A, cuyo vector posición es  $\vec{r}_A$ , se define como

$$\vec{l}_A \equiv (\vec{r} - \vec{r}_A) \times \vec{p} = m(\vec{r} - \vec{r}_A) \times \vec{v}, \quad (4.1)$$

donde  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  son el vector posición y la velocidad de la partícula, respectivamente. En este capítulo nos concentraremos en el momento angular de la partícula *respecto del origen* O,  $\vec{l}_o$ , dado por

$$\vec{l}_o = m\vec{r} \times \vec{v}. \quad (4.2)$$

Mientras no consideremos momentos angulares respecto a otros puntos distintos del origen (cosa que definitivamente haremos en el capítulo de Sistemas de Partículas) a veces “olvidaremos” decir explícitamente “respecto del origen”, pero el subíndice  $_o$  en  $\vec{l}_o$  trataremos de no olvidarlo para tener presente que la rotación descrita es la referida al origen.

Utilizando las expresiones generales de los vectores posición y velocidad en los distintos sistemas de coordenadas que hemos visto, podemos llegar a las siguientes expresiones generales para el momento angular de ella en cada sistema:

$$\vec{l}_o = \begin{cases} m \left[ (yz - zy)\hat{i} + (zx - xz)\hat{j} + (xy - yx)\hat{k} \right] & \text{en cartesianas,} \\ mr^2\dot{\theta}\hat{k} & \text{en polares,} \\ m \left[ r^2\dot{\theta}\hat{k} + (z\dot{r} - r\dot{z})\hat{\theta} - zr\dot{\theta}\hat{r} \right] & \text{en cilíndricas,} \\ mr^2 \left[ \dot{\theta}\hat{\phi} - \dot{\phi}\sin\theta\hat{\theta} \right] & \text{en esféricas,} \end{cases} \quad (4.3)$$

donde en cada caso hemos usado la convención de nomenclatura de ángulos y distancias radiales específica para cada sistema de coordenadas. Repitamos también que las distintas expresiones anteriores son distintas formas de cálculo de un único vector  $\vec{l}_o = m\vec{r} \times \vec{v}$ , que es una propiedad de la partícula, tanto como lo son su posición y su velocidad.

Las expresiones de  $\vec{l}_o$  en polares y esféricas ilustran la estrecha relación entre momento angular y rotación (velocidades angulares  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\phi}$ ), aunque reconocemos que el momento angular depende también de la distancia radial,  $r$ . Por su parte, la mayor complejidad de la expresión de  $\vec{l}_o$  en cartesianas es una muestra de que este sistema no se presta fácilmente para abordar problemas de rotación.

## 4.2. Ecuación del Momento Angular

La ecuación que indica los factores que hacen cambiar el momento angular de la partícula se obtiene derivando primero su definición con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (4.4)$$

donde hemos reconocido que  $d\vec{r}/dt \times \vec{p} = 0$ , por ser ambos vectores paralelos. Luego podemos usar la 2a Ley de Newton en el último término de 4.4 para ver la forma en que las fuerzas actuando sobre la partícula le hacen cambiar su momento angular

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}^{\text{neta}}. \quad (4.5)$$

Considerando que la fuerza neta es la suma vectorial de todas las fuerzas individuales,  $\vec{F}_i$ , actuando sobre la partícula, podemos escribir también

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i. \quad (4.6)$$

Se define el torque de la fuerza  $\vec{F}_i$  respecto del origen  $O$  en la forma

$$\vec{\tau}_{oi} \equiv \vec{r} \times \vec{F}_i, \quad (4.7)$$

con lo que la ecuación del momento angular puede escribirse también en la forma

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{oi} = \vec{\tau}_o^{\text{neto}}, \quad (4.8)$$

que puede expresarse diciendo que el momento angular de la partícula respecto del origen cambia cuando las fuerzas actuando sobre ella ejercen un torque neto respecto del origen.

### 4.3. Torques

Reconociendo que son los torques de las fuerzas los que pueden hacer cambiar el momento angular de la partícula, estudiemos en esta sección en mayor detalle el torque,  $\vec{\tau}_o$ , que una fuerza  $\vec{F}$  ejerce respecto del origen

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.9)$$

En primer lugar el torque es un vector perpendicular tanto a  $\vec{r}$  como a  $\vec{F}$  y cuyo sentido lo entrega la regla de la mano derecha. La magnitud del torque es

$$|\vec{\tau}_o| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha, \quad (4.10)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ . La figura 4.2 muestra la relación entre los vectores de interés. A veces se dice que la magnitud del torque de una fuerza es la magnitud de la fuerza multiplicada por su brazo. En este caso 4.10 muestra que el “brazo” de la fuerza es  $|\vec{r}| \sin \alpha$ , que puede describirse como la distancia entre el origen y la recta de acción de la fuerza (ver figura). Alternativamente podríamos decir que la magnitud del torque es la distancia de aplicación de la fuerza,  $|\vec{r}|$ , multiplicada por la componente “transveral” de ella ( $|\vec{F}| \sin \alpha$ ). Este es un ejemplo en que una misma ecuación matemática (4.10) puede ser descrita verbalmente de 2 maneras distintas.

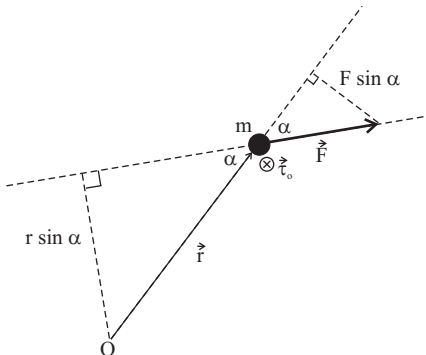


Figura 4.2: Fuerza y Torque.

### 4.3.1. Torques nulos

Es importante reconocer los casos en que los torques de las fuerzas son nulos, por cuanto si finalmente el torque neto ejercido sobre la partícula es nulo, entonces ella mantendrá constante su momento angular. Esta condición aportará un arma extremadamente poderosa para abordar problemas con rotación. De acuerdo a 4.9 una fuerza no ejerce torque respecto el origen en cualquiera de los casos siguientes:

$\vec{r} = \vec{0}$ : La fuerza se aplica en el origen.

$\vec{F} = \vec{0}$ : La fuerza es nula.

$\alpha = 0, \pi$ : La fuerza es paralela al vector posición.

De las condiciones anteriores, la menos trivial es la tercera. Ella también puede expresarse diciendo que toda “fuerza central” que tenga la forma

$$\vec{F} = F\hat{r}, \quad (4.11)$$

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario radial en coordenadas esféricas o polares, no es capaz de ejercer torque respecto del origen. Notemos que esta conclusión depende sólo de la dirección de la fuerza central, por lo que su magnitud  $F$  puede ser tan variable como nos plazca.

## 4.4. Momento angular constante

Si bien la ecuación de momento angular es generalmente útil al tratar problemas con rotación, su máximo poderío se aprecia cuando las condiciones del problema son tales que el torque neto actuando sobre la partícula es cero, en cuyo caso 4.8 nos dice que ella debe tener un momento angular constante. En esta sección, por tanto, veremos qué ganamos sabiendo *a priori* que una partícula tiene  $\vec{l}_o = \text{cte}$ .

Una partícula que tiene  $\vec{l}_o = \text{cte}$  se mueve en un plano. Este teorema se prueba considerando el vector desplazamiento entre dos puntos arbitrarios de la trayectoria de la partícula

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_1^2 \vec{v} dt. \quad (4.12)$$

Haciendo el producto punto de 4.12 con  $\vec{l}_o$  obtenemos

$$\vec{l}_o \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{l}_o \cdot \int_1^2 \vec{v} dt = \int_1^2 \vec{l}_o \cdot \vec{v} dt = 0, \quad (4.13)$$

donde  $\vec{l}_o$  puede entrar dentro de la integral por ser constante, y también hemos usado la propiedad de que el momento angular es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. Hemos probado así que 2 puntos cualquiera de la trayectoria de una partícula que tiene momento angular constante están siempre contenidos en un plano perpendicular al vector momento angular.

La conclusión anterior es extremadamente útil, por cuanto en el caso  $\vec{l}_o = \text{cte}$  el movimiento de la partícula deja de ser 3-D, y lo podemos describir con coordenadas polares en el plano del movimiento. Haciendo esto, 4.3 nos dice que  $\vec{l}_o = \text{cte}$  equivale entonces a la condición

$$mr^2\dot{\theta} = \text{cte}. \quad (4.14)$$

Normalmente la constante de la ecuación anterior se evalúa en una condición inicial o particular. Conociendo dicha constante, 4.14 nos permite conocer, para cualquier otro instante, la velocidad angular de la partícula si conocemos su distancia al origen, o viceversa. Vemos de inmediato que la restricción 4.14 indica que si la partícula conserva su momento angular, entonces girará más rápido mientras más cerca del origen se encuentre, y girará más lento si se aleja del origen.

#### 4.4.1. Momento angular parcialmente constante

Un caso frecuente que aparece en algunos problemas de rotación ocurre cuando sólo una componente del momento angular es constante. En este caso el movimiento de la partícula puede ser 3-D, por lo que partiremos el análisis considerando la ecuación de momento angular en coordenadas cilíndricas. Reescribamos el momento angular en cilíndricas

$$\vec{l}_o = m \left[ r^2 \dot{\theta} \hat{k} + (z\dot{r} - r\dot{z})\hat{\theta} - zr\dot{\theta}\hat{r} \right]. \quad (4.15)$$

Nos concentraremos en la componente según  $\hat{k}$  de la ecuación de momento angular (dirección que por simplicidad llamaremos “vertical”). Al derivar 4.15 con respecto al tiempo, el único término que aporta una componente vertical es el primer sumando, puesto que los vectores unitarios cilíndricos  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  “viven” en el plano  $z = 0$ . Por lo tanto,

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} \cdot \hat{k} = m \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt}. \quad (4.16)$$

Por el lado de los torques, consideremos que la fuerza neta actuando sobre la partícula la hemos expresado en sus componentes cilíndricas en la forma

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{k} \quad (4.17)$$

por lo que el torque neto es

$$\vec{\tau}_o = (r\hat{r} + z\hat{k}) \times (F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{k}), \quad (4.18)$$

siendo su componente vertical

$$\vec{\tau}_o \cdot \hat{k} = rF_\theta. \quad (4.19)$$

Por lo tanto, la componente según  $\hat{k}$  de la ecuación de momento angular es

$$m \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} = rF_\theta. \quad (4.20)$$

De aquí que si en un problema la fuerza neta acimutal,  $F_\theta$ , es nula podemos concluir que la componente “vertical” del momento angular,  $mr^2\dot{\theta}$  es constante. Esta restricción, siendo algo más débil que la constancia del momento angular completo, sigue siendo extremadamente poderosa.

La ecuación 4.20 nos permite extraer una última conclusión acerca de la relación entre la componente vertical del momento angular y la aceleración acimutal. De la 2a Ley de Newton sabemos que la fuerza neta acimutal y la aceleración acimutal están relacionadas por

$$ma_\theta = F_\theta. \quad (4.21)$$

Combinando 4.20 y 4.21 para eliminar  $F_\theta$ , obtenemos

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} \quad (4.22)$$

que es algo que siempre se cumple, puesto que sabemos del primer capítulo del curso que en cilíndricas la aceleración acimutal es

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}. \quad (4.23)$$

Podemos escribir la ecuación 4.20 en esféricas recordando que el  $r$  cilíndrico es  $r \sin \theta$  de las coordenadas esféricas, y que el  $\theta$  cilíndrico es el  $\phi$  esférico. Por lo tanto en coordenadas esféricas 4.20 equivale a

$$m \frac{d((r \sin \theta)^2 \dot{\phi})}{dt} = r \sin \theta F_\phi. \quad (4.24)$$

En este caso si la fuerza acimutal,  $F_\phi$ , es nula entonces la componente vertical del momento angular,  $m(r \sin \theta)^2 \dot{\phi}$  es constante. Más aún, considerando la componente acimutal de la ecuación de movimiento

$$ma_\phi = F_\phi \quad (4.25)$$

llegamos a la relación válida para coordenadas esféricas

$$a_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d((r \sin \theta)^2 \dot{\phi})}{dt}, \quad (4.26)$$

que es algo que en el capítulo de cinemática simplemente constatamos, pero cuya razón ahora podemos apreciar. La clave de esta íntima relación entre la aceleración acimutal y la variación temporal de la componente vertical del momento angular es que, en coordenadas esféricas o cilíndricas, la fuerza neta acimutal es la única responsable tanto de la aceleración acimutal, como de la componente vertical del torque.

## 4.5. Ejemplos

### 4.5.1. Ejemplo 1

Consideremos una partícula de masa  $m$  sobre una mesa horizontal sin roce. La partícula está atada a una cuerda que la hace girar en torno al punto O (ver Figura 4.3). La cuerda es recogida a una tasa constante,  $v_o$ , a partir de una condición en que  $r = R$  y  $\dot{\theta} = \Omega_o$ . Se pide determinar la distancia a la que la tensión de la cuerda es el doble de la tensión en el instante inicial considerado.

La tensión de la cuerda aparece en la componente radial de la ecuación de movimiento,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T \quad (4.27)$$

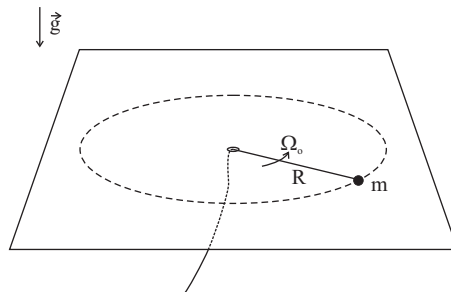


Figura 4.3: Partícula de Ejemplo 1.

y dado que en este problema tiramos de la cuerda con  $\dot{r} = -v_o = \text{cte}$ , entonces  $\ddot{r} = 0$ , por lo que la tensión en cualquier instante resulta

$$T = mr\dot{\theta}^2. \quad (4.28)$$

La tensión inicial es entonces  $T_o = mR\Omega_o^2$ . En instantes posteriores depende de cómo cambia  $r$  y  $\theta$ . La variación de estos términos la buscaremos recurriendo a la ecuación del momento angular. Se conservará  $\vec{l}_o$  para esta partícula? Para responder esta pregunta debemos analizar si las fuerzas que actúan sobre ella ejercen un torque neto respecto del origen. Las fuerzas actuando son la tensión, el peso y la normal. La tensión es una fuerza central en este movimiento, por lo que no puede ejercer torque. El peso y la normal ejercen torque, pero ambos se cancelan entre sí (verificarlo). Por lo tanto, el torque neto de las fuerzas respecto del origen es efectivamente nulo y  $\vec{l}_o$  de la partícula es constante. De 4.14 entonces se tiene

$$mr^2\dot{\theta} = \text{cte} = mR^2\Omega_o, \quad (4.29)$$

donde la constante se evaluó en la condición inicial conocida. De 4.29 la velocidad angular en función del radio es

$$\dot{\theta} = \frac{R^2\Omega_o}{r^2}, \quad (4.30)$$

lo que podemos reemplazar en 4.28 para obtener la tensión en función del radio

$$T = m\frac{R^4\Omega_o^2}{r^3}, \quad (4.31)$$

con lo que la pregunta inicial puede ser respondida (propuesto).

Las ecuaciones 4.30 y 4.31 muestran que en las condiciones de este problema a medida que recogemos la cuerda la tensión de la cuerda aumenta con  $r^{-3}$  y la velocidad angular de la partícula aumenta con  $r^{-2}$ . Este aumento de la velocidad angular a medida que la partícula se acerca a su eje de rotación es un comportamiento típico de sistemas que conservan momento angular. Digamos también que este mismo problema puede ser resuelto igualmente a partir de las ecuaciones de movimiento sin pasar por el momento angular. En este caso se propone verificar que de la componente acimutal de la ecuación de movimiento obtenemos la misma condición 4.29.

### 4.5.2. Ejemplo 2

La misma partícula anterior, pero ahora ella se mueve sin roce por el interior de un tubo que tiene velocidad angular constante  $\Omega_o$  (ver Figura 4.4). La cuerda se recoge a la misma tasa y la pregunta es la misma.

Siendo este también un movimiento plano podemos expresar el momento angular de la partícula en polares,

$$\vec{l}_o = mr^2\dot{\theta}\hat{k}. \quad (4.32)$$

Se conserva el momento angular de la partícula en este caso? Claramente no se conserva, puesto a medida que recogemos la cuerda  $r$  va cambiando pero el tubo obliga a que la partícula mantenga constante su  $\dot{\theta} = \Omega_o$ . Si  $\vec{l}_o$  cambia entonces deben existir un torque que lo haga cambiar. En efecto, en este problema aparece una fuerza adicional respecto de las fuerzas que había en el problema anterior. La fuerza adicional que aparece es la normal acimutal que la pared del tubo ejerce sobre la partícula. Esta fuerza acimutal efectivamente ejerce torque respecto del origen, por lo que la partícula ahora no conserva  $\vec{l}_o$ .

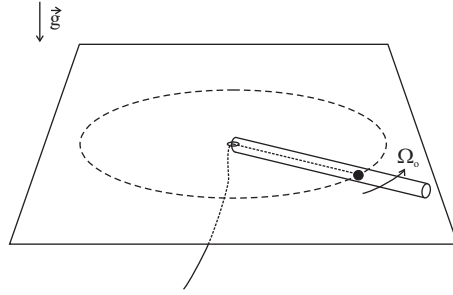


Figura 4.4: Partícula de Ejemplo 2.

La componente radial de la ecuación de movimiento nos sigue informando acerca de la tensión en este caso

$$-mr\dot{\theta}^2 = -T \quad (4.33)$$

donde mantenemos la condición de tirar de la cuerda a tasa constante ( $\ddot{r} = 0$ ). Ahora, eso sí,  $\dot{\theta} = \Omega_o$  es también constante, por lo que la tensión en función de  $r$  es

$$T = mr\Omega_o^2. \quad (4.34)$$

Notamos ahora que si recogemos la cuerda entonces la tensión disminuye!. Por lo tanto, para duplicar la tensión en este caso debemos *liberar* la cuerda a tasa constante. Se deja propuesto terminar el problema y verificar también que se cumple la ecuación del momento angular, en este caso

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = r\hat{r} \times N_\theta\hat{\theta}, \quad (4.35)$$

donde  $N_\theta$  se puede conocer a partir de la componente acimutal de la ecuación de movimiento.

### 4.5.3. Ejemplo 3

Consideremos la partícula atada a una cuerda sobre una mesa horizontal como en el ejemplo 1, pero ahora agregamos un roce viscoso con el aire que tenga la forma

$$\vec{F}_r = -c\vec{v}, \quad (4.36)$$

donde  $c$  es una constante positiva. Sin el roce, la partícula del ejemplo 1 conservaba constante su momento angular. Para saber ahora qué pasa con  $\vec{l}_o$  es necesario calcular el torque ejercido por el roce viscoso:

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}_r = -c\vec{r} \times \vec{v} = -\frac{c}{m}\vec{l}_o, \quad (4.37)$$

por lo tanto, la ecuación del momento angular es en este caso

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = -\frac{c}{m}\vec{l}_o. \quad (4.38)$$

Vemos que en este caso el momento angular no es constante, sino que el roce viscoso lo hace disminuir exponencialmente a cero. Dado que el problema es plano, la solución de 4.38 es

$$r^2\dot{\theta} = r_o^2\dot{\theta}_o e^{-(c/m)t}, \quad (4.39)$$



donde  $r_o$  y  $\dot{\theta}_o$  son la distancia radial y la velocidad angular de la partícula en  $t = 0$ . Vemos que en este caso, aunque el momento angular no es constante, igual la ecuación de momento angular nos entrega una fuerte relación entre  $\dot{\theta}$  y  $r$ . En el caso particular en que no tirásemos de la cuerda y  $r = r_o$  en todo instante, la solución 4.39 nos dice que la velocidad angular de la partícula disminuiría exponencialmente a cero debido al roce viscoso.

#### 4.5.4. Ejemplo 4

En el ejemplo 1 vimos que al recoger la cuerda la conservación de momento angular hace que la partícula gire cada vez más rápido. Por su parte, el ejemplo 3 nos dice que el roce viscoso tiende a hacer disminuir el momento angular de la partícula. Ambas observaciones nos sugieren la posibilidad de que exista una forma de recoger la cuerda ( $r(t) = ?$ ) tal que - existiendo roce viscoso - la partícula mantenga su velocidad angular constante. Se pide determinar  $r(t)$  (propuesto).

#### 4.5.5. Ejemplo 5

Terminemos estos ejemplos con un caso 3-D. Consideremos la Figura 4.5 en que una partícula desliza sin roce *por el exterior* de una superficie cónica de eje vertical y semiángulo de apertura  $\alpha$ . En la condición inicial la partícula se ubica a una distancia  $R$  del vértice del cono y su velocidad forma un ángulo  $\beta$  con la generatriz del cono. Se pide establecer un sistema de ecuaciones que permita determinar la máxima rapidez inicial que puede tener la partícula ( $v_o$ ) tal que ella no se despegue del cono.

Ya que nos preguntan por un despegue debemos partir por la ecuación donde aparece la normal. Usando coordenadas esféricas, la componente cenital de la ecuación de movimiento es (para movimiento sobre un cono con  $\theta = \text{cte}$ ):

$$-mr\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -N + mg \sin \theta. \quad (4.40)$$

En este caso  $\theta = \pi - \alpha$  por lo que la normal resulta

$$N = mg \sin \alpha - mr\dot{\phi}^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.41)$$

El último término de la mano derecha da la posibilidad de que la normal eventualmente se anule. Este término depende del factor  $r\dot{\phi}^2$ , en que tanto  $r$  como  $\dot{\phi}$  cambian en el tiempo. Para eliminar una de las variables recurriremos al momento angular. Dado que en este problema no hay fuerzas acimutales, recordamos de la sección 4.4.1 que la componente vertical del momento angular debe ser constante, es decir,

$$(r \sin \theta)^2 \dot{\phi} = \text{cte}, \quad (4.42)$$

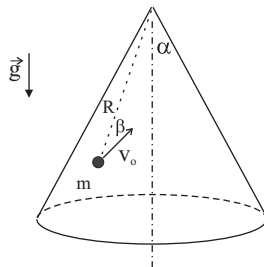


Figura 4.5: Partícula de Ejemplo 5.

pero dado que  $\theta$  es de por sí constante (en la medida que la partícula no se separe del cono), entonces

$$r^2 \dot{\phi} = h_o, \quad (4.43)$$

donde  $h_o$  es una constante a evaluar con la condición inicial. Reemplazando 4.43 en 4.41 obtenemos la normal en función de  $r$ :

$$N = mg \sin \alpha - m \frac{h_o^2}{r^3} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.44)$$

4.44 muestra que si  $r$  disminuye, la normal disminuye. Podemos calcular la distancia  $r_D$  en que la partícula se despegaría, imponiendo en 4.44 la condición  $N = 0$ , de donde

$$r_D = \left( \frac{h_o^2 \cos \alpha}{g} \right)^{1/3}. \quad (4.45)$$

Por lo tanto, para garantizar que la partícula no despegue, debemos asegurarnos que el mínimo valor de  $r$  que ella alcance sea a lo más igual a  $r_D$ .

Nos preocupamos ahora de determinar el  $r_{\min}$  que la partícula alcanza en su movimiento. El mínimo  $r$  corresponde en este problema a la máxima altura que la partícula asciende. Considerando que en este problema la única fuerza que realiza trabajo es conservativa (peso), el máximo ascenso lo determinaremos recurriendo a la ecuación de conservación de la energía mecánica total. En la condición inicial la EMT es

$$EMT_i = \frac{1}{2} m v_o^2 - mgR \cos \alpha \quad (4.46)$$

donde hemos elegido el vértice del cono como la altura de referencia para la energía potencial del peso. Por su parte, en un instante arbitrario de la trayectoria la EMT será

$$EMT = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r \sin \alpha \dot{\phi})^2) - mgr \cos \alpha. \quad (4.47)$$

La ecuación de momento angular me permite nuevamente eliminar  $\dot{\phi}$  en favor de  $r$ , de donde

$$EMT(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \frac{h_o^2}{r^2} \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha. \quad (4.48)$$

En particular, en el punto más alto de la trayectoria  $r = r_{\min}$  y  $\dot{r} = 0$  (por ser justamente el radio mínimo), por lo que

$$EMT(r_{\min}) = \frac{1}{2} m \frac{h_o^2}{r_{\min}^2} \sin^2 \alpha - mgr_{\min} \cos \alpha. \quad (4.49)$$

Imponiendo que la EMT sea constante obtenemos una ecuación para el radio mínimo igualando 4.46 y 4.49

$$\frac{1}{2} m \frac{h_o^2}{r_{\min}^2} \sin^2 \alpha - mgr_{\min} \cos \alpha = \frac{1}{2} m v_o^2 - mgR \cos \alpha. \quad (4.50)$$

El caso crítico del problema es cuando la partícula se despega justo al llegar a su radio mínimo, por lo que la ecuación a imponer es

$$r_{\min} = r_D. \quad (4.51)$$

Por último se deben agregar las condiciones iniciales

$$h_o = R^2 \dot{\phi}_o, \quad (4.52)$$

$$v_o^2 = (R \sin \alpha \dot{\phi}_o)^2 + \dot{r}_o^2, \quad (4.53)$$

$$\dot{r}_o = -v_o \cos \beta. \quad (4.54)$$

Las ecuaciones 4.45, 4.50-4.54 conforman un sistema para las incógnitas  $r_{\min}$ ,  $r_D$ ,  $h_o$ ,  $v_o$ ,  $\dot{\phi}_o$  y  $\dot{r}_o$ . Se deja propuesto combinar estas ecuaciones para obtener una ecuación cúbica que permita encontrar  $v_o$ .



## Capítulo 5

# Energía y Trabajo

La Segunda Ley de Newton nos dice que el vector  $\vec{p}$  de la partícula cambia en el tiempo en función de las fuerzas que actúan sobre ella. El cambio de  $\vec{p}$  puede consistir en un cambio en su magnitud, un cambio en su dirección o en ambas propiedades a la vez. Resulta natural por tanto tratar de distinguir de qué forma las fuerzas afectan la magnitud de  $\vec{p}$  y de qué forma afectan su dirección. Esto último lo estudiamos en el capítulo anterior encontrando que la variable dinámica que mejor describe los cambios de dirección del vector momento de una partícula es el momento angular, el cual cambia debido a los torques de las fuerzas. Ahora nos preguntaremos qué hace cambiar la magnitud del vector momento. La variable dinámica más útil en este caso es la que llamaremos energía cinética,  $K$ , de la partícula y mostraremos que es el trabajo de las fuerzas el que produce su cambio.

### 5.1. Energía cinética

Partamos considerando la ecuación de Newton expresada en coordenadas naturales

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \left( \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n} \right) = \vec{F}. \quad (5.1)$$

Si nos interesa el cambio de magnitud de la velocidad nos conviene hacer el producto punto de 5.1 con  $\vec{v} = v\hat{t}$ , de donde

$$mv \frac{dv}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (5.2)$$

Definimos para la partícula de masa  $m$  su energía cinética como

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2, \quad (5.3)$$

de donde 5.2 puede reescribirse como

$$\frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (5.4)$$

Claramente  $K$ , aunque no es igual, está muy relacionada con la magnitud de  $\vec{p} = m\vec{v}$ . La ecuación 5.4 nos dice de qué manera las fuerzas pueden hacer cambiar la energía cinética de la partícula: sólo cuando la fuerza neta tiene una componente paralela (o antiparalela) a la velocidad, la energía cinética podrá cambiar. Por el contrario, cuando la fuerza neta es perpendicular a la velocidad, la energía cinética de la partícula se mantiene constante. En este caso la dirección del momento podría cambiar, pero su magnitud es constante.

$K$  tiene dimensiones  $[ML^2T^{-2}]$  y en el SI sus unidades son  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ . La ecuación 5.4 está expresada en energía por unidad de tiempo, que corresponde al concepto de potencia, con unidades SI  $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$ .

Muchas veces en este curso nos interesa integrar en el tiempo la ecuación 5.4 de tal manera de conocer el cambio de energía cinética de un partícula entre un instante inicial  $t_i$  y un instante final  $t_f$ . Integremos entonces 5.4:

$$K_f - K_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot \vec{v} dt, \quad (5.5)$$

donde  $K_f$  y  $K_i$  son las energías cinéticas final e inicial de la partícula, respectivamente. La integral en 5.5 puede hacerse directamente si se conoce  $\vec{F}(t)$  y  $\vec{v}(t)$ . Muchas veces, sin embargo, se conoce la fuerza en función del espacio, es decir, se conoce el campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$ . En este caso el hecho de que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (5.6)$$

nos permite hacer un cambio de variable en la integral pasándola de una integral en el tiempo a una integral en el espacio

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.7)$$

Sin embargo, en este cambio de variable de integración debemos ser muy cuidadosos puesto que el  $d\vec{r}$  por el cual hacemos la integral no es cualquiera, sino que es el  $d\vec{r}$  que va siguiendo pasito a pasito la trayectoria seguida por la partícula. Para recalcar esto la integral espacial en 5.7 la escribimos mejor

$$\int_{\vec{r}_i, \mathcal{C}}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.8)$$

donde  $\mathcal{C}$  corresponde a la trayectoria seguida por la partícula en su movimiento. Este tipo de integrales se denomina integral de línea o curvilínea pues se integra sobre una curva en el espacio. El Apéndice C de estos apuntes contiene un breve resumen de este artilugio matemático y en algún otro curso se presenta su teoría más general.

La integral en 5.8 es tan importante en la ecuación de la energía cinética, que recibe un nombre: es el trabajo efectuado por la fuerza  $\vec{F}$  entre los puntos  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_f$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$ . Matemáticamente:

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}} \equiv \int_{\vec{r}_i, \mathcal{C}}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.9)$$

Podemos ver que la notación para el trabajo es bastante engorrosa, y ella debe ser así ya que su valor depende en general de todo lo que ella indica: el punto inicial, el punto final, la curva seguida entre ambos y la fuerza considerada. Con 5.9, la ecuación 5.5 queda

$$K_f - K_i = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_i, \mathcal{C}}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.10)$$

De acuerdo a 5.10, la energía cinética de la partícula cambia según el trabajo de la fuerza neta actuando sobre ella, el cual es la suma de los trabajos de cada una de las fuerzas que componen la fuerza neta. En otras palabras,

$$K_f - K_i = W^{\text{neto}} = \sum_j W^{\vec{F}_j}, \quad (5.11)$$

en que todos los trabajos de cada fuerza individual,  $\vec{F}_j$ , son calculados sobre la misma trayectoria  $\mathcal{C}$  y los mismos puntos inicial y final de la partícula. Por lo tanto, siempre podemos considerar el trabajo de cada fuerza individual, teniendo presente que la energía cinética de la partícula cambiará o no cambiará de acuerdo a cómo resulte la suma de estos trabajos individuales.

De acuerdo a la definición del trabajo 5.9, podemos inmediatamente establecer condiciones en que una fuerza  $\vec{F}$  no realiza trabajo (y, por ende, no induce una tendencia sobre la energía cinética de la partícula). Los distintos casos son

**Fuerza nula.** Una fuerza nula claramente produce trabajo nulo. Esta condición no es tan trivial como parece a simple vista pues muchas veces la fuerza nula será la suma de dos fuerzas no-nulas que se cancelan por alguna condición dinámica del problema.

**Desplazamiento nulo.** Las fuerzas que actúan sobre una partícula en reposo no producen trabajo. Nuevamente esta condición parece trivial pero puede causar un dolor de cabeza si uno se pregunta qué pasa con una partícula inicialmente en reposo que comienza a moverse por la aplicación de una fuerza neta no nula. Estando la partícula inicialmente en reposo, cómo pudo la fuerza realizar un trabajo no nulo que aumentase la energía cinética de la partícula?. Es casi como un problema de huevo y gallina que se deja propuesto resolver.

**Fuerza perpendicular al desplazamiento.** Este es el caso más interesante y menos trivial. Una fuerza que siempre es perpendicular al desplazamiento de la partícula es incapaz de producir trabajo, y por tanto, de inducir una tendencia en la energía cinética. Esta condición justifica que muchas veces el trabajo de las normales sea inmediatamente declarado nulo, ya que justamente si el desplazamiento de la partícula es tangente a la superficie y la normal es perpendicular a ella, entonces su trabajo es nulo por esta condición. Sin embargo esta regla dista mucho de ser una regla universal, por cuanto si la superficie es móvil, entonces parte del desplazamiento absoluto de la partícula tiene muchas veces una componente paralela a la normal y, por lo tanto, el trabajo de la normal en este caso puede ser perfectamente distinto de cero.

## 5.2. Trabajo

Ya hemos contestado la pregunta que nos planteamos inicialmente: el cambio de energía cinética de la partícula obedece al trabajo de las fuerzas que actúan sobre ella. Corresponde ahora que para las fuerzas que ya conocemos, calculemos su trabajo en distintas circunstancias, de tal forma de aprender cómo se hace el cálculo del trabajo y apreciar qué tipos de resultados se obtienen.

### 5.2.1. Trabajo de fuerza constante

Consideremos primeramente un campo de fuerzas constante en el tiempo y uniforme en el espacio,  $\vec{F}_o$ . El trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve desde el punto  $\vec{r}_i$  al punto  $\vec{r}_f$  siguiendo la trayectoria  $\mathcal{C}$  se calcula por definición como

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}_o} = \int_{\vec{r}_i, \mathcal{C}}^{\vec{r}_f} \vec{F}_o \cdot d\vec{r}. \quad (5.12)$$

Sin embargo, como esta fuerza es absolutamente constante, ella no cambia a lo largo de la trayectoria y, por lo tanto, puede salir fuera de la integral del trabajo, de tal manera que

ahora

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}_o} = \vec{F}_o \cdot \int_{\vec{r}_i, \mathcal{C}}^{\vec{r}_f} d\vec{r}. \quad (5.13)$$

La integral ahora se puede realizar explícitamente pues es la integral de un diferencial exacto  $d\vec{r}$ . El resultado del trabajo es entonces

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}_o} = \vec{F}_o \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i) = (\vec{F}_o \cdot \vec{r}_f) - (\vec{F}_o \cdot \vec{r}_i). \quad (5.14)$$

Notemos algunas propiedades importantes del resultado obtenido:

El trabajo de esta fuerza constante se puede calcular como la diferencia de la función escalar  $\vec{F}_o \cdot \vec{r}$  evaluada en los puntos final e inicial de la trayectoria.

El trabajo resulta independiente del camino recorrido, en la medida que los puntos inicial y final sean los mismos.

El trabajo efectuado por la fuerza  $\vec{F}_o$  cuando la partícula se mueve desde el punto A a B es menos el trabajo cuando la partícula se mueve desde B a A.

Estas propiedades son fáciles de demostrar para el trabajo de  $\vec{F}_o$ . Son propiedades extremadamente útiles, pero que, como veremos, no son universales para el trabajo efectuado por cualquier campo de fuerza.

### Caso particular: trabajo del peso

Un ejemplo común de un campo de fuerza constante es el peso percibido por una partícula moviéndose cerca de la superficie de la Tierra. En este caso  $\vec{F}_o = m\vec{g}$ , de tal forma que su trabajo es

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{m\vec{g}} = (m\vec{g} \cdot \vec{r}_f) - (m\vec{g} \cdot \vec{r}_i). \quad (5.15)$$

Si la posición de la partícula es descrita con coordenadas cartesianas cuyo eje Z apunta verticalmente hacia arriba, entonces

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (5.16)$$

$$\vec{g} = -g\hat{k}, \quad (5.17)$$

de tal forma que el trabajo del peso resulta simplemente

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{m\vec{g}} = -mgz_f + mgz_i = mgz_i - mgz_f. \quad (5.18)$$

### 5.2.2. Trabajo de roce viscoso

Consideremos una partícula sujeta a una fuerza de roce viscoso lineal

$$\vec{F}_{rv} = -k\vec{v}. \quad (5.19)$$

Supongamos que además existen otras fuerzas que la afectan, de tal forma que en el movimiento resultante la partícula se mueve desde  $\vec{r}_i$  hasta  $\vec{r}_f$  por la curva  $\mathcal{C}$  manteniendo una rapidez constante  $v_o$ . El trabajo efectuado por la fuerza de roce viscoso es entonces

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}_{rv}} = \int_{\vec{r}_i, \mathcal{C}}^{\vec{r}_f} -k\vec{v} \cdot d\vec{r}. \quad (5.20)$$



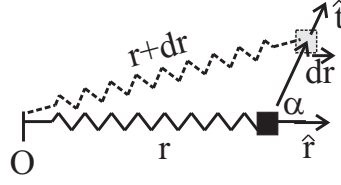


Figura 5.1: Resorte en 3-D con desplazamiento arbitrario.

Pero en este caso

$$\vec{v} = v_o \hat{t}, \quad (5.21)$$

$$d\vec{r} = ds \hat{t}, \quad (5.22)$$

donde  $\hat{t}$  es el vector unitario tangente a la trayectoria y  $s$  es la coordenada correspondiente a la distancia recorrida sobre la trayectoria. Reemplazando 5.21-5.22 en 5.20

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, c}^{\vec{F}_{rv}} = \int_{s_i, c}^{s_f} -k v_o ds = -k v_o \int_{s_i, c}^{s_f} ds = -k v_o S_{if}, \quad (5.23)$$

donde  $S_{if}$  es la longitud de la trayectoria entre los puntos  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_f$ .

Notemos algunas propiedades importantes del resultado obtenido:

El trabajo de esta fuerza depende fuertemente de la trayectoria recorrida entre los puntos  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_f$ . Para los mismos puntos, obtenemos un trabajo distinto si la trayectoria fue el camino recto entre ambos, o la partícula se dió varias vueltas entre medio.

El trabajo efectuado por la fuerza resulta siempre negativo, pues el roce se opone siempre al movimiento ( $\vec{F}$  antiparalelo con  $d\vec{r}$ ). Si la partícula se devuelve desde B a A siguiendo la misma trayectoria con la misma rapidez, el trabajo del roce es idéntico al de la ida (negativo), pero si no se cumplen todas esas condiciones, nos puede salir cualquier otro valor (negativo).

Estas propiedades son fáciles de demostrar para el trabajo del roce viscoso considerado. Son propiedades que obligan siempre a calcular explícitamente el trabajo de este tipo de fuerzas para la trayectoria exacta que siguió la partícula.

### 5.2.3. Trabajo de fuerza de resorte

Calculemos el trabajo efectuado por una fuerza elástica tipo resorte. Consideraremos un problema 3-D en que el origen de un sistema esférico es puesto en el punto fijo del resorte y la partícula tiene un desplazamiento  $d\vec{r}$  que forma un ángulo  $\alpha$  con el vector unitario radial (ver figura 5.1). En este caso el trabajo del resorte se calcula como

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, c}^{\vec{F}_e} = \int_{\vec{r}_i, c}^{\vec{r}_f} -k(r-l_o) \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i, c}^{\vec{r}_f} -k(r-l_o) \hat{r} \cdot ds \hat{t} = \int_{\vec{r}_i, c}^{\vec{r}_f} -k(r-l_o) \cos \alpha ds. \quad (5.24)$$

Para poder hacer la integral debemos relacionar las variables  $l$  con  $s$ . Esta relación resulta de la geometría del problema mostrada en la figura 5.1. Aplicando el teorema del coseno al triángulo de la figura se obtiene

$$r^2 + ds^2 + 2rds \cos \alpha = (r + dr)^2 = r^2 + dr^2 + 2rdr. \quad (5.25)$$

Cancelando términos y despreciando los elementos diferenciales cuadráticos respecto de los lineales, se obtiene

$$dr = ds \cos \alpha. \quad (5.26)$$

Podemos reemplazar en 5.24 y obtener una integral en  $r$  que podemos calcular:

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}_e} = \int_{r_i, \mathcal{C}}^{r_f} -k(r - l_o) dr = -\frac{1}{2}k(r_f - l_o)^2 + \frac{1}{2}k(r_i - l_o)^2. \quad (5.27)$$

El trabajo de esta fuerza cumple similares propiedades que el de la fuerza constante y el peso, esto es:

El trabajo de la fuerza elástica se puede calcular como la diferencia de la función escalar  $\frac{1}{2}k(r - l_o)^2$  evaluada en los puntos inicial y final de la trayectoria.

El trabajo resulta independiente del camino recorrido, en la medida que los puntos inicial y final sean los mismos.

El trabajo efectuado por la fuerza elástica cuando la partícula se mueve desde el punto A a B es menos el trabajo cuando la partícula se mueve desde B a A.

### 5.3. Fuerzas Conservativas y Energía Potencial

Llamaremos fuerzas conservativas a aquellas fuerzas, como el peso y la fuerza elástica, cuyo trabajo puede calcularse como la diferencia de una función escalar evaluada en los puntos inicial y final de la trayectoria. Es decir, si  $\vec{F}_c(\vec{r})$  es una fuerza conservativa, entonces existe una función escalar,  $V_{\vec{F}_c}$ , tal que su trabajo puede calcularse como

$$W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}_c} = V_{\vec{F}_c}(\vec{r}_i) - V_{\vec{F}_c}(\vec{r}_f). \quad (5.28)$$

La función escalar  $V_{\vec{F}_c}(\vec{r})$  recibe el nombre de energía potencial asociada a la fuerza conservativa  $\vec{F}_c$ . Claramente el trabajo de una fuerza conservativa no depende del camino recorrido ya que sólo depende de la energía potencial evaluada en ambos puntos extremos. También se puede ver que el trabajo que efectúa la fuerza conservativa cuando la partícula se mueve desde un punto A a un punto B es menos el trabajo efectuado en el camino de vuelta.

Los nombres “conservativo” y “energía potencial” se entienden al considerar una partícula sometida solamente a una fuerza conservativa. En este caso la ecuación de la energía cinética 5.10 se puede escribir

$$K_f - K_i = W_{\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f, \mathcal{C}}^{\vec{F}_c} = V_{\vec{F}_c}(\vec{r}_i) - V_{\vec{F}_c}(\vec{r}_f), \quad (5.29)$$

de donde se obtiene que

$$K_i + V_{\vec{F}_c}(\vec{r}_i) = K_f + V_{\vec{F}_c}(\vec{r}_f). \quad (5.30)$$

Esto muestra que cuando sólo existen fuerzas conservativas en el problema, la partícula mantiene constante (es decir, conserva) la suma  $K + V_{\vec{F}_c}$ . Esta suma de la energía cinética más la(s) energía(s) potencial(es) asociada(s) a la(s) fuerza(s) conservativa(s) que actúa(n) en el problema recibe el nombre de Energía Mecánica Total (EMT) de la partícula. En un problema en que sólo actúan fuerzas conservativas la partícula conserva su EMT, aunque en su movimiento perfectamente puede transformar parte de su energía cinética en energía potencial o parte de su energía potencial en energía cinética.

De lo visto en la sección anterior, podemos inmediatamente decir que el peso y la fuerza elástica son conservativas, y que sus energías potenciales son

$$V_{mg}(\vec{r}) = mgz, \quad (5.31)$$

$$V_{Fe}(\vec{r}) = \frac{1}{2}k(r - l_o)^2, \quad (5.32)$$

donde en el primer caso la coordenada  $z$  apunta en la dirección contraria a  $\vec{g}$  y en el segundo la coordenada  $r$  tiene su origen en el punto fijo del resorte.

## 5.4. Ecuación de la EMT

Cuando en el problema existen fuerzas conservativas y no conservativas, la ecuación de la energía cinética queda

$$K_f - K_i = W_{fc} + W_{fnc}. \quad (5.33)$$

El trabajo de las fuerzas conservativas puede calcularse como la diferencia de las energías potenciales y ser pasado a la mano izquierda de 5.33, para obtener finalmente la ecuación de la EMT:

$$EMT_f - EMT_i = W_{fnc}, \quad (5.34)$$

que puede enunciarse diciendo que el cambio de la EMT de una partícula se origina en el trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan sobre ella.

## 5.5. 3 Preguntas

Habiendo presentado los conceptos de fuerzas conservativas y energía potencial, terminemos el capítulo contestando tres preguntas básicas.

### 5.5.1. Dado $\vec{F}_c(\vec{r})$ , cómo calculo $V_{\vec{F}_c}(\vec{r})$ ?

Para una fuerza conservativa,  $\vec{F}$ , y su energía potencial,  $V$ , la relación entre ambas está dada por

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_i) - V(\vec{r}_f). \quad (5.35)$$

En esta pregunta consideramos conocido  $\vec{F}(\vec{r})$  y nuestra incógnita es  $V(\vec{r}_f)$ . Despejando de 5.35 obtenemos

$$V(\vec{r}_f) = V(\vec{r}_i) - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.36)$$

Consideraremos que  $\vec{r}_i$  es un punto de referencia  $\vec{r}_{ref}$  al cual asignaremos un valor de energía potencial de referencia,  $V_{ref}$ . Por otra parte, nuestro vector  $\vec{r}_f$  será nuestro vector  $\vec{r}$  que apunta a cualquier punto del espacio. Entonces 5.36 queda como

$$V(\vec{r}) = V_{ref} - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5.37)$$

Si definimos  $V_{ref} = 0$  podemos finalmente llegar a

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_{ref}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (5.38)$$

que puede enunciarse diciendo que la energía potencial de una fuerza conservativa en un cierto punto es el trabajo realizado por esta fuerza cuando la partícula se mueve desde ese punto a un punto de referencia al que hemos asignado una energía potencial nula.

Debemos notar dos cosas importantes. Primero, la integral del trabajo en 5.38 puede hacerse por cualquier camino, dado que sabemos a priori que la fuerza es conservativa. Al momento de realizar el cálculo elegiremos el camino que simplifique el cálculo de la integral. En segundo lugar, la definición y el uso de la energía potencial siempre depende de diferencias de energía en dos puntos del espacio. Es por esto que siempre podemos asignar el valor  $V_{ref}$  a algún punto arbitrario del espacio, ya que al hacer las diferencias de energía potencial esa constante arbitraria desaparece. Elegiremos el punto de referencia tal que simplifique la expresión de energía potencial resultante.

El Apéndice C de estos apuntes describe con mayor detalle el método de cálculo de las integrales de línea requeridas para el cálculo de la energía potencial según 5.38.

### 5.5.2. Dado $V_{\vec{F}_c}(\vec{r})$ , cómo calculo $\vec{F}_c(\vec{r})$ ?

Partimos nuevamente de la relación entre fuerza conservativa y energía potencial

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_i) - V(\vec{r}_f). \quad (5.39)$$

La diferencia de energía potencial de la mano izquierda podemos escribirla como

$$V(\vec{r}_i) - V(\vec{r}_f) = \int_{\vec{r}_f}^{\vec{r}_i} dV = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} (-dV). \quad (5.40)$$

Con 5.39 y 5.40 podemos reconocer que la relación diferencial entre fuerza conservativa y energía potencial es entonces

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV. \quad (5.41)$$

En el Apéndice D de los apuntes se define para un campo escalar,  $V(\vec{r})$ , el operador gradiente,  $\vec{\nabla}V$ , tal que

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}, \quad (5.42)$$

por lo que comparando 5.41 y 5.42 concluimos que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V. \quad (5.43)$$

Es decir, la fuerza conservativa es igual a menos el gradiente de su energía potencial. El apéndice D explica el significado físico del operador gradiente y muestra sus formas de cálculo en los distintos sistemas de coordenadas que conocemos. De acuerdo a 5.43, la fuerza conservativa siempre apunta en la dirección de máximo descenso del campo de energía potencial.

### 5.5.3. Dado $\vec{F}(\vec{r})$ , cómo puedo verificar si es conservativa ?

Por último veamos un test que podemos aplicar a un campo vectorial,  $\vec{F}(\vec{r})$ , para saber a priori si se trata de una fuerza conservativa. En el Apéndice D mostramos que el gradiente de un campo escalar es siempre irrotacional, es decir, el operador rotor aplicado sobre un gradiente es nulo. Dado que una fuerza conservativa es justamente el gradiente de un campo escalar (su energía potencial), entonces una fuerza conservativa es justamente irrotacional.

Por lo tanto, usaremos esta condición para verificar si una fuerza es conservativa, es decir, verificaremos la condición

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}. \quad (5.44)$$

Como se muestra en el apéndice, en coordenadas cartesianas el rotor de  $\vec{F}$  se calcula

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}, \quad (5.45)$$

de tal manera que la condición 5.44 equivale, en coordenadas cartesianas, a exigir que las derivadas parciales cruzadas de la fuerza sean iguales. Se deja propuesto usar este resultado para mostrar que una fuerza central descrita en coordenadas esféricas en la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r} \quad (5.46)$$

es siempre conservativa.



## Capítulo 6

# Equilibrios y Oscilaciones

Estudiaremos en este capítulo el importante tema de las oscilaciones de sistemas mecánicos. En la primera sección veremos que en las cercanías de sus equilibrios estables los sistemas conservativos tienden a oscilar. Nos concentraremos a continuación en el sistema de resorte con partícula como el oscilador lineal por excelencia, y con él estudiaremos el efecto de las fuerzas disipativas y de forzantes externas en sus oscilaciones. Finalmente, extenderemos el análisis a sistemas más complejos mostrando que éstos presentarán en general una mayor variedad de modos y frecuencias propias de oscilación.

### 6.1. Equilibrios y pequeñas oscilaciones

Una fuerza conservativa,  $\vec{F}_c$ , y su energía potencial asociada,  $V(\vec{r})$ , están relacionadas por las ecuaciones

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_{\text{ref}}} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}, \quad (6.1)$$

$$\vec{F}_c = -\vec{\nabla}V. \quad (6.2)$$

En particular, 6.2 nos dice que si conocemos la variación de la energía potencial en el espacio, entonces su fuerza conservativa asociada tiene en cada punto la dirección del máximo descenso de  $V$ . En esta sección explotaremos al máximo la información que nos proporciona la variación espacial de la energía potencial.

Restringiremos, por ahora, nuestro análisis al caso de movimiento unidimensional en que la posición de la partícula es  $\vec{r} = x\hat{i}$ , y la energía potencial es entonces una función  $V(x)$ . A modo de ejemplo, si la fuerza conservativa considerada es un resorte, podría tenerse que  $V(x) = \frac{1}{2}k(x - l_o)^2$ , o bien, si la fuerza conservativa es el peso,  $V(x) = mgx$  (en cuyo caso hemos puesto al vector unitario  $\hat{i}$  apuntando verticalmente hacia arriba). Sin embargo, por ahora pensemos que  $V(x)$  es una función *cualquiera* que representa la energía potencial de *alguna* fuerza conservativa que actúa sobre la partícula. La Figura 6.1 muestra la forma que esta función podría tener.

La ecuación 6.2 en el caso unidimensional se simplifica a

$$\vec{F}_c = -\frac{dV}{dx}\hat{i} = -V'(x)\hat{i}, \quad (6.3)$$

en que usamos primas para representar derivadas respecto a  $x$ . De inmediato 6.3 nos dice que la dirección de la fuerza conservativa depende de la pendiente de la función  $V(x)$ . En regiones donde  $V$  crece con  $x$  ( $V'(x) > 0$ ) la fuerza conservativa resulta según  $-\hat{i}$ , mientras

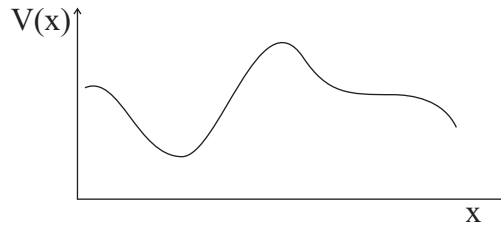


Figura 6.1: Forma de una función energía potencial unidimensional.

en las regiones donde  $V$  disminuye con  $x$  ( $V'(x) < 0$ ) la fuerza tiene dirección según  $+\hat{i}$  (Ver Figura 6.2).

### 6.1.1. Puntos de equilibrio

Si  $\vec{F}_c$  es la única fuerza actuando sobre la partícula entonces su ecuación de movimiento será

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}. \quad (6.4)$$

Recordemos de cálculo que los puntos extremos de una función de 1 variable (máximos y mínimos) se caracterizan porque en ellos la derivada de la función es nula. La ecuación 6.4 nos dice que en los puntos extremos de  $V(x)$  la fuerza actuando sobre nuestra partícula es cero. Esto justifica que los puntos extremos de  $V(x)$  sean llamados “puntos de equilibrio”, por cuanto si la partícula está en reposo en uno de ellos allí se quedará por siempre (pues la fuerza neta actuando sobre ella en ese punto es cero). Gráficamente, los puntos de equilibrio corresponden a los máximos y mínimos de la función  $V(x)$ .

Aunque un máximo y un mínimo de  $V(x)$  son ambos puntos de equilibrio, el carácter físico de ambos puntos es muy distinto. Consideremos primero un punto  $x_{*1}$  que corresponda a un mínimo de  $V(x)$ . Si la partícula está en reposo en  $x_{*1}$  y su posición es perturbada ligeramente, entonces al moverse la fuerza conservativa deja de ser nula. Más aún, el sentido de esta fuerza es tal que siempre hace tender a la partícula a su posición inicial,  $x_{*1}$  (Figura 6.3a). Esta característica hace que un mínimo de (energía) potencial sea denominado un punto de equilibrio *estable*. En torno al equilibrio estable, la fuerza conservativa tiene un carácter restaurador, en el sentido de que ante pequeñas perturbaciones, la fuerza conservativa trata de restaurar a la partícula a su posición de equilibrio.

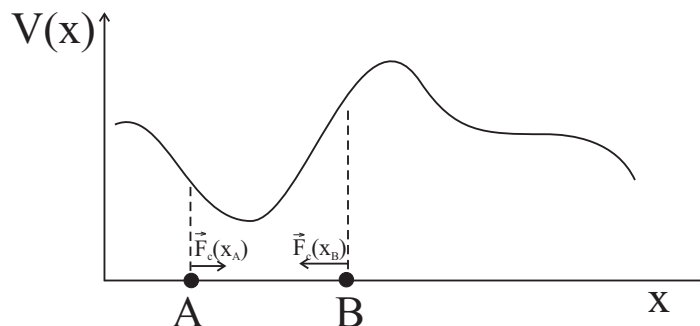


Figura 6.2: Dirección de la fuerza conservativa en función de la pendiente de la energía potencial. Cuando la partícula está en A la fuerza conservativa apunta hacia la derecha, y cuando está en B la fuerza apunta a la izquierda.



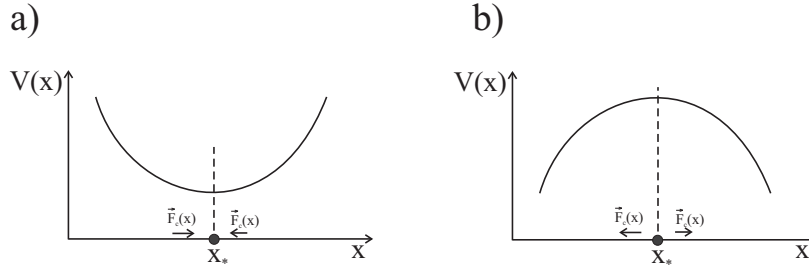


Figura 6.3: Fuerzas en el entorno de puntos de equilibrio. a) Un mínimo de  $V(x)$  es un punto de equilibrio estable, pues la fuerza conservativa en su entorno tiende a devolver a la partícula a la posición de equilibrio. b) Un máximo de  $V(x)$  es un punto de equilibrio inestable, pues la fuerza conservativa en su entorno tiende a alejar a la partícula de la posición de equilibrio.

Consideremos ahora un punto de equilibrio  $x_{*2}$  correspondiente a un máximo en la función energía potencial  $V(x)$ . Si la posición de una partícula en reposo ubicada inicialmente en  $x_{*2}$  es perturbada ligeramente, entonces el sentido de la fuerza conservativa que aparece es ahora tal que hace que la partícula se siga alejando de su posición inicial. En este caso decimos que  $x_{*2}$  es un punto de equilibrio *inestable*, por cuanto cualquier pequeña perturbación respecto a ese equilibrio es amplificada debido a la fuerza conservativa resultante (Figura 6.3b).

### 6.1.2. Pequeñas oscilaciones

Las mismas conclusiones las podemos obtener ahora matemáticamente. Consideramos la función  $V(x)$  y su expansión de Taylor en torno a un punto  $x_o$  cualquiera:

$$V(x) = V(x_o) + V'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2}V''(x_o)(x - x_o)^2 + \dots \quad (6.5)$$

Consideramos ahora una expansión de Taylor en torno un punto extremo  $x_o = x_*$ , tal que  $V'(x_*) = 0$ . Si nos limitamos a pequeñas perturbaciones respecto a este punto nos permitiremos truncar la expansión de Taylor hasta el término cuadrático:

$$V(x) = V(x_*) + V'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2}V''(x_*)(x - x_*)^2. \quad (6.6)$$

La condición de punto extremo me permite eliminar el segundo término de la mano derecha, de tal modo que

$$V(x) = V(x_*) + \frac{1}{2}V''(x_*)(x - x_*)^2. \quad (6.7)$$

La ecuación 6.7 aproxima a *cualquier* función  $V(x)$  en torno a un punto extremo  $x_*$ . Teniendo  $V(x)$  podemos usar 6.3 para determinar la fuerza conservativa

$$\vec{F}_c = -V'(x) \hat{i} = -V''(x_*)(x - x_*) \hat{i}. \quad (6.8)$$

Si  $\vec{F}_c$  es la única fuerza actuando sobre la partícula entonces su ecuación de movimiento resulta

$$m\ddot{x} \hat{i} = -V''(x_*)(x - x_*) \hat{i}. \quad (6.9)$$

Esta ecuación diferencial es muy muy muy parecida a la de un resorte, siempre y cuando el valor de  $V''(x_*)$  sea positivo. Esta última condición es precisamente equivalente a exigir

que el punto extremo sea un mínimo. Es decir, si  $x_*$  es un mínimo de  $V(X)$  ( $V'(x_*) = 0$  y  $V''(x_*) > 0$ ), entonces la solución general de 6.9 es un movimiento armónico simple en torno al equilibrio

$$(x(t) - x_*) = A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t), \quad (6.10)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes que dependen de condiciones iniciales, y  $\omega_o$  es la frecuencia de estas pequeñas oscilaciones definida por

$$\omega_o = \sqrt{\frac{V''(x_*)}{m}}. \quad (6.11)$$

Podemos resumir estas conclusiones diciendo que el movimiento de pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio estable siempre puede aproximarse como un movimiento armónico simple de frecuencia  $\omega_o$  dada por 6.11.

¿Qué pasa con el movimiento en torno a un punto de equilibrio inestable?. En este caso el punto  $x_*$  cumple las condiciones  $V'(x_*) = 0$  y  $V''(x_*) < 0$  y la solución general de 6.9 es

$$(x(t) - x_*) = Ae^{\omega_o t} + Be^{-\omega_o t}, \quad (6.12)$$

en que ahora  $\omega_o = \sqrt{-V''(x_*)/m}$ . La solución pierde su carácter oscilatorio y, peor aún, una de las exponenciales crece en el tiempo, lo cual indica que la partícula se aleja irremediabilmente del equilibrio (inestable) inicial. Por supuesto, una vez que la posición de la partícula se aleja mucho del equilibrio, la aproximación de Taylor truncada deja de ser una buena aproximación, y la solución 6.12 deja de ser una buena aproximación de la solución real del problema.

### 6.1.3. Generalizaciones

Si bien la sección previa ilustra bien los conceptos de equilibrios y pequeñas oscilaciones, no debe quedar la impresión de que ellos se aplican sólo a movimiento rectilíneo unidimensional. Más aún no queda a veces claro cómo usar la fórmula 6.11 para la frecuencia de pequeñas oscilaciones en los casos en que la energía potencial es expresada en función de un ángulo o de otra variable posicional que no sea “la coordenada  $x$ ”. Extendamos pues aquí un poco el análisis.

#### Potenciales restringidos

En ciertos casos el campo de energía potencial no tiene un mínimo donde su derivada se anule. Por ejemplo, para la energía potencial del peso,  $V(z) = mgz$ , no existe un punto  $z_*$  en que  $V'(z_*) = 0$ . Sin embargo, si de alguna forma restringimos los puntos del espacio en que se puede mover la partícula, entonces el potencial del peso *restringido* podría perfectamente tener mínimos o máximos en algunos puntos bien definidos.

Consideremos una argolla de masa  $m$  que está inserta en un alambre que describe en el espacio una curva arbitraria  $\mathcal{C}$ . La partícula no tiene roce con el alambre, por lo que éste sólo le ejerce una fuerza normal. Además existe sólo una fuerza adicional,  $F$ , que es conservativa, por lo que podemos expresarla como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V. \quad (6.13)$$

La ecuación de movimiento de la partícula, escrita en las coordenadas naturales que siguen a la curva  $\mathcal{C}$ , es entonces

$$m \left( \hat{s} \ddot{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{n} \right) = -\vec{\nabla}V + N \hat{n}. \quad (6.14)$$

De especial interés es la componente tangencial de esta ecuación pues en ella no participa la normal. Se obtiene

$$m\ddot{s} = -\vec{\nabla}V \cdot \hat{t}. \quad (6.15)$$

Recordando la ecuación que define el operador gradiente

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} \quad (6.16)$$

se tiene que

$$\frac{dV}{ds} = \vec{\nabla}V \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\nabla}V \cdot \hat{t} \quad (6.17)$$

por lo que 6.15 puede reescribirse como

$$m\ddot{s} = -\frac{dV}{ds}. \quad (6.18)$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a 6.4, por lo que todo el análisis de la sección previa es aplicable en la medida que reemplacemos  $x$  por  $s$ , la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria sobre la cual estamos evaluando la estabilidad. Ahora el movimiento en torno a un equilibrio puede ser analizado a lo largo de una curva cualquiera y las frecuencias dependen de cómo cambia la energía potencial *a lo largo de la curva analizada*, es decir, de la función  $V(s)$ . En particular, la frecuencia de pequeñas oscilaciones (ecuación 6.11) se generaliza ahora a

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{m} \left[ \frac{d^2V}{ds^2} \right]_{s_*}}, \quad (6.19)$$

donde  $s_*$  es el punto de equilibrio estable donde  $V(s)$  tiene un mínimo. Si en algún problema hemos expresado la energía potencial en función de una variable que no es la distancia recorrida por la partícula debemos usar la regla de la cadena para calcular la segunda derivada requerida en 6.19. El ejemplo siguiente debería clarificar estos conceptos.

### Ejemplo (Péndulo)

Consideremos una argolla de masa  $m$  inserta sin roce en un aro vertical de radio  $R$  (ver Figura 6.4). Determinemos los puntos de equilibrio y la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio estable.

Tal como lo ilustra la figura 6.4, existen muchas variables que podemos elegir para describir la posición de la argolla en el aro:  $\theta$ ,  $x$ ,  $z$ ,  $s$ . La sección anterior nos indica que las condiciones de estabilidad se determinan en función de la forma de  $V(s)$ , donde  $s$  en

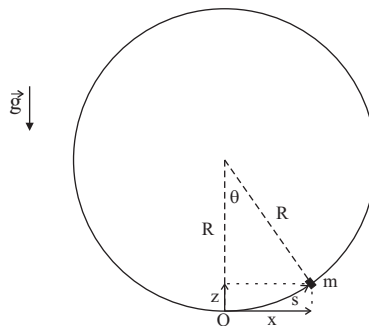


Figura 6.4: Ejemplo de pequeñas oscilaciones.

este caso es la distancia medida a lo largo de la circunferencia. Sin embargo, la energía potencial de la fuerza conservativa del problema (peso) es en general función de  $z$ , la coordenada vertical de la partícula. Por lo tanto, para encontrar los puntos de equilibrio (donde  $dV/ds = 0$ ) será conveniente usar la regla de la cadena en la forma

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dz} \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad (6.20)$$

puesto que las relaciones que conocemos son

$$V = mgz, \quad (6.21)$$

$$z = R(1 - \cos \theta), \quad (6.22)$$

$$s = R\theta. \quad (6.23)$$

Usando 6.21-6.23 en 6.20 obtenemos

$$\frac{dV}{ds} = mg \sin \theta \quad (6.24)$$

por lo que los equilibrios son  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi$ . La frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a  $\theta_1$  se obtiene derivando nuevamente 6.24 respecto a  $s$  (usando nuevamente la regla de la cadena)

$$\frac{d^2V}{ds^2} = mg \cos \theta \frac{1}{R} \quad (6.25)$$

lo cual se evalúa en  $\theta_1 = 0$  y reemplaza en 6.19 para obtener

$$\omega_o^2 = \frac{g}{R}. \quad (6.26)$$

Notemos que el problema tratado es completamente equivalente al de un péndulo simple (masa puntual que cuelga desde cuerda ideal de largo  $R$ ). En el modo tratado, sin embargo, podemos extender el análisis a algunas variaciones más complejas. Por ejemplo, se deja propuesto el problema de evaluar la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio estable de una argolla inserta sin roce en un alambre plano cuya forma está dada por la ecuación

$$z = ax^2, \quad (6.27)$$

donde  $z$  es la coordenada vertical usual y  $a$  es una constante conocida.

### Potencial Efectivo

Trabajando a partir de una ecuación diferencial de la forma

$$\ddot{u} = G(u), \quad (6.28)$$

podemos siempre definir un potencial efectivo,  $V_*(u)$ , en la forma

$$V_*(u) \equiv \int_u^{u_{\text{ref}}} G(u) du, \quad (6.29)$$

tal que 6.28 se puede escribir en términos del potencial efectivo como

$$\ddot{u} = -\frac{dV_*}{du}. \quad (6.30)$$

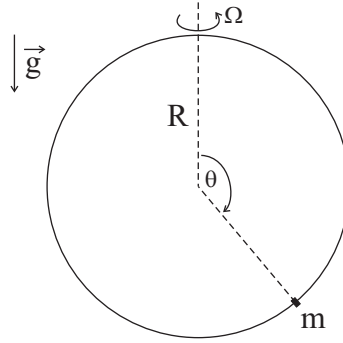


Figura 6.5: Argolla en aro rotante.

Considerando la similitud formal entre 6.30 y 6.4, podemos aplicar ahora sobre el potencial efectivo,  $V_*(u)$ , todo el arsenal de lo que ya sabemos sobre la relación entre energía potencial, equilibrios, estabildades y pequeñas oscilaciones. Por ejemplo, los puntos de equilibrio,  $u_*$ , del problema 6.28 serán los extremos de  $V_*$ , correspondiendo sus mínimos a equilibrios estables, en torno a los cuales se tendrán oscilaciones con frecuencias dadas por

$$\omega_o^2 = \left[ \frac{d^2 V_*}{du^2} \right]_{u_*}. \quad (6.31)$$

La generalización de 6.29 radica en el hecho de que este potencial efectivo está definido a partir de la función  $G(u)$ , la cual puede estar compuesta de términos de diverso origen. Por ejemplo,  $G(u)$  puede incluir términos asociados a fuerzas conservativas (en cuyo caso el potencial efectivo es muy parecido a la energía potencial de ellas), pero también puede incluir términos que provienen del lado de la aceleración de la ecuación de movimiento, como será ilustrado en el ejemplo siguiente. Notemos por último que en este caso general es mejor hablar simplemente de potencial efectivo y no de “energía” potencial efectiva, puesto que de 6.30 se puede ver que las unidades de  $V_*$  son muy dependientes de las unidades de la variable posicional,  $u$ , considerada.

### Ejemplo del Aro Rotante

Consideremos el ejemplo de la Figura 6.5 en que una argolla de masa  $m$  se encuentra inserta sin roce en un aro de radio  $R$ . El aro gira con velocidad angular constante,  $\Omega$ , en torno a su eje vertical. Se pide encontrar y analizar los ángulos  $\theta$  de equilibrio de la argolla.

La cinemática del problema sugiere el uso de coordenadas esféricas. La componente cenital de la ecuación de movimiento se reduce en este caso a

$$m(R\ddot{\theta} - R\Omega^2 \sin \theta \cos \theta) = mg \sin \theta. \quad (6.32)$$

Podemos escribir esta ecuación en la forma 6.28, llegando a

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} (\sin \theta + A \sin \theta \cos \theta), \quad (6.33)$$

donde  $A \equiv \Omega^2/(g/R)$  es un parámetro adimensional del problema que representa la importancia de la rotación respecto de la gravedad. Reconocemos en este ejemplo que la variable posicional corresponde al ángulo cenital,  $\theta$ , y que la función  $G(\theta)$  es

$$G(\theta) = \frac{g}{R} (\sin \theta + A \sin \theta \cos \theta), \quad (6.34)$$

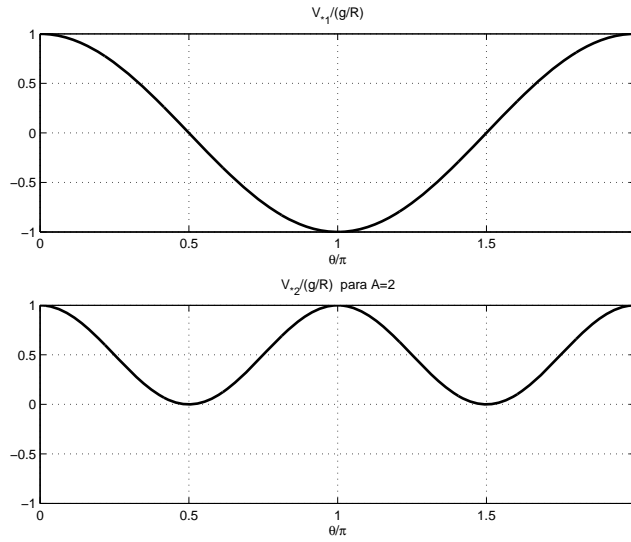


Figura 6.6: Componentes del potencial efectivo del aro rotante asociados al peso (panel superior) y a la rotación (panel inferior).

la cual contiene un término proveniente de la fuerza conservativa “peso” proyectado en la dirección acimutal y un segundo término que no está asociado a una fuerza conservativa, sino que proviene del lado de la aceleración de la ecuación de movimiento. A continuación resolveremos el problema en base al concepto de potencial efectivo.

Con 6.34 y 6.29 el potencial efectivo de este problema resulta

$$V_*(\theta) = \frac{g}{R} \left( \cos \theta + \frac{A}{2} \cos^2 \theta \right). \quad (6.35)$$

Podemos considerar este potencial efectivo como resultante de la suma de los siguientes potenciales

$$V_{*1}(\theta) = \frac{g}{R} \cos \theta, \quad (6.36)$$

$$V_{*2}(\theta) = \frac{g}{R} \frac{A}{2} \cos^2 \theta, \quad (6.37)$$

donde  $V_{*1}$  puede interpretarse como el potencial aportado por el peso y  $V_{*2}$  como el potencial aportado por la rotación. La figura 6.6 muestra un gráfico de estos dos potenciales en función del ángulo cenital. La forma de  $V_{*1}(\theta)$  nos dice que *desde el punto de vista del peso* el problema tendría 2 equilibrios, ubicados en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , siendo el primero inestable (máximo) y el segundo estable (mínimo). Por su parte, la forma de  $V_{*2}(\theta)$  nos dice que *desde el punto de vista de la rotación* el problema tendría 4 puntos de equilibrios, ubicados en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$  (inestables) y en  $\theta = \pi/2$  y  $\theta = 3\pi/2$  (estables). El problema completo, sin embargo, incluye los efectos del peso y de la rotación, por lo que sus equilibrios dependen de la forma del potencial efectivo total  $V_* = V_{*1} + V_{*2}$ . Claramente este potencial efectivo tendrá un punto de equilibrio inestable en  $\theta = 0$ , puesto que tanto la rotación como el peso le dan ese carácter. Para  $\theta = \pi$ , sin embargo, el peso y la rotación lo consideran punto de equilibrio, pero le asignan estabilidades distintas. Como veremos a continuación, la estabilidad de este punto dependerá de la importancia relativa de la rotación respecto del peso reflejada en la magnitud del parámetro  $A$ .

Buscamos entonces los extremos de  $V_*$  derivando 6.35 e igualando a cero. Llegamos a la ecuación para los ángulos de equilibrio  $\theta_*$ ,

$$\sin \theta_*(1 + A \cos \theta_*) = 0, \quad (6.38)$$

que tiene las soluciones

$$\theta_{*1} = 0, \quad (6.39)$$

$$\theta_{*2} = \pi, \quad (6.40)$$

$$\theta_{*3,4} = \arccos(-1/A), \text{ siempre que } A > 1. \quad (6.41)$$

Notemos que los equilibrios  $\theta_{*3,4}$  existen sólo si  $A > 1$ . Los tipos de equilibrios se determinan con la segunda derivada de  $V_*$

$$V_*'' = \frac{g}{R} (-\cos \theta + A(1 - 2 \cos^2 \theta)). \quad (6.42)$$

Evaluando 6.42 en los 4 posibles puntos de equilibrio obtenemos

$$V_*''(\theta_{*1}) = -\frac{g}{R}(1 + A), \quad (6.43)$$

$$V_*''(\theta_{*2}) = \frac{g}{R}(1 - A), \quad (6.44)$$

$$V_*''(\theta_{*3,4}) = \frac{g}{R} \frac{(A^2 - 1)}{A}. \quad (6.45)$$

Los signos de  $V_*''$  indican que las estabilidades de cada punto de equilibrio son:

$$\theta_{*1} : \text{ siempre inestable,} \quad (6.46)$$

$$\theta_{*2} : \text{ estable para } A < 1 \text{ e inestable para } A > 1, \quad (6.47)$$

$$\theta_{*3,4} : \text{ estables cuando existen } (A > 1). \quad (6.48)$$

Estos resultados quedan más claros observando la figura 6.7 que muestra gráficos de  $V_*(\theta)$  para los casos  $A = 0,5$  y  $A = 2$ . En el primer caso la forma del potencial efectivo total es dominada por la forma del potencial del peso (ver gráfico de  $V_{*1}$  en Figura 6.6), mientras que en el segundo caso, en que la rotación es relativamente más importante, el equilibrio de  $\theta = \pi$  se torna inestable y surgen los 2 puntos de equilibrio  $\theta_{*3,4}$  que en el caso extremo de rotación infinita (o gravedad cero) tienden a  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ .

### Oscilaciones a partir de la EMT

Para sistemas compuestos de más de 1 partícula los equilibrios y pequeñas oscilaciones surgen a veces más fácilmente partiendo de la ecuación de la energía mecánica total del sistema, expresada en términos de alguna variable que describa su posición. Supongamos que expresamos la EMT del sistema en la forma

$$\text{EMT} = \frac{1}{2} \alpha \dot{u}^2 + V(u), \quad (6.49)$$

donde  $u$  es la variable posicional del sistema (puede ser un ángulo, una distancia, etc.) y  $\alpha$  es una constante que depende de los parámetros del problema. El primer término del lado derecho de 6.49 es la energía cinética del sistema y el segundo es su energía potencial. Si en el sistema ejecutan trabajo sólo las fuerzas conservativas asociadas a  $V(u)$ , entonces EMT es constante y podemos derivar 6.49 respecto al tiempo para obtener

$$0 = \alpha \dot{u} \ddot{u} + V'(u) \dot{u}. \quad (6.50)$$

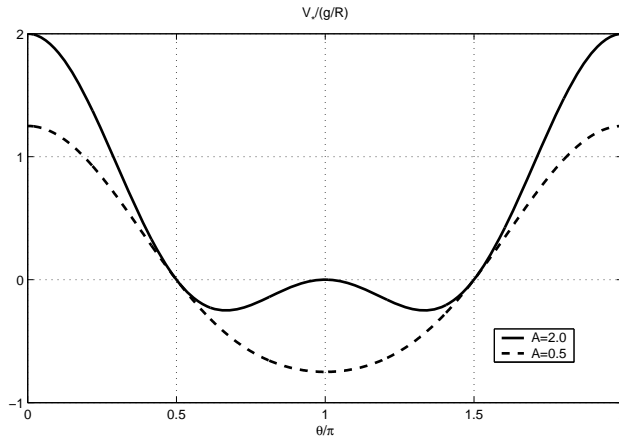


Figura 6.7: Potencial efectivo total del aro rotante para dos valores de  $A$ .

En nuestra búsqueda de oscilaciones  $\dot{u}$  será en general distinto de cero, por lo que 6.50 equivale a

$$\ddot{u} = -\frac{1}{\alpha} \frac{dV}{du}. \quad (6.51)$$

Hemos llegado nuevamente a una ecuación equivalente a 6.4. Los puntos de equilibrios son los extremos de  $V(u)$  tales que  $V'(u_*) = 0$  y las frecuencias de pequeñas oscilaciones serán en este caso  $\omega_o^2 = V''(u_*)/\alpha$ .

### Ejemplo

Consideremos el péndulo de 2 masas ilustrado en la figura 6.8. Usamos para describir su posición el ángulo  $\theta$ . La energía cinética del sistema es la suma de las energías cinéticas de cada masa:

$$K = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(\sqrt{2}L\dot{\theta})^2 = \frac{3}{2}mL^2\dot{\theta}^2. \quad (6.52)$$

La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial del peso de cada partícula. Se propone verificar que ésta es

$$V(\theta) = -mgL(2\cos\theta + \sin\theta). \quad (6.53)$$

Los equilibrios se encuentran imponiendo  $V'(\theta_*) = 0$  de donde en este caso

$$\tan\theta_* = \frac{1}{2}. \quad (6.54)$$

6.54 nos da 2 ángulos de equilibrio: uno estable y otro inestable. Se deja propuesto mostrar que para el equilibrio estable la frecuencia de pequeñas oscilaciones es

$$\omega_o^2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{g}{L}. \quad (6.55)$$



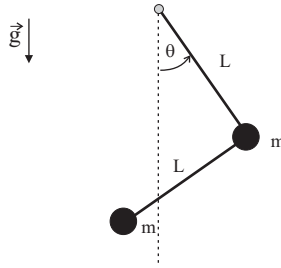


Figura 6.8: Péndulo de 2 masas.

## 6.2. Oscilaciones amortiguadas

Habiendo visto que sistemas conservativos muestran oscilaciones en torno a sus equilibrios estables, estudiaremos ahora el efecto de introducir fuerzas disipativas en el sistema. Lo haremos en el caso más sencillo de un resorte lineal ideal con un roce viscoso. Mostraremos que las fuerzas disipativas se encargan de extraer energía del sistema y llevarlo hacia los puntos de mínima energía potencial.

En su forma más simple, la ecuación de movimiento para una partícula con resorte y roce viscoso lineal tiene la forma

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}, \quad (6.56)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $k$  la constante elástica del resorte,  $c$  es la constante del roce viscoso y  $x(t)$  es la perturbación del largo del resorte respecto de su largo natural. Utilizando las definiciones

$$\omega_o^2 \equiv k/m, \quad (6.57)$$

$$\beta \equiv c/(2m), \quad (6.58)$$

podemos reescribir 6.56 como

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0. \quad (6.59)$$

Buscando soluciones de la forma

$$x = Ae^{st} \quad (6.60)$$

se llega a la ecuación característica de 6.59

$$s^2 + 2\beta s + \omega_o^2 = 0 \quad (6.61)$$

cuyas soluciones son

$$s_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}. \quad (6.62)$$

Esta solución sugiere la conveniencia de distinguir tres casos, según el signo del subradical en 6.62.

### 6.2.1. Sobre-amortiguamiento

En el caso que  $\beta^2 > \omega_o^2$  el roce viscoso es relativamente importante respecto del resorte y la solución general que entregan 6.60 y 6.62 puede escribirse como

$$x(t) = e^{-\beta t} (Ae^{\Delta t} + Be^{-\Delta t}), \quad (6.63)$$

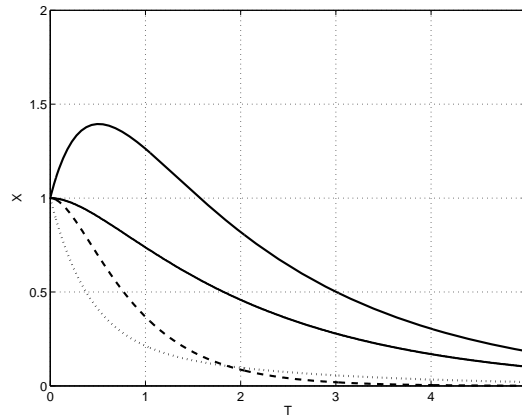


Figura 6.9: Oscilador sobreamortiguado.

donde  $\Delta \equiv \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$  y  $A$  y  $B$  son las constantes arbitrarias de la solución general. Para condiciones iniciales muy genéricas en la forma

$$x(0) = x_o, \quad (6.64)$$

$$\dot{x}(0) = v_o, \quad (6.65)$$

y tras “algo” de álgebra la solución específica puede escribirse como

$$X = e^{-\frac{\beta}{\Delta}T} \left( \left[ \frac{\beta}{\Delta} + \frac{v_o/x_o}{\Delta} \right] \sinh T + \cosh T \right), \quad (6.66)$$

donde  $X$  y  $T$  son las variables  $x$  y  $t$  adimensionalizadas en la forma

$$X \equiv x/x_o, \quad (6.67)$$

$$T \equiv \Delta t. \quad (6.68)$$

La figura 6.9 muestra gráficos  $X(T)$  para las cuatro condiciones descritas en el cuadro 6.1. Se propone identificar en la figura cuál curva corresponde a cuál caso del cuadro 6.1. Cabe hacer notar que en este caso se debe cumplir que  $\beta/\Delta$  siempre es mayor que 1.

### 6.2.2. Sub-amortiguamiento

En el caso que  $\beta^2 < \omega_o^2$  el roce viscoso es relativamente poco importante respecto del resorte y la solución general que entregan 6.60 y 6.62 puede escribirse como

$$x(t) = e^{-\beta t} (C \sin \Delta t + D \cos \Delta t), \quad (6.69)$$

Caso	$\beta/\Delta$	$v_o/(x_o\Delta)$
A	1.5	0
B	1.5	2
C	2.5	0
D	1.5	-2

Cuadro 6.1: Parámetros de casos sobreamortiguados en Figura 6.9

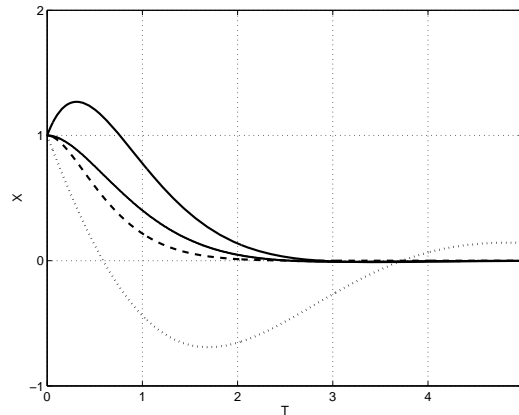


Figura 6.10: Oscilador subamortiguado.

donde ahora  $\Delta \equiv \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$  y  $C$  y  $D$  son las constantes arbitrarias de la solución general. Usando las mismas condiciones iniciales 6.64 y 6.65 la solución específica es ahora

$$X = e^{-\frac{\beta}{\Delta}T} \left( \left[ \frac{\beta}{\Delta} + \frac{v_o/x_o}{\Delta} \right] \sin T + \cos T \right), \quad (6.70)$$

donde la misma adimensionalización 6.67 y 6.68 ha sido aplicada. La figura 6.10 muestra gráficos  $X(T)$  para las cuatro condiciones descritas en el cuadro 6.2. Se propone identificar en la figura cuál curva corresponde a cuál caso del cuadro 6.2. Podemos ver que en este caso la solución general permite oscilaciones cuya amplitud se va atenuando en el tiempo.

### 6.2.3. Amortiguamiento crítico

En el caso crítico  $\beta^2 = \omega_o^2$  por lo que 6.60 y 6.62 entregan sólo una solución en la forma

$$x = Ae^{-\beta t}. \quad (6.71)$$

Para encontrar una segunda solución independiente probamos la forma

$$x = e^{-\beta t} f(t), \quad (6.72)$$

donde  $f(t)$  es una función a determinar. Reemplazando 6.72 en 6.59 y tras cierta cantidad de álgebra se obtiene la condición

$$\ddot{f} = 0 \quad (6.73)$$

de donde

$$f = A + Bt \quad (6.74)$$

Caso	$\beta/\Delta$	$v_o/(x_o\Delta)$
A	1.5	0
B	1.5	2
C	2.5	0
D	0.5	-2

Cuadro 6.2: Parámetros de casos subamortiguados en Figura 6.10

y la solución más general del problema es entonces

$$x = e^{-\beta t}(A + Bt), \quad (6.75)$$

que tiene 2 constantes arbitrarias a determinar en función de las condiciones iniciales del problema. Podemos ver que en el caso de amortiguación crítica la perturbación cambia a lo más una vez de signo antes de tender a cero en  $t = +\infty$ . Queda propuesto evaluar las constantes  $A$  y  $B$  de 6.75 para las condiciones iniciales 6.64-6.65 y esquematizar su gráfico.

### 6.3. Oscilaciones forzadas

En su forma más simple, la ecuación de movimiento para una partícula con resorte y forzamiento armónico tiene la forma

$$m\ddot{x} = -kx + F_o \cos \Omega t, \quad (6.76)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula,  $k$  la constante elástica del resorte, y  $F_o$  y  $\Omega$  definen, respectivamente, la amplitud y frecuencia de una fuerza adicional que actúa sobre la partícula. Utilizando las definiciones

$$\omega_o^2 \equiv k/m, \quad (6.77)$$

$$A_o \equiv F_o/m, \quad (6.78)$$

podemos reescribir 6.76 como

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = A_o \cos \Omega t. \quad (6.79)$$

Para esta ecuación no homogénea (lado derecho distinto de cero) la solución general es

$$x = x_H + x_P \quad (6.80)$$

donde  $x_H$  es la solución general del problema homogéneo (ya conocida) y  $x_P$  es una solución particular del problema no homogéneo. Para encontrar esta última nos “inspiramos” en el lado derecho y suponemos una solución particular con la forma

$$x_P = C \cos \Omega t \quad (6.81)$$

y buscamos  $C$  tal que efectivamente sea solución de 6.79. Reemplazando 6.81 en 6.79 el valor de  $C$  debe ser

$$C = \frac{A_o}{\omega_o^2 - \Omega^2} \quad (6.82)$$

por lo que la solución general del problema puede escribirse como

$$x(t) = B \cos(\omega_o t + \delta) + \frac{A_o}{\omega_o^2 - \Omega^2} \cos \Omega t, \quad (6.83)$$

donde  $B$  y  $\delta$  son las constantes arbitrarias a evaluar mediante las condiciones iniciales del problema.

La solución 6.83 puede interpretarse como una suma de oscilaciones con frecuencias  $\omega_o$  y  $\Omega$ . Las amplitudes de cada una, sin embargo, dependen de las condiciones iniciales, de la magnitud de la forzante, y también de la relación entre ambas frecuencias. Para ahondar un poco más en este último aspecto consideremos la solución de un caso particular en que las condiciones iniciales del resorte son

$$x(0) = 0, \quad (6.84)$$

$$\dot{x}(0) = 0, \quad (6.85)$$

es decir, la partícula está inicialmente en reposo con el resorte en su largo natural. Reemplazando tales condiciones iniciales en 6.83 las constantes arbitrarias pasan a tomar los valores

$$B = \frac{-A_o}{\omega_o^2 - \Omega^2}, \quad (6.86)$$

$$\delta = 0, \quad (6.87)$$

de tal manera que la solución para este caso es

$$x(t) = \frac{A_o}{\omega_o^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega_o t). \quad (6.88)$$

Para visualizar lo que pasa con la solución cuando las dos frecuencias involucradas se parecen reescribiremos 6.88 en términos de 2 nuevas frecuencias definidas por

$$\gamma \equiv \frac{1}{2}(\Omega + \omega_o), \quad (6.89)$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{2}(\Omega - \omega_o), \quad (6.90)$$

donde claramente la frecuencia  $\Delta$  se hace pequeña cuando  $\Omega \sim \omega_o$ . Relaciones trigonométricas básicas permiten reescribir la solución 6.88 en términos de  $\gamma$  y  $\Delta$  en la forma

$$x(t) = \frac{A_o}{2\Delta\gamma} \sin \Delta t \sin \gamma t. \quad (6.91)$$

Cuando  $\Omega \sim \omega_o$  ( $\Delta \sim 0$ ) la solución 6.91 puede interpretarse como una oscilación de alta frecuencia ( $\gamma$ ) cuya amplitud es modulada con baja frecuencia ( $\Delta$ ). La amplitud de esta modulación crece grandemente cuando  $\Delta \sim 0$ .

Para efectos de graficarla conviene adimensionalizar la solución 6.91. Usando la adimensionalización de variables

$$X \equiv \frac{x}{A_o/(2\gamma^2)}, \quad (6.92)$$

$$T \equiv \gamma t, \quad (6.93)$$

6.91 puede escribirse como

$$X = \frac{1}{\Delta/\gamma} \sin \left( \frac{\Delta}{\gamma} T \right) \sin T. \quad (6.94)$$

La Figura 6.11 muestra la solución adimensional 6.94 para los 2 valores del parámetro  $\Delta/\gamma$  del cuadro 6.3. Se propone identificar cuál curva corresponde a cuál caso del cuadro 6.3.

Caso	$\Delta/\gamma$
A	0.5
B	0.1

Cuadro 6.3: Parámetros de casos forzados en Figura 6.11

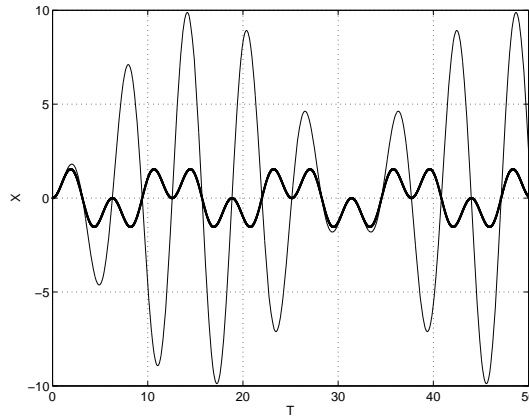


Figura 6.11: Oscilador forzado.

### Resonancia perfecta

En el caso de la resonancia perfecta la frecuencia de la forzante es exactamente igual a la frecuencia natural del resorte, es decir,

$$\Omega = \omega_o \quad (6.95)$$

por lo que la ecuación 6.79 queda

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = A_o \cos \omega_o t. \quad (6.96)$$

Encontrar la solución particular,  $x_P$ , en este caso plantea un problema, puesto que la suposición “natural”

$$x_P = C \cos \omega_o t \quad (6.97)$$

reemplazada en 6.96 no encuentra valores de  $C$  que la conviertan en solución (verificarlo). Buscando otras soluciones parecidas probamos

$$x_P = f(t) \sin \omega_o t, \quad (6.98)$$

donde  $f(t)$  es una función a determinar. Reemplazando 6.98 en 6.96 y después de algo de álgebra las condiciones sobre  $f$  para que 6.98 sea solución particular de 6.96 son

$$\ddot{f} = 0, \quad (6.99)$$

$$\dot{f} = \frac{A_o}{2\omega_o}, \quad (6.100)$$

de donde

$$f = \frac{A_o t}{2\omega_o} + D \quad (6.101)$$

y la solución particular es

$$x_P = \left[ \frac{A_o t}{2\omega_o} + D \right] \sin \omega_o t. \quad (6.102)$$

La solución general del problema es entonces

$$x = \frac{A_o t}{2\omega_o} \sin \omega_o t + B \cos(\omega_o t + \delta), \quad (6.103)$$

donde  $B$  y  $\delta$  son las constantes arbitrarias que se determinan con condiciones iniciales (notar que la constante  $B$  en 6.103 “absorbió” la constante  $D$  en 6.102). Claramente esta solución está dominada en los tiempos grandes por la solución particular que corresponde a una oscilación de frecuencia  $\omega_o$  cuya amplitud crece al infinito. Queda propuesto evaluar las constantes  $B$  y  $\delta$  para las condiciones iniciales 6.84 y 6.85 y esquematizar su gráfico.

## 6.4. Oscilaciones con forzamiento y atenuación

Por último nos queda considerar el caso completo en que un resorte ideal lineal es forzado armónicamente en presencia de roce viscoso lineal. Usando las convenciones de las secciones anteriores podemos escribir inmediatamente la ecuación diferencial que rige este problema en la forma

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = A_o \cos \Omega t. \quad (6.104)$$

La solución general es nuevamente la suma de la solución homogénea y la solución particular

$$x = x_H + x_P. \quad (6.105)$$

El problema homogéneo (lado derecho de 6.104 igual a cero) ya lo resolvimos en la sección 6.2 y, por lo tanto, consideraremos conocida la solución  $x_H$  de 6.104. Debemos, por lo tanto, preocuparnos de encontrar su solución particular. Inspirados en el lado derecho de 6.104 buscaremos una solución particular en la forma

$$x_P = D \cos(\Omega t - \delta). \quad (6.106)$$

Reemplazando 6.106 en 6.104 encontramos que  $D$  y  $\delta$  no son arbitrarios sino que deben cumplir (propuesto: verificarlo)

$$D = \frac{A_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad (6.107)$$

$$\tan \delta = \frac{2\Omega\beta}{(\omega_o^2 - \Omega^2)}. \quad (6.108)$$

### 6.4.1. Transiente y régimen estacionario

La solución general del problema completo es efectivamente la suma de  $x_H$  y  $x_P$ . La solución homogénea  $x_H$  es la que aporta las 2 constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales. Sin embargo, ya hemos visto que la solución homogénea se va a cero para tiempos largos ( $t \gg \beta^{-1}$ ). Esto nos permite distinguir dos fases de la solución completa. La fase inicial ( $t \ll \beta^{-1}$ ) se denomina el transiente de la solución, en la cual las condiciones iniciales son importantes. Para  $t \gg \beta^{-1}$ , sin embargo, las condiciones iniciales son irrelevantes y se habla de la solución de régimen estacionario, en la cual sólo la solución particular,  $x_P$ , es importante. Terminaremos esta sección analizando con mayor detalle esta solución de régimen estacionario.

### 6.4.2. Solución de régimen estacionario

Según lo dicho, para  $t \gg \beta^{-1}$  la solución del problema con forzamiento y roce tiende a

$$x = D \cos(\Omega t - \delta), \quad (6.109)$$

donde la amplitud  $D$  y la constante de fase  $\delta$  están dados por 6.107 y 6.108.

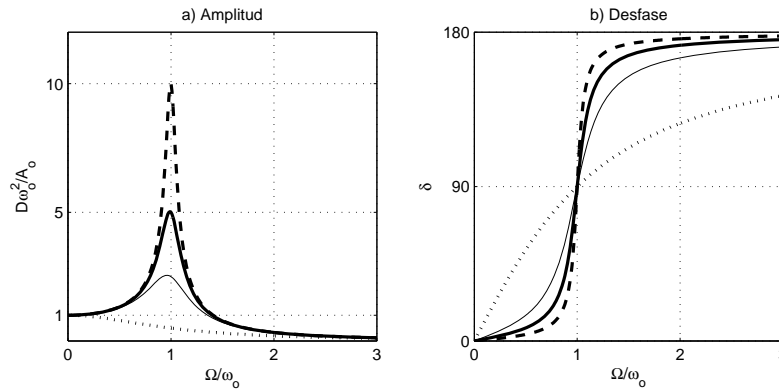


Figura 6.12: Amplitud y desfase de la solución de régimen estacionario para oscilador forzado y amortiguado.

Investiguemos primero la amplitud de la oscilación de régimen estacionario. Según 6.107 esta amplitud depende de la relación entre  $\Omega$ ,  $\omega_o$  y  $\beta$ . Notemos que en este caso en que existe roce la amplitud de la solución nunca se va a infinito, a diferencia del caso de resonancia perfecta sin roce visto antes. Sin embargo, la amplitud de la respuesta es función de  $\Omega$  y podemos buscar la frecuencia  $\Omega_R$  que maximiza la amplitud de 6.107. Derivando 6.107 con respecto a  $\Omega$  e igualando a cero encontramos esta frecuencia de resonancia

$$\Omega_R^2 = \omega_o^2 - 2\beta^2. \quad (6.110)$$

Vemos que debido a la presencia del roce la frecuencia de resonancia no es exactamente igual a la frecuencia natural del resorte, sino algo menor. Si el roce es muy grande y  $2\beta^2 > \omega_o^2$ , entonces no existe una frecuencia de máxima amplitud, sino que ésta disminuye monótonicamente a cero cuando la frecuencia forzante  $\Omega$  aumenta. La Figura 6.12a muestra en forma adimensional la amplitud de la oscilación de régimen estacionario en función de la frecuencia de la forzante. Los parámetros de roce de los 4 casos mostrados se indican en la Tabla 6.4 y queda propuesto identificar qué caso corresponde a qué curva de la figura 6.12.

En cuanto a la frecuencia de la oscilación resultante, 6.108 muestra que en el régimen estacionario ésta adopta la misma frecuencia que la forzante. Sin embargo, existirá un desfase entre ambas, determinado por el valor de  $\delta$ . La figura 6.12b muestra los valores del desfase en función de la frecuencia forzante  $\Omega$  para los distintos valores del parámetro del roce  $\beta$  de la Tabla 6.4. Para casos con mucho roce o con frecuencias de la forzante muy bajas (comparadas con  $\omega_o$ ), la oscilación del sistema resorte-partícula tiende a estar en fase ( $\delta \sim 0$ ) con la forzante. Para frecuencias forzantes muy grandes (comparadas con  $\omega_o$ ) la oscilación resultante tiende a estar en antifase con la forzante ( $\delta \sim 180^\circ$ ). Para forzantes

Caso	$\beta/\omega_o$
1	.05
2	.1
3	.2
4	1

Cuadro 6.4: Parámetros de casos en Figura 6.12



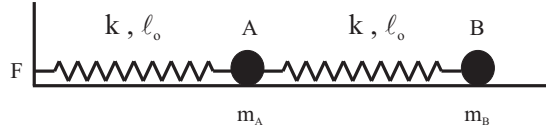


Figura 6.13: Oscilador de 2 masas.

con frecuencias parecidas a  $\omega_o$  se tiende a  $\delta \sim 90^\circ$ , que corresponde a una oscilación del resorte “rezagada” un cuarto de fase respecto de la forzante.

## 6.5. Modos normales

Finalmente estudiemos las oscilaciones libres (sin forzamiento ni roce) que pueden existir en sistemas más complejos que el sistema simple de resorte con partícula. En este último sabemos que las oscilaciones libres tienen frecuencia  $\omega_o^2 = k/m$ . Pero si el resorte tiene una partícula de masa  $m$  en cada extremo, con qué frecuencia oscilará?. O si hay varias partículas unidas entre sí con varios resortes, qué frecuencia tendrán las soluciones resultantes?. Veremos aquí que en sistemas más complejos aparecen varios modos naturales de oscilación, cada uno con frecuencias específicas.

Consideremos el sistema de la Figura 6.13. Una partícula A está unida con un resorte a una partícula B por un lado y a un punto fijo F por el otro. Todo sobre una base horizontal y sin roce. Por simplicidad consideraremos los 2 resortes iguales (constantes  $k$  y  $l_o$ ). Las ecuaciones de movimiento de cada partícula son

$$m_A \ddot{x}_A = -k(x_A - l_o) + k(x_B - x_A - l_o), \quad (6.111)$$

$$m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A - l_o), \quad (6.112)$$

donde hemos puesto el origen de  $x$  en el punto fijo F. Simplificaremos este sistema calculando las posiciones de cada partícula respecto de sus respectivos puntos de equilibrio, es decir, usando nuevas variables definidas como

$$\delta_A \equiv x_A - l_o, \quad (6.113)$$

$$\delta_B \equiv x_B - 2l_o, \quad (6.114)$$

con lo que 6.111 y 6.112 pueden reescribirse como

$$\ddot{\delta}_A = -\omega_A^2 \delta_A + \omega_A^2 (\delta_B - \delta_A), \quad (6.115)$$

$$\ddot{\delta}_B = -\omega_B^2 (\delta_B - \delta_A), \quad (6.116)$$

en que hemos definido las constantes

$$\omega_A^2 \equiv \frac{k}{m_A}, \quad (6.117)$$

$$\omega_B^2 \equiv \frac{k}{m_B}. \quad (6.118)$$

Se dice que el sistema de ecuaciones 6.115-6.116 está acoplado por cuanto  $\delta_A$  y  $\delta_B$  aparecen en los lados derechos de ambas. Esperamos entonces que las oscilaciones de ambas partículas no sean completamente independientes. Buscaremos por tanto soluciones en la forma

$$\delta_A = D \sin \omega t + E \cos \omega t, \quad (6.119)$$

$$\delta_B = C \delta_A, \quad (6.120)$$

donde  $D$  y  $E$  son constantes arbitrarias y  $\omega$  y  $C$  son constantes a determinar de modo que 6.119-6.120 sean efectivamente solución de 6.115-6.116. Reemplazando 6.119-6.120 en 6.115-6.116 se obtienen las ecuaciones

$$-\omega^2 = -2\omega_A^2 + \omega_A^2 C, \quad (6.121)$$

$$-C\omega^2 = -2\omega_B^2 + \omega_B^2 C. \quad (6.122)$$

De 6.121 obtenemos  $C$  en función de  $\omega$ :

$$C = \frac{2\omega_A^2 - \omega^2}{\omega_A^2}, \quad (6.123)$$

lo que reemplazamos en 6.122 y desarrollamos hasta obtener una ecuación para  $\omega$ :

$$\omega^4 - (2\omega_A^2 + \omega_B^2)\omega^2 + \omega_A^2\omega_B^2 = 0. \quad (6.124)$$

6.124 nos entrega dos valores posibles para  $\omega^2$  en función de  $\omega_A$  y  $\omega_B$ . Para simplificar el álgebra restringiremos el análisis siguiente al caso en que las 2 masas y resortes son iguales, es decir,

$$\omega_A^2 = \omega_B^2 = \omega_o^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.125)$$

En este caso las dos soluciones de 6.124 son

$$\omega_1^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\omega_o^2 \sim 2,618 \omega_o^2, \quad (6.126)$$

$$\omega_2^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\omega_o^2 \sim 0,618 \omega_o^2. \quad (6.127)$$

Usando 6.123, cada una de estas frecuencias da lugar a constantes  $C$  distintas:

$$C_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sim -0,618, \quad (6.128)$$

$$C_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim 1,618. \quad (6.129)$$

Finalmente, la solución general del problema resulta de la combinación de las 2 soluciones entregadas por  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , en la forma

$$\delta_A = (D \sin \omega_1 t + E \cos \omega_1 t) + (F \sin \omega_2 t + G \cos \omega_2 t), \quad (6.130)$$

$$\delta_B = -0,618(D \sin \omega_1 t + E \cos \omega_1 t) + 1,618(F \sin \omega_2 t + G \cos \omega_2 t). \quad (6.131)$$

Vemos que la solución del sistema acoplado tiene 4 constantes arbitrarias ( $D, E, F, G$ ) que se definen a partir de las condiciones iniciales. El sistema acoplado tiene además 2 frecuencias naturales de oscilación,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , cada una de las cuales está asociada a un *modo normal* de oscilación. En efecto, para  $\omega_1$  se tiene que

$$\delta_B = -0,618\delta_A, \quad (6.132)$$

que implica que las dos masas se mueven en forma antisimétrica y la amplitud de B es 0.618 la amplitud de A. El segundo modo normal de oscilación tiene frecuencia natural  $\omega_2$  y en él se cumple

$$\delta_B = 1,618\delta_A, \quad (6.133)$$

de donde ambas partículas se mueven en fase y la amplitud de B es 1.618 la amplitud de A. Los 2 modos normales se ilustran en la Figura 6.14. De acuerdo a 6.130-6.131 la solución particular que exista en un caso dado será una combinación de los dos modos normales, cuya ponderación dependerá de las condiciones iniciales del sistema.

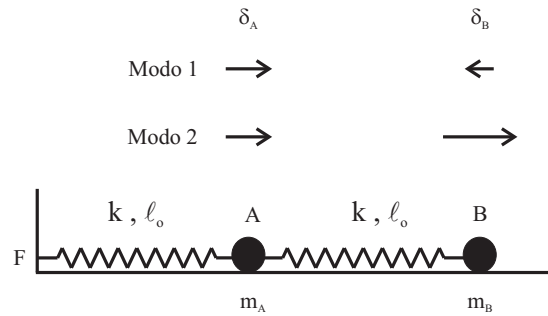


Figura 6.14: Modos normales del oscilador de 2 masas.

## 6.6. Comentarios

Podría pensarse que el mundo no tiene muchos resortes con partículas, por lo que las aplicaciones de los conceptos de esta sección tendrían un alcance limitado. Sin embargo, esto no es así, puesto que muchos sistemas reales complejos (mecánicos y no mecánicos) se mantienen en condiciones cercanas a algún tipo de equilibrio y tienen también una o más frecuencias “naturales” de oscilación. Por lo tanto, el comportamiento de estos sistemas complejos puede a veces modelarse o representarse en primera aproximación como 1 o más resortes ligando a 1 o más partículas. En tal sentido, las subsecciones previas nos ilustran, por ejemplo, que las fuerzas disipativas como el roce son las responsables de hacer que este tipo de sistemas tiendan hacia su equilibrio (sección 6.2), que si forzamos externamente un sistema con frecuencias parecidas a su frecuencia natural, podemos producir grandes perturbaciones en él (sección 6.3), y que mientras más complejo el sistema tendrá mayor cantidad de modos normales de oscilación y frecuencias naturales (sección 6.5).



# Capítulo 7

## Fuerzas Centrales

### 7.1. Constantes del movimiento

Consideramos el movimiento de una partícula de masa  $m$  sometida sólo a la acción de una fuerza central en la forma

$$\vec{F} = F(r) \hat{r}. \quad (7.1)$$

Es decir, la fuerza tiene una magnitud que sólo depende de la distancia de la partícula al centro de fuerza (ubicado en el origen de un sistema polar de coordenadas), y su dirección es radial.

El torque de esta fuerza respecto al origen es nulo, por lo tanto, la partícula conserva su momento angular respecto al origen:

$$\vec{l}_o = m \vec{r} \times \vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \hat{k} = \text{constante}. \quad (7.2)$$

En lo que sigue utilizaremos la magnitud del momento angular por unidad de masa

$$h \equiv r^2 \dot{\theta}, \quad (7.3)$$

como una de las constantes básicas del movimiento de la partícula. Vimos antes que una partícula que mantiene constante su momento angular describe un movimiento plano. Por lo tanto, el sistema de coordenadas que usamos es un sistema polar en el plano del movimiento de la partícula y con origen en el centro de fuerzas.

Mostramos en clases que una fuerza central de la forma 7.1 es también una fuerza conservativa, por lo que la partícula conserva su energía mecánica total

$$\text{EMT} = \text{constante}. \quad (7.4)$$

En lo que sigue utilizaremos la energía mecánica total por unidad de masa

$$\epsilon \equiv \frac{\text{EMT}}{m}, \quad (7.5)$$

como otra constante básica del movimiento de la partícula.

Las condiciones 7.2 y 7.4 nos entregan dos constantes del movimiento de la partícula sometida sólo a la acción de una fuerza central. En el resto de este capítulo describiremos el movimiento de la partícula basados en estas dos constantes físicas.

## 7.2. Ecuación de Binet

La ecuación de movimiento de la partícula según la dirección radial es

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r). \quad (7.6)$$

Eliminaremos la masa  $m$  del desarrollo posterior, considerando en vez de la fuerza  $F(r)$ , la aceleración que ella induce,  $f(r) \equiv F(r)/m$ . En este caso, la ecuación de movimiento resulta

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = f(r). \quad (7.7)$$

El ángulo  $\theta$  como variable dependiente puede ser eliminado en favor de la variable  $r$ , usando la definición del momento angular por unidad de masa 7.3, de donde

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}, \quad (7.8)$$

de modo que 7.7 queda

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f(r). \quad (7.9)$$

Notemos que esta ecuación diferencial parece describir un movimiento unidimensional, pues  $r(t)$  es la única incógnita en ella. Sin embargo, debemos recordar siempre que el movimiento es en dos dimensiones y que el ángulo  $\theta$  resulta de la definición del momento angular según 7.8.

Las ecuaciones 7.8 y 7.9 pueden combinarse para eliminar el tiempo y obtener una ecuación diferencial para la trayectoria  $r(\theta)$ . El álgebra de este procedimiento fue vista en clases y la ecuación diferencial resultante es

$$\frac{h^2}{r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2h^2}{r^5} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{h^2}{r^3} = f(r). \quad (7.10)$$

La ecuación anterior se simplifica haciendo el cambio de variable  $\zeta \equiv \frac{1}{r}$ , obteniéndose

$$-h^2\zeta^2 \left( \frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta \right) = f(\zeta), \quad (7.11)$$

que es la ecuación diferencial de Binet para la trayectoria de una partícula sometida a la acción de una fuerza central.

## 7.3. Orbitas gravitacionales

Un caso particular de fuerza central es la fuerza de atracción gravitacional entre dos partículas de masas  $M$  y  $m$ , respectivamente. En este caso la magnitud de la fuerza toma la forma

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (7.12)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal. Por ahora consideraremos que  $m \ll M$ , y que por tanto, el centro de fuerza es la posición de la partícula de masa  $M$ , la cual consideraremos fija en el espacio (el análisis más preciso se presentará en el capítulo de sistemas de partículas). En este caso la aceleración  $f(\zeta)$  resulta

$$f(\zeta) = -GM\zeta^2. \quad (7.13)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de Binet, obtenemos la ecuación diferencial de la trayectoria

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = \frac{C}{h^2} \quad (7.14)$$

donde hemos definido la constante  $C \equiv GM$ . La ecuación diferencial resultante es semejante a la de un resorte, excepto por la constante del lado derecho (ecuación diferencial no homogénea). La solución general es la suma de la solución homogénea y una solución particular

$$\zeta(\theta) = A \cos(\theta - \delta) + \frac{C}{h^2}. \quad (7.15)$$

Las constantes  $A$  y  $\delta$  son las dos constantes libres de la solución general. Dado que  $\zeta = \frac{1}{r}$ , la solución para la trayectoria  $r(\theta)$  es

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{C}{h^2} + A \cos(\theta - \delta)}. \quad (7.16)$$

### 7.3.1. Ecuación física de la trayectoria

Intentaremos relacionar la constante  $A$  de 7.16 con la energía mecánica total (por unidad de masa) de la partícula,

$$\epsilon = \frac{1}{2}v^2 + V(r), \quad (7.17)$$

donde  $V(r)$  es la energía potencial (por unidad de masa) asociada a la fuerza de atracción gravitacional. Vimos en clase que la energía potencial gravitacional (por unidad de masa) tiene la expresión

$$V(r) = -\frac{GM}{r} = -\frac{C}{r}, \quad (7.18)$$

por lo que la energía mecánica total (por unidad de masa) resulta

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right) - \frac{C}{r}, \quad (7.19)$$

donde la energía cinética fue evaluada usando la expresión de la velocidad en coordenadas polares. Volvemos a eliminar  $\dot{\theta}$  usando el momento angular, para quedarnos con la expresión

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{C}{r}. \quad (7.20)$$

Dado que  $\epsilon$  es constante, podemos evaluar 7.20 en cualquier punto de la trayectoria. Elegiremos evaluarlo en  $r = r_o$ , el punto de la trayectoria más cercano al origen. Dado que en este punto el radio es mínimo, se cumplirá que  $\dot{r}(r_o) = 0$ . De esta forma,

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{h^2}{r_o^2} - \frac{C}{r_o}. \quad (7.21)$$

Por otro lado, la ecuación 7.16 muestra que el radio mínimo se obtiene también como

$$r_o = \frac{1}{\frac{C}{h^2} + A}. \quad (7.22)$$

Podemos usar 7.21 y 7.22 para obtener

$$A = \frac{C}{h^2} \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}}, \quad (7.23)$$

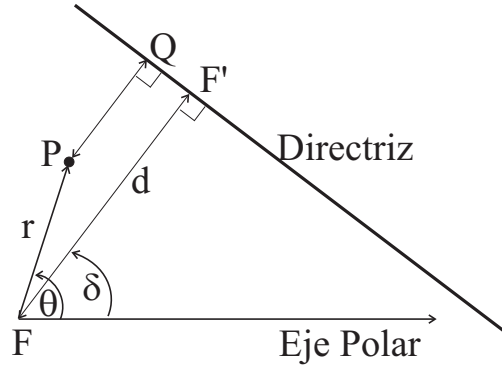


Figura 7.1: Esquema para definición de una curva cónica.

de donde la ecuación física de la trayectoria puede obtenerse reemplazando 7.23 en 7.16 para obtener

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} \cos(\theta - \delta)}. \quad (7.24)$$

Llamaremos a 7.24 la ecuación física de la trayectoria de la partícula, debido a que expresa  $r(\theta)$  en función de las dos constantes físicas que la partícula conserva en su movimiento, a saber,  $h$  (momento angular por unidad de masa) y  $\epsilon$  (energía mecánica total por unidad de masa).

### 7.3.2. Ecuación geométrica de la trayectoria

La trayectoria 7.24 define una curva perteneciente a la familia de las curvas cónicas. Estas curvas se definen geoméricamente a partir de un punto F (foco) y una recta llamada directriz, en la forma siguiente. La cónica está formada por todos los puntos P, cuya distancia al foco es proporcional a su distancia a la directriz. La constante de proporcionalidad se denomina excentricidad,  $e$ . De acuerdo a la Figura 7.1, se tiene entonces que

$$\overline{PF} = e\overline{PQ}, \quad (7.25)$$

donde las barras denotan distancia entre los puntos indicados. Utilizando un sistema coordenado polar centrado en el foco, se cumple que

$$\overline{PF} = r, \quad (7.26)$$

$$\overline{PQ} = d - r \cos(\theta - \delta), \quad (7.27)$$

donde  $d$  es la distancia entre el foco y la directriz y  $\delta$  es el ángulo polar de la recta FF'. Reemplazando 7.26, 7.27 en 7.25, y despejando  $r$ , obtenemos la ecuación para la distancia del punto P al foco (y origen del sistema coordenado):

$$r(\theta) = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \delta)}. \quad (7.28)$$

En este caso el radio mínimo,  $r_o$ , de la cónica es

$$r_o = \frac{ed}{1 + e}, \quad (7.29)$$



lo que nos permite eliminar  $d$  en favor del radio mínimo, obteniendo

$$r(\theta) = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos(\theta-\delta)}. \quad (7.30)$$

Llamaremos a 7.30 la ecuación geométrica de la trayectoria, por cuanto describe la curva en términos de dos parámetros geométricos, a saber, la excentricidad,  $e$ , y el radio mínimo,  $r_o$ .

### 7.3.3. Relación entre fórmulas físicas y geométricas

Comparando 7.24 y 7.30 podemos ver que ambas ecuaciones describen la misma relación funcional entre la distancia radial ( $r$ ) y el ángulo polar ( $\theta$ ). Para simplificar el análisis haremos que nuestro sistema coordenado polar esté orientado en la dirección del punto en que el radio de la partícula es mínimo. Es decir, la condición  $r(\theta = 0) = r_o$  implica que nuestra constante  $\delta = 0$ . En este caso las fórmulas físicas y geométricas de la trayectoria se reducen a

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} \cos \theta}, \quad (7.31)$$

$$r(\theta) = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta}. \quad (7.32)$$

Para que 7.31 y 7.32 describan la misma trayectoria de la partícula *para todo ángulo*  $\theta$ , se debe cumplir necesariamente que

$$\frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}}} = r_o(1+e), \quad (7.33)$$

$$\sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} = e. \quad (7.34)$$

Estas dos condiciones nos permiten determinar las equivalencias entre las constantes físicas y geométricas de la trayectoria. Por ejemplo, las constantes geométricas  $e$  y  $r_o$  se calculan en función de las constantes físicas como

$$r_o = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}}}, \quad (7.35)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}}, \quad (7.36)$$

y las constantes físicas  $h$  y  $\epsilon$  se calculan en función de las constantes geométricas como

$$h^2 = Cr_o(1+e), \quad (7.37)$$

$$\epsilon = \frac{C}{2r_o}(e-1). \quad (7.38)$$

La mayor parte de los problemas en esta materia consisten en poder reconocer los parámetros que son datos y poder usar las fórmulas apropiadas de conversión entre parámetros, de tal modo de poder calcular las variables que no se conocen.

## 7.4. Tipos de órbitas gravitacionales

### 7.4.1. Órbita circular

En una órbita circular de radio  $R$ , el radio  $r$  es constante, de tal manera que se cumple

$$r = r_o = R \quad \forall \theta. \quad (7.39)$$

Para que el radio sea constante y no dependa del ángulo  $\theta$ , 7.31 y 7.32 nos dicen que se debe cumplir

$$\sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} = 0, \quad (7.40)$$

$$e = 0. \quad (7.41)$$

Es decir, una órbita circular se caracteriza por las condiciones

$$e = 0, \quad (7.42)$$

$$\epsilon = -\frac{C^2}{2h^2}. \quad (7.43)$$

Dado que  $e = 0$ , la ecuación 7.37 nos dice que el radio está directamente relacionado con el momento angular en la forma

$$h^2 = CR, \quad (7.44)$$

lo cual podemos reemplazar en 7.43 para obtener la energía mecánica total en función del radio  $R$  de la órbita circular

$$\epsilon = -\frac{C}{2R}. \quad (7.45)$$

Dado que en la órbita circular la partícula permanece siempre a una distancia  $R$  del centro de fuerza, la ecuación 7.18 nos permite evaluar su energía potencial por unidad de masa

$$V = -\frac{C}{R} \quad (7.46)$$

y restando esta cantidad a la energía mecánica total, obtenemos el valor de la energía cinética por unidad de masa,  $K$ :

$$K \equiv \frac{\text{E.Cinética}}{m} = \epsilon - V = \frac{C}{2R}. \quad (7.47)$$

Resumiendo, para una órbita circular de radio  $R$  se cumple

$$e = 0, \quad (7.48)$$

$$V = -\frac{C}{R}, \quad (7.49)$$

$$K = \frac{C}{2R}, \quad (7.50)$$

$$\epsilon = -\frac{C}{2R}. \quad (7.51)$$

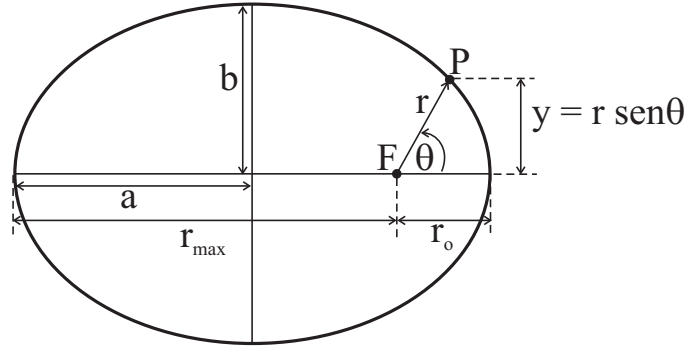


Figura 7.2: Esquema de una órbita elíptica.

### 7.4.2. Órbita elíptica

Una órbita elíptica se obtiene para la condición geométrica

$$e < 1, \quad (7.52)$$

es decir, cuando la excentricidad es menor que 1. En este caso se observa que el denominador en la fórmula geométrica de  $r(\theta)$  nunca se hace cero, y por lo tanto, la distancia radial de la partícula nunca se hace infinito. En este caso la partícula se mueve entre un radio mínimo ( $r_o$ ) y un radio máximo dado por

$$r_{\max} = r_o \frac{1+e}{1-e}. \quad (7.53)$$

Por su parte, la ecuación física de la trayectoria nos dice que se observará una órbita elíptica, en la medida que la energía mecánica total sea menor que cero. Es decir, la condición física de una órbita elíptica es que

$$\epsilon < 0. \quad (7.54)$$

En algunos casos la descripción geométrica de una órbita elíptica no se realiza en términos del radio mínimo y de la excentricidad, sino en términos de los semiejes mayor ( $a$ ) y menor ( $b$ ) de la elipse (Figura 7.2). La definición del semieje mayor es simplemente

$$a = \frac{r_{\max} + r_o}{2} = \frac{r_o}{1-e}. \quad (7.55)$$

La definición del semieje menor puede hacerse definiendo una coordenada  $y = r \sin(\theta)$  y maximizando su valor:

$$y = r \sin \theta, \quad (7.56)$$

$$= \frac{r_o(1+e) \sin \theta}{1+e \cos \theta}, \quad (7.57)$$

$$y' = \frac{r_o(1+e) \cos \theta (1+e \cos \theta) - r_o(1+e) \sin \theta (-e \sin \theta)}{(1+e \cos \theta)^2}, \quad (7.58)$$

$$= \frac{r_o(1+e)(\cos \theta + e)}{(1+e \cos \theta)^2}. \quad (7.59)$$

El máximo de  $y$  ocurre cuando la derivada 7.59 es igual a cero, lo que ocurre para el ángulo  $\theta_*$  tal que  $\cos \theta_* = -e$ . El semieje menor,  $b$ , se obtiene usando 7.57 para evaluar el máximo de  $y$

$$b = y_{\max} = \frac{r_o(1+e)\sqrt{1-e^2}}{1+e(-e)} = r_o \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \quad (7.60)$$

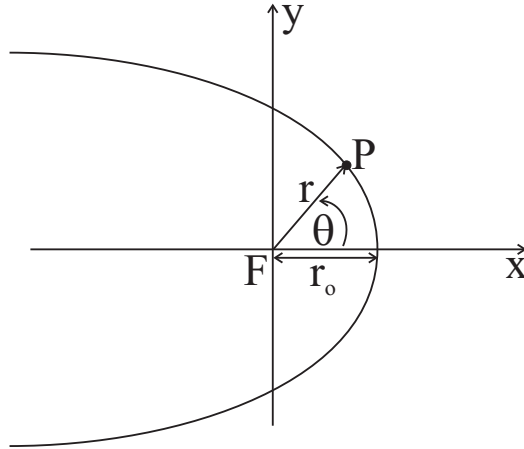


Figura 7.3: Esquema de una órbita parabólica.

### 7.4.3. Órbita parabólica

La órbita parabólica se obtiene para las condiciones

$$e = 1 \quad (\text{condición geométrica}) \quad (7.61)$$

$$\epsilon = 0 \quad (\text{condición física}). \quad (7.62)$$

Las fórmulas física y geométrica resultan en este caso

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \cos \theta}, \quad (7.63)$$

$$r(\theta) = \frac{2r_o}{1 + \cos \theta}. \quad (7.64)$$

Para mostrar que efectivamente la trayectoria es una parábola, podemos definir las coordenadas  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  (ver Figura 7.3) y usar la fórmula geométrica 7.64 para obtener

$$x = \frac{2r_o \cos \theta}{1 + \cos \theta}, \quad (7.65)$$

$$y = \frac{2r_o \sin \theta}{1 + \cos \theta}, \quad (7.66)$$

las que se pueden combinar para eliminar el ángulo  $\theta$  y obtener la relación entre  $x$  e  $y$ :

$$x = r_o - \frac{y^2}{4r_o}. \quad (7.67)$$

Podemos ver que efectivamente se trata de una parábola de eje horizontal (Figura 7.3).

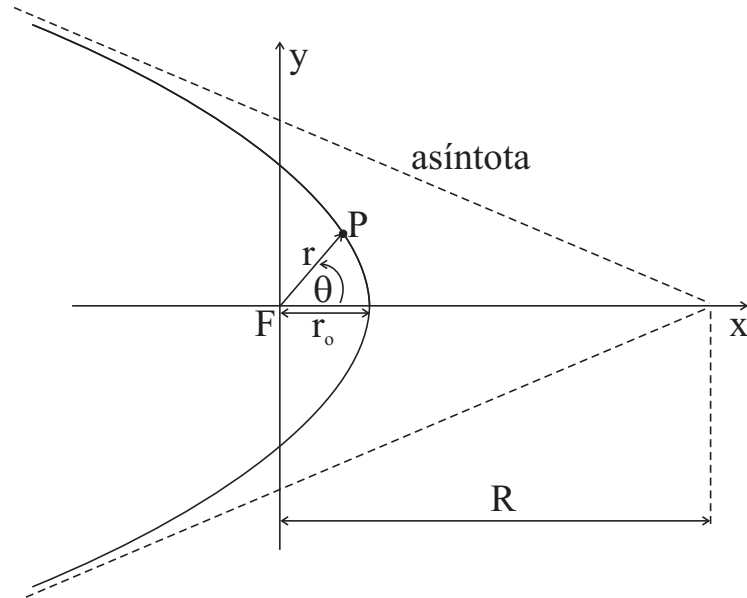


Figura 7.4: Esquema de una órbita hiperbólica.

#### 7.4.4. Órbita hiperbólica

Las órbitas hiperbólicas corresponden a las condiciones

$$e > 1, \quad (7.68)$$

$$\epsilon > 0. \quad (7.69)$$

Estas órbitas también son abiertas y se aproximan asintóticamente a rectas cuando el radio tiende a infinito (ver Figura 7.4). Un análisis cuidadoso de este límite permite encontrar la distancia,  $R$ , entre la intersección de las rectas asíntotas y el foco (centro de fuerzas):

$$R = r_0 \frac{e}{e - 1}. \quad (7.70)$$

## 7.5. Diagramas paramétricos

Realizaremos en esta sección gráficos que nos indiquen los tipos de órbitas gravitacionales que se obtienen, en función de distintos parámetros.

### 7.5.1. Órbitas según excentricidad

El diagrama paramétrico más simple es el que distingue el tipo de órbita según la excentricidad. En este caso los valores posibles del parámetro van de 0 a infinito y el tipo de órbita queda completamente definido a partir de su valor (Figura 7.5).

### 7.5.2. Órbitas según energía y momento angular

Si conocemos los valores de  $\epsilon$  y  $h$ , qué tipo de órbita tendremos? La respuesta a esta pregunta la podemos graficar en un diagrama paramétrico en que las coordenadas son  $\epsilon$  y  $h$ . Las condiciones de cada tipo de órbita las derivamos en la sección anterior, y pueden resumirse en

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{C^2}{2h^2} && \text{para órbita circular,} \\ \epsilon &< 0 && \text{para órbita elíptica,} \\ \epsilon &= 0 && \text{para órbita parabólica,} \\ \epsilon &> 0 && \text{para órbita hiperbólica.} \end{aligned}$$

La condición de la órbita circular proviene de la ecuación 7.43, y en el diagrama  $(\epsilon, h)$  corresponde a la curva mostrada en la Figura 7.6. Podemos ver que para un momento angular dado ( $h$  fijo) la órbita circular es la órbita de menor energía mecánica total.

El diagrama  $(\epsilon, h)$  nos sugiere preguntarnos qué pasa con la condición  $h = 0$ . En este caso la partícula no tiene momento angular y su trayectoria es una recta, es decir, la partícula se mueve en la dirección del centro de fuerza (cae o sube verticalmente).

### 7.5.3. Órbitas según rapidez y dirección en un punto

Consideremos una partícula que cuando se encuentra a una distancia  $R$  del centro de fuerza tiene una velocidad caracterizada por una magnitud  $v_o$  y una dirección  $\alpha$  (ver Figura 7.7). En este caso podemos crear un diagrama cuyas coordenadas estén relacionadas con  $v_o$  y  $\alpha$ , y en él indicaremos los distintos tipos de órbitas que pueden ocurrir. Para determinar las regiones es conveniente calcular los parámetros físicos de la trayectoria en función de los datos ( $R$ ,  $v_o$  y  $\alpha$ ):

$$\epsilon = \frac{1}{2}v_o^2 - \frac{C}{R} \quad (7.71)$$

$$h = v_o R \sin \alpha. \quad (7.72)$$

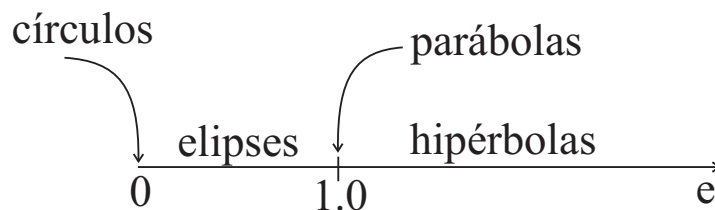


Figura 7.5: Tipos de órbitas según excentricidad.

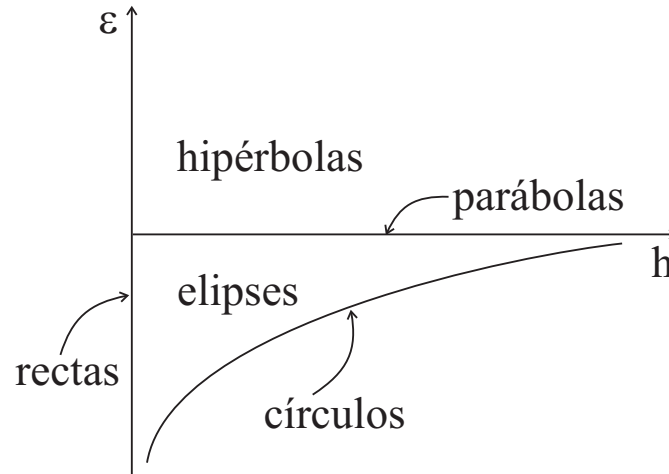


Figura 7.6: Tipos de órbitas según momento angular y energía mecánica total.

A continuación podemos calcular la excentricidad en función de estos parámetros físicos, usando la ecuación 7.36:

$$e^2 = 1 + 4 \left( \frac{1}{2} v_o^2 \frac{R}{C} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} v_o^2 \frac{R}{C} \right) \sin^2 \alpha. \quad (7.73)$$

La Figura 7.8 muestra un diagrama cuyas coordenadas son  $(\frac{1}{2} v_o^2 R/C)$  y  $\sin \alpha$  y en el cual se han graficado isolíneas de  $e^2$ , obtenidas usando 7.73. A partir de los valores de la excentricidad en cada región se ha identificado los tipos de órbita correspondientes.

#### 7.5.4. Órbitas según potencial efectivo

La ecuación de movimiento 7.9 aplicada al caso de la fuerza gravitacional puede escribirse como

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{C}{r^2}. \quad (7.74)$$

Como vimos en el capítulo previo del curso, esta ecuación puede interpretarse en términos de un potencial efectivo  $V_*$ , tal que

$$-\frac{dV_*}{dr} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{C}{r^2}. \quad (7.75)$$

Integrando esta ecuación en  $r$  y asumiendo un potencial de referencia  $V_*(r \rightarrow \infty) = 0$  encontramos la expresión del potencial efectivo

$$V_*(r) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{C}{r}. \quad (7.76)$$



Figura 7.7: Esquema de partícula a distancia  $R$  del centro de fuerza y con velocidad arbitraria.

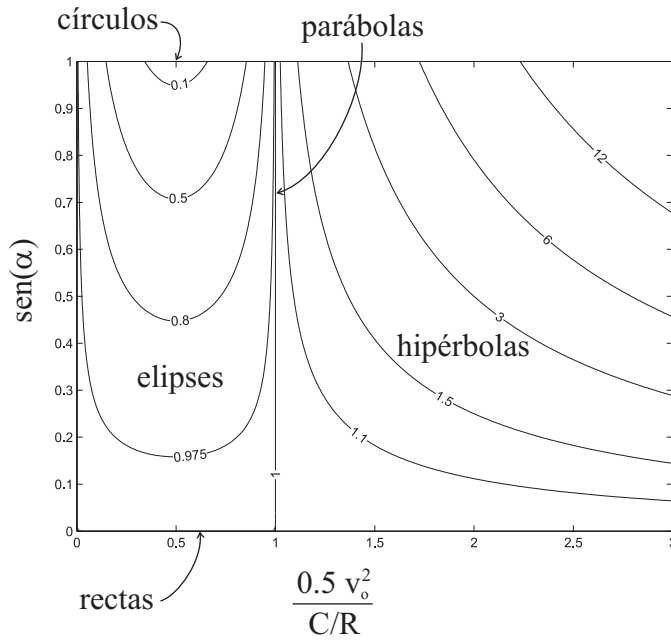


Figura 7.8: Tipos de órbitas según dirección y rapidez de la partícula en radio R. Las isolíneas corresponden a valores de  $e^2$  calculados usando 7.73.

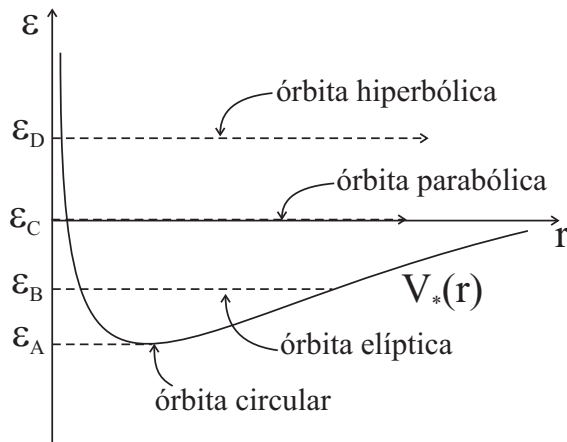


Figura 7.9: Gráfico del potencial efectivo en función de la distancia radial para un valor del momento angular,  $h$ , fijo. Dependiendo de la energía mecánica total de la partícula,  $\epsilon$ , su órbita puede ser circular (caso A), elíptica (caso B), parabólica (caso C), o hiperbólica (caso D).



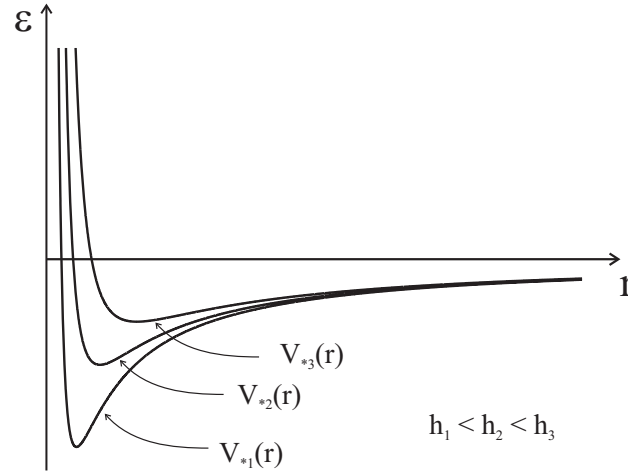


Figura 7.10: Distintas curvas de potencial efectivo para distintos valores del momento angular,  $h$ .

La forma gráfica de este potencial efectivo se muestra en la Figura 7.9. Notemos que la curva se realiza para un momento angular fijo,  $h$ . La trayectoria específica de una partícula dada, dependerá además del valor de su energía mecánica total ( $\epsilon$ ). Dependiendo del valor de  $\epsilon$  se pueden obtener los distintos tipos de trayectoria. Cuando la energía es mínima (para el valor de  $h$  dado) se obtiene la órbita circular en que el radio permanece constante (caso A en Figura 7.9). Para  $\epsilon_{\min} < \epsilon < 0$  la trayectoria es una elipse y el radio se mueve entre un valor máximo y un valor mínimo (caso B). Cuando la energía  $\epsilon = 0$  se obtiene una órbita parabólica (Caso C), y en cualquier caso con  $\epsilon > 0$  la trayectoria es hiperbólica y la partícula pasa por un radio mínimo pero luego no retorna jamás (Caso D).

Aunque la forma de las curvas  $V_*(r)$  es siempre la misma, su posición exacta depende del valor del momento angular,  $h$ . La Figura 7.10 muestra una familia de curvas  $V_*(r)$ , para distintos valores del momento angular. Podemos ver que en la medida que el momento angular crece, el radio de la órbita circular aumenta.

## 7.6. Leyes de Kepler

### 7.6.1. Primera ley

Los planetas tienen órbitas elípticas alrededor del Sol, y éste se ubica en uno de los focos de la elipse.

Aunque esto es correcto, veremos en el capítulo de Sistemas de Partículas que la masa del planeta que debemos usar para calcular los parámetros de la elipse en torno al Sol es la denominada “masa reducida” del planeta. La definición que haremos de este término hace que cuando el planeta (o satélite) tiene una masa muy pequeña comparada con la del otro cuerpo, su masa reducida se parece a su simple masa (esto se entenderá claramente en el capítulo indicado).

### 7.6.2. Segunda ley

El vector posición de los planetas (medido respecto al Sol) barre áreas iguales en tiempos iguales.

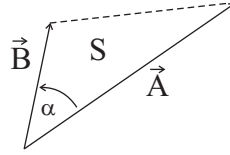


Figura 7.11: Esquema para mostrar que la magnitud del producto cruz de 2 vectores es el doble del área del triángulo que forman ( $S$  en la figura).

Esta propiedad se basa en la conservación del momento angular. Recordemos primero que la magnitud del producto cruz entre dos vectores está relacionada con el área del triángulo formado por ambos vectores (ver Figura 7.11). Por lo tanto,

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin \alpha = 2S \quad (7.77)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre ambos vectores y  $S$  es el área del triángulo.

Aplicando la propiedad anterior al momento angular por unidad de masa

$$h = \|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\| = 2\frac{dS}{dt}, \quad (7.78)$$

donde  $dS$  es el elemento de área barrido por el vector posición al desplazarse un elemento  $d\vec{r}$ . De este modo, dado que  $h$  es constante en el movimiento de la partícula, entonces 7.78 implica que  $dS/dt$  es constante, lo cual demuestra la segunda ley de Kepler.

Un corolario de la segunda ley es que el periodo  $T$  de la órbita, el área  $S$  de ella y el momento angular están relacionados por

$$T = \frac{2S}{h}. \quad (7.79)$$

### 7.6.3. Tercera ley

El cuadrado del periodo de los planetas es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

El área de una elipse es  $S = \pi ab$ , donde  $a$  y  $b$  son sus semiejes mayor y menor, respectivamente. Reemplazando esta expresión en 7.79

$$T = \frac{2\pi ab}{h}. \quad (7.80)$$

Las ecuaciones 7.37, 7.55 y 7.60 permiten obtener la relación

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{a}{C}} \quad (7.81)$$

lo que reemplazado en 7.80 nos entrega la tercera ley de Kepler en la forma

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C} a^3. \quad (7.82)$$

## 7.7. Resumen

Como será evidente a estas alturas, la materia de este capítulo tiene una gran cantidad de fórmulas y ecuaciones, en las cuales es extremadamente fácil ahogarse y perderse. En mi opinión, la forma de evitar el caos es preocuparse en comprender perfectamente las dos ecuaciones básicas de la trayectoria de la partícula, que hemos llamado las fórmulas física y geométrica (ecuaciones 7.31 y 7.32), y que repetimos aquí para mayor abundancia:

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2eh^2}{C^2} \cos \theta}}, \quad (7.83)$$

$$r(\theta) = \frac{r_o(1 + e)}{1 + e \cos \theta}. \quad (7.84)$$

Estas dos ecuaciones no se deben memorizar, pues estarán en la hoja del control. Sin embargo, se debe comprender estas ecuaciones completamente. De partida, se debe saber a qué corresponde cada uno de los términos presentes en ellas. Se debe entender la forma en que ellas indican las relaciones entre los parámetros físicos y geométricos de las órbitas, y finalmente cómo de ellas se derivan las condiciones para obtener cada uno de los tipos de órbitas.



## Capítulo 8

# Movimiento Relativo

Supongamos que estando en un cuarto cerrado saco de mi bolsillo una manzana y la libero de mi mano dejándola en el aire en reposo frente a mí. A continuación, y para mi sorpresa, observo que ella no “cae”, sino que se queda suspendida en el aire. La sorpresa se debe a que si después de liberar la manzana la única fuerza actuando sobre ella es su peso, la 2a Ley de Newton me dice

$$m\vec{a} = -mg\hat{k},$$

por lo cual yo esperaba que la manzana se acelerara hacia abajo, es decir, comenzara a caer, lo cual no ocurrió. ¿Cómo puedo interpretar esta observación desde el punto de vista de las ecuaciones de Newton?. Las posibilidades que imagino son:

**Teoría de la abducción.** Me encuentro en el espacio exterior muy lejos de la Tierra u otro cuerpo celeste, por lo que la fuerza neta sobre la manzana es cero y ella se queda en reposo si es dejada en reposo.

**Teoría de la conspiración.** Alguien puso un alambrito casi invisible que sostiene la manzana y no la deja caer por su peso.

**Teoría de la levitación.** Existe una fuerza desconocida que contrarresta el peso de la manzana.

**Teoría de la desesperación.** Newton se equivocaba.

Todas las alternativas anteriores son posibles, y algunos experimentos adicionales me permitirían verificar o descartar algunas de ellas. Si ninguna de esas explicaciones parece apropiada (no fui abducido, no hay alambrito, no creo en fantasmas y todavía le creo a Newton), entonces queda la posibilidad de que la Ley de Newton no se cumpla debido a que la posición de la manzana la estoy describiendo en relación a un sistema de referencia no inercial (SRNI). Recordemos de uno de los primeros capítulos del curso que la Ley de Newton requería que el movimiento de la partícula fuese descrito desde un sistema inercial (aquél en que se cumple la Ley de Newton, ups!), por lo que si mis observaciones parecen no cumplir esa Ley, entonces es posible que nuestro sistema de referencia sea en efecto no inercial.

En este capítulo estudiaremos cómo se modifica la ecuación de movimiento de la partícula si decidimos describir la posición, velocidad y aceleración de ella respecto de un SRNI. ¿Por qué usar un SRNI?. Hay varias razones posibles. El caso más frecuente en que usar un SRNI es útil es cuando la cinemática del movimiento de la partícula se simplifica. Por ejemplo, mirado desde un sistema inercial el movimiento de la punta de la

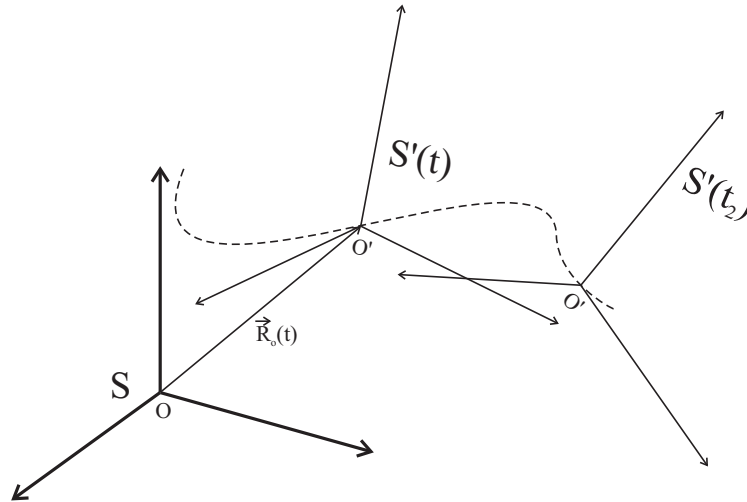


Figura 8.1: Esquema para definición de sistemas S y S'.

nariz de un caballo que sube y baja sobre un carrusel giratorio de niños puede ser bastante complicado, por cuanto combina un movimiento de rotación con uno vertical. Sin embargo, para un observador que gira con el carrusel el movimiento de la nariz es mucho más simple: ella se mueve a lo largo de una línea recta vertical. En este caso la cinemática se simplifica a costa de complicar la dinámica, puesto que dado que el observador sobre el carrusel es un SRNI, veremos que la ecuación de movimiento de la nariz del caballo deberá incorporar términos adicionales para que su solución describa correctamente el movimiento referido.

Otra razón para aprender a describir el movimiento desde un SRNI es que todos los movimientos que observamos en la vida diaria los referimos realmente a un sistema local que está rotando junto con la Tierra. Por lo tanto, nuestro sistema de referencia local es realmente un SRNI. Muchas veces la corrección que deberíamos hacer para incluir la no-inercialidad de nuestro sistema local es muy pequeña y podemos despreciarla. En ciertas aplicaciones, sin embargo, dependiendo de la escala y de la precisión requerida en la descripción del movimiento, el efecto no inercial del sistema local debe ser considerado.

## 8.1. Sistema no inercial

Al usar un SRNI lo primero que debemos hacer es describir en forma precisa su no-inercialidad con respecto a un sistema de referencia inercial (podemos imaginar a este último en reposo absoluto). Supongamos que existe entonces un sistema inercial S, respecto del cual describiremos el movimiento del sistema no inercial S' (ver figura 8.1). La forma más general en la cual el sistema S' puede moverse incluye su traslación y su rotación.

La traslación de S' será descrita siguiendo en el tiempo el vector  $\vec{R}_o(t) = \vec{OO}'$ , es decir, el vector posición del origen O' referido al punto origen del sistema inercial. Conociendo  $\vec{R}_o(t)$  podemos suponer conocidas sus derivadas en el tiempo  $\vec{V}_o(t) = \dot{\vec{R}}_o(t)$ , y  $\vec{A}_o(t) = \ddot{\vec{R}}_o(t)$ . Recalquemos que el movimiento de O' es arbitrario, es decir, yo lo defino de la manera que más me convenga.

Conocer el movimiento del origen O' no es suficiente para describir el movimiento de S', puesto que podemos imaginar muchos sistemas con un mismo origen O' pero cuyos ejes van rotando de distinta forma. Por lo tanto, nos falta aún caracterizar la rotación de los ejes del sistema de referencia S'. La rotación de S' será descrita mediante una única velocidad

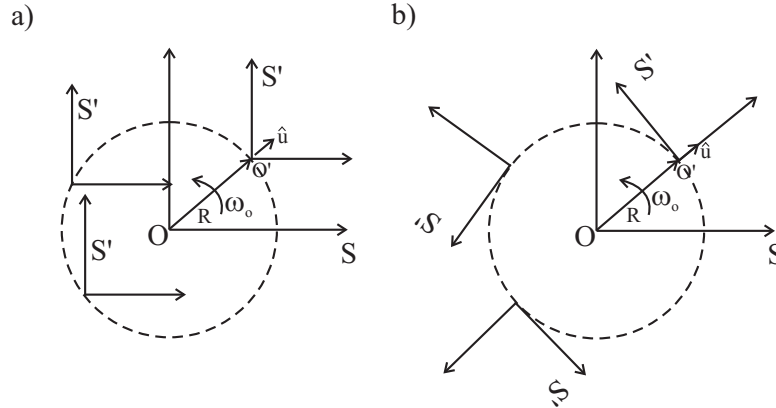


Figura 8.2: Dos sistemas S' parecidos pero no iguales.

angular,  $\vec{\Omega}_e(t)$ , que es la velocidad angular de los ejes de S' respecto de direcciones fijas en el sistema S. Le hemos dado un subíndice 'e' para recalcar que describe la rotación de los ejes y no de una posible rotación de O' respecto de O (la cual se reflejaría en  $\vec{A}_o(t)$ ). Por último, si la rotación de los ejes de S' cambia con el tiempo, entonces su tasa de cambio se describe mediante un vector aceleración agular  $\vec{\alpha}_e = \dot{\vec{\Omega}}_e$ .

En los problemas de movimiento relativo se debe ser muy preciso en la descripción de cómo se mueve el sistema S' que hemos elegido. La figura 8.2 muestra 2 ejemplos de sistemas que rotan en torno a un punto fijo O. En el caso a) el origen O' rota en torno a O con velocidad angular constante, pero los ejes coordenados de S' no giran (respecto a direcciones constantes en el sistema inercial). Por lo tanto, en este caso:

$$\vec{A}_o = -R\omega_o^2\hat{u}, \quad (8.1)$$

$$\vec{\Omega}_e = \vec{0}, \quad (8.2)$$

$$\vec{\alpha}_e = \vec{0}, \quad (8.3)$$

donde  $\hat{u}$  es el vector unitario indicado en la figura. En el caso b), en cambio, hemos definido un sistema S' cuyos ejes coordenados rotan respecto a direcciones fijas. En este caso

$$\vec{A}_o = -R\omega_o^2\hat{u}, \quad (8.4)$$

$$\vec{\Omega}_e = \omega_o\hat{k}, \quad (8.5)$$

$$\vec{\alpha}_e = \vec{0}. \quad (8.6)$$

Recalquemos que la rotación de los ejes de S' es independiente de la rotación del punto O'. Se propone dibujar un caso c) en que  $\vec{\Omega}_e = -\omega_o\hat{k}$ .

Si el sistema S' sólo tiene traslación respecto del sistema inercial, pero sus ejes coordenados no cambian de dirección ( $\vec{\Omega}_e = \vec{0}$ ) entonces los vectores unitarios cartesianos de S' son constantes en el tiempo, puesto que su magnitud, dirección y sentido son invariables. Cuando existe rotación de los ejes de S', empero, los vectores unitarios cartesianos de S' cambian en el tiempo debido a  $\vec{\Omega}_e$ . En este caso el cambio de los vectores unitarios en el

tiempo es el asociado a una rotación rígida, cuya expresión matemática es

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\Omega}_e \times \hat{i}', \quad (8.7)$$

$$\frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\Omega}_e \times \hat{j}', \quad (8.8)$$

$$\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\Omega}_e \times \hat{k}'. \quad (8.9)$$

## 8.2. Ecuación de Movimiento

Supongamos que describo la posición de una partícula P usando como referencia un sistema no inercial (SRNI) que llamaremos S'. Respecto de S', el vector posición de la partícula lo llamaremos  $\vec{O}'P = \vec{r}'$ . Si respecto a S' la partícula se mueve, entonces  $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ .

Como primera aproximación a mi problema yo podría ignorar el hecho de que S' es no inercial, y suponer que es un sistema inercial, tal como todos los que hemos considerado antes. En tal caso, la 2a Ley de Newton me diría

$$m\vec{a}' = \vec{F}^{\text{neta}}. \quad (8.10)$$

Tal ecuación es 100 % correcta si el sistema usado para describir el movimiento (la posición, velocidad y aceleración de la partícula) es inercial. Pero si el sistema es no inercial, entonces la ecuación de movimiento se transformará en

$$m\vec{a}' = \vec{F}^{\text{neta}} + \text{Correcciones}. \quad (8.11)$$

El objetivo de esta sección es justamente determinar la forma de esas correcciones, y cómo ellas dependen de la no inercialidad del sistema de referencia usado (es decir, ellas dependerán de  $\vec{A}_o$ ,  $\vec{\Omega}_e$  y  $\vec{a}_e$ ). Notemos que las correcciones no se deben a un problema intrínseco de las ecuaciones de Newton, sino que dan cuenta del hecho de describir el movimiento usando un sistema no inercial.

Para ayudarnos a encontrar las correcciones mencionadas usaremos un sistema de referencia inercial S. Una vez encontradas las correcciones, sin embargo, trataremos de olvidarnos de este sistema inercial S, por cuanto la gracia de la técnica es justamente describir el movimiento desde un sistema no inercial.

La posición de la partícula respecto al sistema inercial S la describiremos con el vector posición  $\vec{r}(t)$ . La figura 8.3 muestra claramente que

$$\vec{r} = \vec{R}_o + \vec{r}', \quad (8.12)$$

donde los tres vectores son en general funciones del tiempo. Nuestra intención es derivar la ecuación anterior 2 veces respecto al tiempo, de tal forma que al lado izquierdo aparezca la aceleración de la partícula respecto del sistema inercial S, la cual asociaremos a la fuerza neta actuando sobre ella. Partamos entonces derivando 1 vez la ecuación 8.12 con respecto al tiempo

$$\vec{v} = \vec{V}_o + \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (8.13)$$

El vector  $\vec{V}_o$  debe ser conocido si yo sé cómo se mueve el sistema S'. Para determinar el último término de la ecuación 8.13, expresaremos el vector  $\vec{r}'$  usando un sistema de



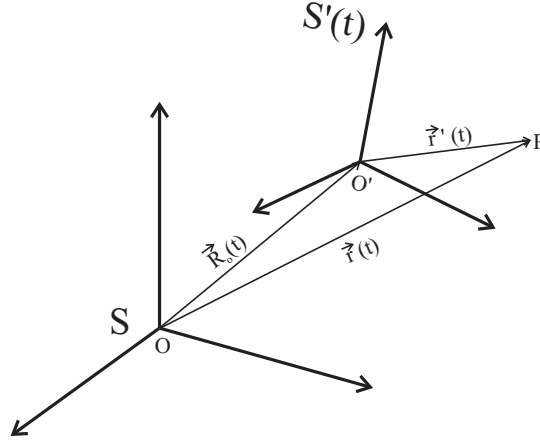


Figura 8.3: Posición de P respecto de S y S'.

coordenadas cartesianas en S', aunque los resultados a los que llegaremos son válidos para cualquier otro sistema coordenado en S' (polar, esférico, etc.). En este caso

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}', \quad (8.14)$$

donde las primas nos recuerdan por ahora que las coordenadas y vectores unitarios son del sistema S'. La derivada de 8.14 respecto al tiempo es entonces

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \dot{y}'\hat{j}' + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + \dot{z}'\hat{k}' + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}, \quad (8.15)$$

$$= \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}, \quad (8.16)$$

donde reconocemos que los vectores unitarios de S' pueden cambiar en el tiempo debido a una posible rotación de los ejes de S'. De hecho, las ecuaciones 8.7 a 8.9 me indican cómo cambian los vectores unitarios cartesianos del sistema S' cuando éste rota con velocidad angular  $\vec{\Omega}_e$ , por lo que puedo reemplazar tales expresiones en 8.16 y obtener

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + x'\vec{\Omega}_e \times \hat{i}' + y'\vec{\Omega}_e \times \hat{j}' + z'\vec{\Omega}_e \times \hat{k}', \quad (8.17)$$

$$= \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + \vec{\Omega}_e \times x'\hat{i}' + \vec{\Omega}_e \times y'\hat{j}' + \vec{\Omega}_e \times z'\hat{k}', \quad (8.18)$$

$$= \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + \vec{\Omega}_e \times \vec{r}'. \quad (8.19)$$

Los términos  $\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'$  representan la velocidad de la partícula calculada por un observador que se mueve con S' y que considera que sus vectores unitarios  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  son constantes. A esta expresión le llamaremos  $\vec{v}'$ , la velocidad de la partícula relativa al sistema S'. De esta manera, concluimos que

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\Omega}_e \times \vec{r}', \quad (8.20)$$

y, por lo tanto, reemplazando 8.20 en 8.13, la relación entre la velocidad absoluta (referida a S) y la velocidad relativa de la partícula es

$$\vec{v} = \vec{V}_o + \vec{v}' + \vec{\Omega}_e \times \vec{r}'. \quad (8.21)$$

Derivamos 8.21 con respecto al tiempo y obtenemos

$$\vec{a} = \vec{A}_o + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\alpha}_e \times \vec{r}' + \vec{\Omega}_e \times \frac{d\vec{r}'}{dt}. \quad (8.22)$$

En forma análoga a lo hecho antes al obtener 8.20, se obtiene que

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\Omega}_e \times \vec{v}', \quad (8.23)$$

donde  $\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}' + \ddot{z}'\hat{k}'$  es la aceleración calculada por un observador en S' que considera que los vectores unitarios  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  y  $\hat{k}'$  son fijos. Usando 8.20 y 8.23 y reordenando la ecuación 8.22, se obtiene finalmente

$$\vec{a} = \vec{A}_o + \vec{a}' + 2\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' + \vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') + \vec{\alpha}_e \times \vec{r}'. \quad (8.24)$$

Multipliquemos esta ecuación por la masa de la partícula, de tal forma que el lado izquierdo podamos reemplazarlo por  $m\vec{a} = \vec{F}^{\text{neta}}$  quedando

$$\vec{F}^{\text{neta}} = m\vec{A}_o + m\vec{a}' + 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' + m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') + m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'. \quad (8.25)$$

La ecuación de la forma 8.11 que estábamos buscando se obtiene despejando  $m\vec{a}'$ , en la forma

$$m\vec{a}' = \vec{F}^{\text{neta}} - m\vec{A}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'. \quad (8.26)$$

Esta ecuación nos dice que cuando describimos el movimiento de una partícula utilizando un sistema de referencia no inercial, entonces debemos “corregir” su ecuación de movimiento agregando a las fuerzas “reales” (que conforman  $\vec{F}^{\text{neta}}$ ) las correcciones indicadas, que se deben a la no inercialidad del sistema S' (de hecho, se calculan en función de  $\vec{A}_o$ ,  $\vec{\Omega}_e$  y  $\vec{\alpha}_e$ ).

### 8.3. Ecuación de movimiento en SRNI

Aquí haremos un IMPORTANTE CAMBIO DE NOTACION que debemos entender muy bien. En la sección anterior tuvimos que usar el sistema inercial S para poder relacionar  $\vec{a}'$  con  $\vec{a}$ , ya que este último término es el que Newton asoció con la fuerza neta. Debido a que en ese desarrollo necesitábamos ambos sistemas, los distinguimos poniendo primas sobre las variables referidas al sistema no inercial.

En lo que sigue, sin embargo, nuestro principal interés será describir el movimiento de la partícula usando como referencia el sistema NO inercial, por lo tanto, trataremos de ocupar el sistema inercial al mínimo. Ya que el SRNI será nuestro sistema principal, en lo que resta del capítulo dejaremos de poner primas sobre las variables de posición, velocidad y aceleración de la partícula, a pesar de que se refieren a un sistema NO inercial. En lo único que debemos tener extremo cuidado es que cuando escribamos la ecuación de movimiento de la partícula, la forma que debemos usar es

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{neta}} - m\vec{A}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v} - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}) - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}. \quad (8.27)$$

Como se observa, hemos eliminado las primas, pero es obvio que estamos trabajando sobre un sistema no inercial, por cuanto en la ecuación de movimiento hemos considerado correcciones debidas a  $\vec{A}_o$ ,  $\vec{\Omega}_e$  y  $\vec{\alpha}_e$ .

Los términos correctivos de la ecuación de movimiento 8.27 en un SRNI reciben varios nombres genéricos, tales como, fuerzas ficticias, fuerzas aparentes, pseudofuerzas, fuerzas inerciales, fuerzas no inerciales (!), etc. Además, cada uno de ellos recibe nombres individuales, y tiene características particulares que se debe conocer y que se detallan en las secciones siguientes.

## 8.4. Fuerzas inerciales

Según lo visto en la sección anterior, cuando describo el movimiento de una partícula usando un SRNI, su ecuación de movimiento es

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{neta}} - m\vec{A}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v} - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}) - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}. \quad (8.28)$$

El término  $\vec{F}^{\text{neta}}$  representa la suma neta de las que llamaremos fuerzas reales presentes en el problema. Estas fuerzas reales representan las interacciones que hemos visto en los capítulos previos del curso, como por ejemplo, la gravedad, resortes, normales, roces, etc. Estas fuerzas reales se caracterizan por cumplir la Ley de Acción y Reacción, es decir, la partícula ejerce una fuerza igual, pero de sentido contrario, sobre el otro agente del universo cuya interacción es descrita por la respectiva fuerza real.

La ecuación 8.28 me indica que si estoy usando un SRNI debo agregar cuatro “fuerzas” que aparecen debido a la no-inercialidad del sistema usado. Como se vió en el desarrollo en que las encontramos, estas fuerzas provienen del término  $m\vec{a}$ , que es denominado término inercial de la ecuación de Newton. Por lo tanto, nosotros las llamaremos en general fuerzas inerciales. A diferencia de las fuerzas reales, las fuerzas inerciales no tienen asociada una fuerza de reacción, pues no describen una interacción con otro agente del universo, sino que forman realmente parte del término de la aceleración de la ecuación de Newton del sistema inercial.

En esta sección describiremos cada una de las 4 fuerzas inerciales, indicando algunas de sus propiedades. Antes de concentrarnos en cada una, notemos que ellas dependen de los parámetros que describen la no-inercialidad del sistema, es decir, dependen de  $\vec{A}_o$ ,  $\vec{\Omega}_e$  y  $\vec{\alpha}_e$ . Si el sistema es realmente inercial, entonces estos tres parámetros son cero y la ecuación de movimiento se reduce a la ecuación de Newton para un SRI,

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{neta}}.$$

Además de lo anterior, vemos que las fuerzas inerciales dependen también de la posición y de la velocidad de la partícula (ambos medidos en el SRNI, por supuesto). Ya en los capítulos previos del curso nos encontramos con fuerzas (reales) que dependían de la posición espacial de la partícula (resorte, atracción gravitacional), y otras que dependían de su velocidad (roce viscoso). Por lo tanto, ahora simplemente estamos agregando otras fuerzas cuyas dependencias con  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$  tienen formas matemáticas distintas a las vistas antes.

De sólo ver 8.28 parece claro que la ecuación de movimiento en el SRNI es más complicada que la de un SRI, pues debo agregar las fuerzas inerciales. Pareciera que perdemos más que ganamos al usar un SRNI. Efectivamente, la dinámica del problema se hace algo más compleja, pero normalmente (si elegimos el SRNI en forma astuta) la cinemática del problema se simplificará notablemente. Esta simplificación compensará muchas veces con creces la desventaja de tener que agregar las fuerzas inerciales en la ecuación de movimiento.

### 8.4.1. Fuerza inercial por aceleración de O: $\vec{F}_o = -m\vec{A}_o$

Esta fuerza inercial se origina en la aceleración que puede tener el punto origen del sistema de referencia que estoy utilizando. La aceleración  $\vec{A}_o$  está calculada con respecto a un sistema inercial, puesto que respecto al SRNI que estoy utilizando el origen está ciertamente en reposo.

Cuando el origen del SRNI se mueve con velocidad ( $\vec{V}_o$ ) constante respecto a un sistema de referencia inercial, esta fuerza es nula. Por otro lado, si  $\vec{A}_o \neq \vec{0}$  y además los ejes del

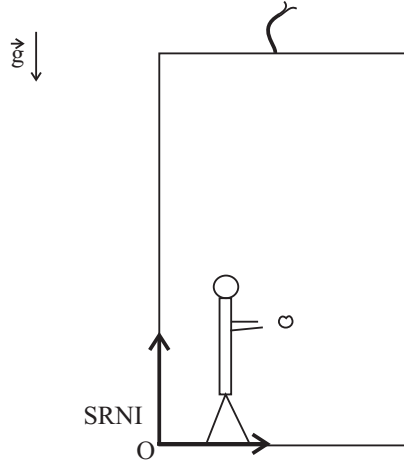


Figura 8.4: SRNI del ascensor cortado.

SRNI que estoy usando no rotan respecto a un sistema inercial (es decir,  $\vec{\Omega}_e = \vec{0}$ ,  $\vec{\alpha}_e = \vec{0}$ ), ésta es la única fuerza inercial que aparece en la ecuación de movimiento (un ejemplo de este caso podría ser el caso de la Figura 8.2a).

Esta fuerza inercial podría explicar el experimento con que partimos este capítulo. En efecto, consideremos que el experimento señalado estaba siendo realizado al interior de un ascensor que cae libremente debido a que su cable de suspensión se ha cortado. Al describir el movimiento respecto del ascensor, estoy usando un sistema de referencia no inercial, puesto que su origen se mueve hacia abajo con aceleración  $g$  (ver figura 8.4). Si consideramos que el sistema coordenado del ascensor no tiene rotación, entonces la ecuación de movimiento que debo usar para describir y entender el movimiento de la manzana respecto del ascensor es

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\text{neta}} - m\vec{A}_o. \quad (8.29)$$

Al liberar la manzana de mi mano, la única fuerza real a la que ella está sometida es su peso, por lo tanto,

$$\vec{F}^{\text{neta}} = -mg\hat{k}. \quad (8.30)$$

Por otro lado, la aceleración del origen del sistema es

$$\vec{A}_o = -g\hat{k},$$

de tal forma que reemplazando en la ecuación de movimiento se obtiene

$$m\vec{a} = -mg\hat{k} - m(-g\hat{k}) = \vec{0}. \quad (8.31)$$

Vemos que en el sistema “ascensor cortado” la fuerza inercial cancela al peso de la partícula, haciendo que si la manzana es dejada en reposo (relativo al SRNI), ella permanezca en reposo (relativo al SRNI). Mirado desde un sistema inercial exterior (alguien en el piso 12 del edificio) el movimiento es muy distinto: tanto la manzana como el ascensor caen con la misma aceleración vertical. Por lo tanto, volviendo al experimento del inicio del capítulo, si estando en un cuarto cerrado veo que al soltar la manzana ella no “cae”, lo mejor que puedo hacer es rezar!.

Puede resultar ilustrativo considerar aquí también el SRNI más extremo que podemos imaginar. Supongamos que definimos nuestro SRNI tal que sigue completamente el

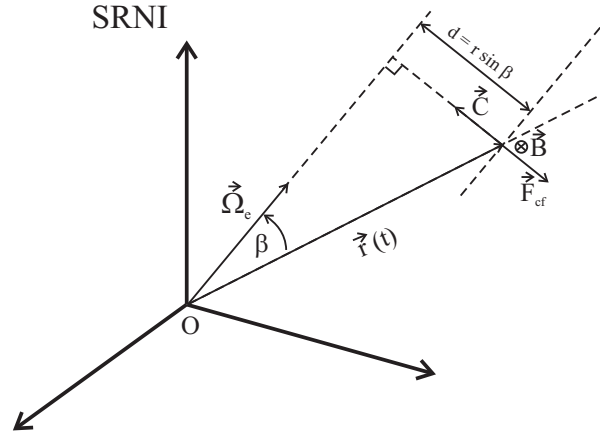


Figura 8.5: Esquema para Fuerza Centrífuga. El texto describe la definición de los vectores auxiliares  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ . Notar que la fuerza centrífuga debe ser perpendicular al eje de rotación que pasa por O, pero el dibujo plano no facilita mostrar tal cosa.

movimiento de la partícula, de tal forma que ella se mantiene siempre en el origen del sistema. Respecto de tal sistema, se cumple que  $\vec{r}(t) = \vec{0}$ ,  $\vec{v}(t) = \vec{0}$  y  $\vec{a}(t) = \vec{0}$ , pues la partícula está siempre en el origen. Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la partícula en este SRNI es simplemente

$$\vec{0} = \vec{F}^{\text{neta}} - m\vec{A}_o.$$

Dado que el origen del SRNI sigue a la partícula, la anterior es simplemente la ecuación de Newton de la partícula sobre el sistema inercial de referencia. En este ejemplo, nos fuimos al extremo de tratar de usar un SRNI en que la cinemática se simplificaba demasiado, y el resultado fue que no ganamos nada. La aplicación efectiva de la metodología de este capítulo consiste en elegir un SRNI tal que la cinemática se simplifique un poco, la dinámica se complique un poco, y la solución del problema completo sea algo más simple que usar solamente el sistema de referencia inercial.

#### 8.4.2. Fuerza Centrífuga: $\vec{F}_{cf} = -m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r})$

Esta fuerza inercial existe cuando los ejes del SRNI rotan respecto a un sistema inercial. Su valor depende también de la posición de la partícula respecto del SRNI ( $\vec{r}$ ). La Figura 8.5 muestra un esquema que permite comprender esta fuerza inercial. Para ello conviene hacer paso a paso el triple producto cruz que aparece en su expresión. El vector  $\vec{B} = \vec{\Omega}_e \times \vec{r}$  es perpendicular tanto a  $\vec{\Omega}_e$  como a  $\vec{r}$ , y su magnitud es  $|\vec{B}| = \Omega_e r \sin \beta$ , donde  $\beta$  es el ángulo entre  $\vec{\Omega}_e$  y  $\vec{r}$ . Al hacer el segundo producto cruz,  $\vec{C} = \vec{\Omega}_e \times \vec{B}$  nos aparece un vector perpendicular tanto a  $\vec{B}$  como a  $\vec{\Omega}_e$ , y su magnitud es  $|\vec{C}| = \Omega_e^2 r \sin \beta$ , por cuanto  $\vec{B}$  era ya perpendicular a  $\vec{\Omega}_e$ . Finalmente, la fuerza centrífuga es  $\vec{F}_{cf} = -m\vec{C}$ . Podemos ver que  $\vec{F}_{cf}$  es un vector que se aleja del eje de rotación definido por el vector  $\vec{\Omega}_e$  ubicado en el origen, y la magnitud de esta fuerza inercial es

$$|\vec{F}_{cf}| = md\Omega_e^2,$$

donde  $d$  es la distancia entre la partícula y el eje de rotación indicado ( $d = r \sin \beta$ ). El hecho de que esta fuerza inercial trate de alejar a la partícula del eje de rotación definido por  $\vec{\Omega}_e$  justifica su nombre de fuerza centrífuga.

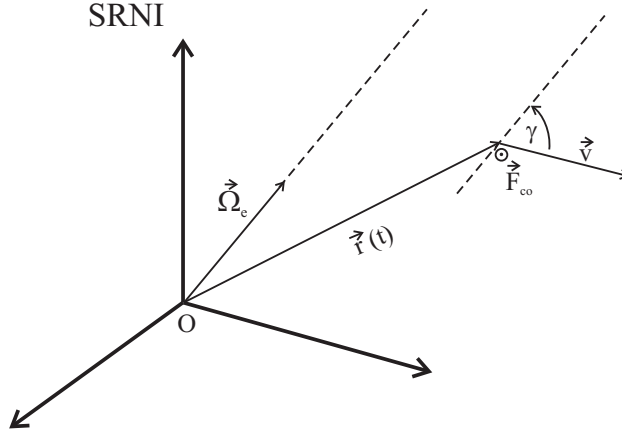


Figura 8.6: Esquema para Fuerza de Coriolis. Notar que la fuerza de Coriolis debe ser perpendicular a  $\vec{v}$  y  $\vec{\Omega}_e$ , pero el dibujo plano no facilita mostrar tal cosa.

#### Caso particular: movimiento plano y $\vec{\Omega}_e = \Omega_e \hat{k}$

Cuando el movimiento de la partícula ocurre en un plano, y la velocidad angular de rotación del SRNI es perpendicular a ese plano, entonces se puede ver que

$$\vec{F}_{cf} = m\Omega_e^2 r \hat{r}. \quad (8.32)$$

#### 8.4.3. Fuerza de Coriolis: $\vec{F}_{co} = -2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}$

Esta fuerza inercial existe cuando los ejes del SRNI rotan respecto a un sistema inercial. Además, debe cumplirse que la partícula se mueve en el sistema no inercial ( $\vec{v} \neq \vec{0}$ ). Si la partícula está en reposo en el sistema no inercial, la fuerza de Coriolis que ella “siente” es cero.

La forma matemática de  $\vec{F}_{co}$  muestra que esta fuerza es perpendicular tanto a  $\vec{\Omega}_e$  como a  $\vec{v}$  (ver figura 8.6), y su magnitud es

$$|\vec{F}_{co}| = 2m|\Omega_e||v| \sin \gamma,$$

donde  $\gamma$  es el ángulo entre  $\vec{\Omega}_e$  y  $\vec{v}$ . Por actuar siempre perpendicular a la velocidad de la partícula, la Fuerza de Coriolis es considerada una fuerza “desviadora”.

#### Caso particular: movimiento plano y $\vec{\Omega}_e = \Omega_e \hat{k}$

Cuando el movimiento de la partícula ocurre en un plano, y la velocidad angular de rotación del SRNI es perpendicular a ese plano, entonces se puede ver que

$$\vec{F}_{co} = -2m\Omega_e \hat{k} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = -2m\Omega_e(\dot{r}\hat{\theta} - r\dot{\theta}\hat{r}), \quad (8.33)$$

de lo cual la magnitud de la fuerza de Coriolis es simplemente  $|\vec{F}_{co}| = 2m|\Omega_e||v|$  y ella apunta hacia la derecha de  $\vec{v}$  cuando  $\Omega_e > 0$  y hacia la izquierda de  $\vec{v}$  cuando  $\Omega_e < 0$ .

#### 8.4.4. Fuerza Transversal: $\vec{F}_T = -m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}$

Esta fuerza inercial existe cuando los ejes del SRNI tienen una rotación no constante respecto a un sistema inercial. Si el SRNI rota con velocidad angular constante, esta fuerza inercial es nula.

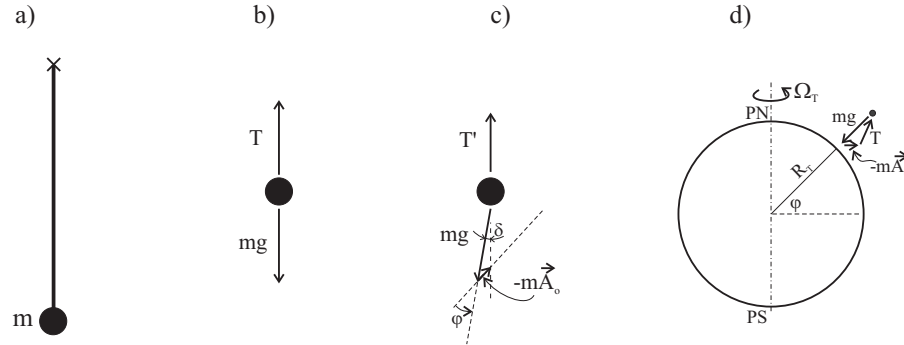


Figura 8.7: Esquema para péndulo en reposo.

La fuerza  $\vec{F}_T$  es perpendicular tanto a  $\vec{\alpha}_e$  como a  $\vec{r}$  y su magnitud es

$$|\vec{F}_T| = m|\alpha_e||r| \sin \delta,$$

donde  $\delta$  es el ángulo entre  $\vec{\alpha}_e$  y  $\vec{r}$ .

#### Caso particular: movimiento plano y $\vec{\Omega}_e = \Omega_e \hat{k}$

Cuando el movimiento de la partícula ocurre en un plano, y la velocidad angular de rotación del SRNI es perpendicular a ese plano y se mantiene en esa dirección ( $\vec{\Omega}_e = \Omega_e \hat{k}$  y  $\vec{\alpha}_e = \alpha_e \hat{k}$ ), entonces se puede ver que

$$\vec{F}_T = -m\alpha_e \hat{k} \times r\hat{r} = -m\alpha_e r \hat{\theta} \quad (8.34)$$

de lo cual la magnitud de la fuerza Transversal es simplemente  $|\vec{F}_T| = m|\alpha_e||r|$  y ella apunta en la dirección  $-\hat{\theta}$  cuando  $\alpha_e > 0$  y en la dirección  $+\hat{\theta}$  cuando  $\alpha_e < 0$ .

## 8.5. Efectos de la rotación terrestre

En las secciones previas derivamos la forma de la ecuación de movimiento de la partícula cuando el movimiento se describe usando un sistema de referencia no inercial. La conclusión fue que, además de las fuerzas reales que existan en cada problema, debemos acordarnos de agregar fuerzas inerciales que se originan en la no-inercialidad del sistema de referencia. Mostraremos ahora tres ejemplos que ilustran el efecto de la rotación terrestre en la descripción del movimiento de una partícula cerca de la superficie de la tierra.

### 8.5.1. Péndulo en reposo

Consideremos el caso de un péndulo que está en reposo, es decir, la partícula de masa  $m$  pende desde una cuerda ideal sin moverse (figura 8.7a). Si el “reposo” fuese observado respecto de un sistema inercial el balance de fuerzas sería el de la figura 8.7b, en la cual el peso de la partícula se compensa con la tensión de la cuerda.

Sin embargo, en el experimento que podemos hacer en la sala de clases, al decir que el péndulo está en reposo, nos referimos a que está en reposo respecto a nosotros, que sabemos que rotamos junto con la Tierra en torno a un eje que atraviesa los polos Norte y Sur. Por lo tanto, cuando decimos que el péndulo está en reposo, estamos describiendo el “movimiento” de la partícula respecto a un SRNI, y el DCL de la partícula debe incluir

las fuerzas inerciales que puedan existir. Para simplificar al máximo el problema, nuestro SRNI lo definiremos tal que su origen coincida con la posición de la partícula. Por lo tanto, la única fuerza inercial que debemos agregar es  $-m\vec{A}_o$ . El DCL en este SRNI es el presentado en la figura 8.7c, donde además de las fuerzas reales del peso y la tensión hemos agregado la fuerza inercial indicada. Debido a que en este SRNI la partícula se mantiene en reposo, la suma vectorial de las tres fuerzas debe anularse.

Para saber cómo dibujar la fuerza inercial  $-m\vec{A}_o$ , debemos considerar brevemente cómo es el movimiento del origen del SRNI respecto a un sistema inercial. Para ello la figura 8.7d muestra la Tierra completa y la ubicación del punto donde estamos mirando el péndulo en “reposo”. Suponemos que el experimento lo hacemos en un lugar de la Tierra que tiene latitud  $\varphi$  (ángulo geográfico que se mide desde el plano ecuatorial). En este caso el movimiento del origen de mi SRNI corresponde a un movimiento circular uniforme respecto al eje terraqueo. Por lo tanto, la aceleración de nuestro origen es de tipo centrípeta (dirigida hacia el eje de rotación) y la fuerza inercial se aleja del eje de rotación de la Tierra. Puede verse que el ángulo entre el peso (dirigido hacia el centro de masa de la Tierra) y la fuerza inercial es igual a la latitud del lugar. Este análisis justifica el DCL que dibujamos en la figura 8.7c.

La figura 8.7c muestra claramente que para el péndulo en reposo respecto al SRNI que rota con la Tierra, la tensión de la cuerda no tiene exactamente la misma dirección (ni magnitud) que el peso (excepto cuando hacemos el experimento en los Polos). De hecho, existe un ángulo  $\delta$  entre ambas fuerzas reales, que se debe a la fuerza inercial  $-m\vec{A}_o$  que participa en el balance de fuerzas del SRNI. La magnitud de este ángulo  $\delta$  está relacionada geoméricamente con la razón  $|\vec{A}_o|/g$ . Para determinar cuán grande es  $\delta$  pongamos números. La rotación del origen del SRNI tiene radio de giro igual a  $R_T \sin \varphi$  y velocidad angular  $\Omega_T \sim 2\pi/86400 \text{ s}^{-1}$ . Dado que  $R_T \sim 6370000 \text{ m}$ , entonces  $|\vec{A}_o| \sim 0,024 \text{ ms}^{-2}$  (en latitud  $45^\circ\text{N}$  o  $45^\circ\text{S}$ ). Ya que  $g \sim 9,8 \text{ ms}^{-2}$ , entonces  $|\vec{A}_o|/g \sim 0,0025$  y el ángulo  $\delta$  resultante es realmente pequeño. De hecho, en la dinámica de cuerpos (y fluidos) que se mueven cerca de la superficie de la Tierra, este efecto se trata de una forma muy sencilla. Se define la gravedad “efectiva”  $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{A}_o$ , tal que ahora el “peso efectivo”,  $m\vec{g}'$  incluye tanto el efecto del peso real como el de la fuerza inercial  $-m\vec{A}_o$ . Usando esta gravedad efectiva, en vez de la gravedad “real”, podemos en general casi olvidarnos del efecto de la mencionada fuerza inercial. Por supuesto, algo perdemos, puesto que ahora esta gravedad efectiva es dependiente de la latitud del lugar, por lo que podrá ser considerada constante, sólo en la medida que el movimiento de la partícula no se extienda sobre regiones geográficas muy extensas. Por último valga acotar que dependiendo de la precisión de la aplicación en que uno trabaje, estos efectos como la variación latitudinal de la gravedad efectiva, el pequeño ángulo  $\delta$  entre el peso real y una plomada (otro nombre para el péndulo en reposo), y otros muchos efectos adicionales (cuasi-esfericidad de la Tierra, inhomogeneidad de la distribución de masa terrestre, rotación de la Tierra respecto al Sol, etc.) deben ser considerados.

### 8.5.2. Péndulo cortado

Si se corta la cuerda del péndulo en reposo relativo a la Tierra que consideramos recién, el problema se transforma en una caída libre de una partícula que parte desde el reposo (relativo a la Tierra) sometida sólo a la acción de la fuerza gravitatoria terrestre. Nuestro primer impulso es pensar que ella caerá verticalmente hacia abajo. Sin embargo, dado que nuestro sistema de referencia está rotando con la tierra, es posible que el movimiento no sea tan simple como parece. Estudiamos en esta sección precisamente esto.



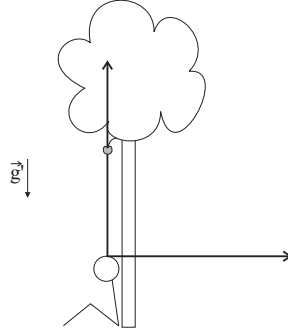


Figura 8.8: Pensante bajo manzana.

*Problema:* una manzana de masa  $m$  se ubica inicialmente a una altura  $H$  exactamente sobre la cabeza de una persona (ver figura 8.8). Si la manzana comienza su caída desde el reposo (relativo al sistema no inercial que gira con la Tierra), ¿hacia dónde se desviará al caer? (supongamos que no hay roce).

La ecuación de movimiento en el sistema rotante es

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{real}} + \vec{F}_{\text{inerciales}}. \quad (8.35)$$

Según lo visto antes esta ecuación podemos escribirla como

$$m\vec{a} = m\vec{g}' - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v} - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}). \quad (8.36)$$

Hay dos cosas que debemos decir acerca de la notación en 8.35 y 8.36. En primer lugar, los vectores posición, velocidad y aceleración en ambas ecuaciones corresponden a vectores descritos en el sistema no-inercial, y, por lo tanto, deberían llevar una prima ( $\vec{r}'$ ,  $\vec{v}'$  y  $\vec{a}'$ ). Sin embargo, para simplificar la notación hemos decidido no poner primas, teniendo presente eso sí, que sabemos que corresponden a vectores del sistema no inercial. El segundo aspecto de notación, es que la aceleración  $\vec{g}'$  en 8.36 corresponde a la aceleración de gravedad efectiva, la que, según vimos recién, incluye la aceleración de gravedad real y también incluye el efecto de la aceleración del origen del sistema coordenado no inercial.

El segundo término de la mano derecha en 8.36 es la fuerza de Coriolis, y el tercer término es la fuerza centrífuga. Suponiendo que la magnitud de  $\vec{r}$  es pequeña despreciaremos en lo sucesivo los términos con  $\Omega_e^2$  y nos quedaremos sólo con la fuerza de Coriolis. En tal caso la ecuación 8.36 puede ser integrada una vez en el tiempo, obteniéndose:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}'t - 2\vec{\Omega}_e \times (\vec{r} - \vec{r}_o), \quad (8.37)$$

en que los subíndices 'o' indican condiciones iniciales. Podemos reemplazar este resultado en 8.35 y obtener

$$\vec{a} = \vec{g}' - 2\vec{\Omega}_e \times (\vec{v}_o + \vec{g}'t - 2\vec{\Omega}_e \times (\vec{r} - \vec{r}_o)). \quad (8.38)$$

Despreciando nuevamente los términos  $\sim \Omega_e^2$ , podemos volver a integrar en el tiempo y obtenemos

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}'t - 2t\vec{\Omega}_e \times \vec{v}_o - t^2\Omega_e \times \vec{g}' \quad (8.39)$$

e integrando una vez más se obtiene

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}'t^2 - t^2\vec{\Omega}_e \times \vec{v}_o - \frac{t^3}{3}\Omega_e \times \vec{g}'. \quad (8.40)$$

Los dos últimos términos de las ecuaciones 8.39 y 8.40 son los términos adicionales introducidos por la rotación del sistema de referencia. Los otros términos son los que aparecían normalmente en la caída libre en un sistema inercial.

En el caso más simple en que la partícula parte del reposo con respecto al sistema no inercial,  $\vec{v}_o = 0$ , y el desplazamiento asociado a la rotación terrestre se reduce a

$$\Delta \vec{r}_{\text{rotacion}} = -\frac{t^3}{3} \vec{\Omega}_e \times \vec{g}'. \quad (8.41)$$

Intentemos comprender físicamente este desplazamiento debido a la rotación del sistema. La figura 8.9 muestra el esquema de vectores que permite evaluar el desplazamiento indicado. De la figura se desprende que el desplazamiento asociado a la rotación está siempre dirigido al Este.

Es decir, al caer la partícula se desvía hacia el Este. Recordemos que la Tierra está rotando hacia el Este, por lo tanto, al caer la partícula se está “adelantando” respecto al origen del sistema rotante. ¿Tiene esto sentido físico?

Se puede mostrar que este “adelantamiento” de la partícula al caer responde a la conservación de momento angular absoluto de la partícula. Recordemos que en la caída libre la partícula está sometida sólo a una fuerza central (la atracción gravitatoria terrestre), por lo que conserva su momento angular absoluto. Sin embargo, mientras cae la partícula está disminuyendo su distancia al eje de rotación, y, por lo tanto, debe aumentar su velocidad angular de rotación. La forma más simple de ver esto es hacer el análisis para una partícula cayendo verticalmente en el ecuador. Su momento angular es constante, es decir,

$$r^2 \Omega = \text{constante} \quad (8.42)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo

$$2r\Omega \frac{dr}{dt} + r^2 \frac{d\Omega}{dt} = 0. \quad (8.43)$$

En la caída libre  $dr/dt \sim -g't$ , lo cual reemplazado en 8.43 arroja

$$r \frac{d\Omega}{dt} \sim 2\Omega g't. \quad (8.44)$$

Inicialmente tanto la partícula como el sistema no inercial rotaban con velocidad angular  $\Omega_e$ , pero 8.44 muestra que al caer, la partícula comienza a aumentar su velocidad de rotación, lo cual crea el efecto de una velocidad relativa dirigida al Este respecto al sistema no inercial. Se tiene entonces que

$$\frac{dv'}{dt} \sim r \frac{d\Omega}{dt} \sim 2\Omega_e g't, \quad (8.45)$$

donde hemos puesto la prima en  $v'$  para enfatizar que se trata de velocidad relativa al sistema rotante. La ecuación 8.45 se resuelve en  $v' \sim \Omega_e g't^2$ . Este resultado es semejante al de la ecuación 8.39. Evaluando el desplazamiento para una caída de 1000 m se estima  $|\Delta r'| \sim 0,8$  m. Por supuesto, otros efectos como el roce y el arrastre del viento harán que el efecto de la rotación terrestre sea la mayor parte de las veces imperceptible.

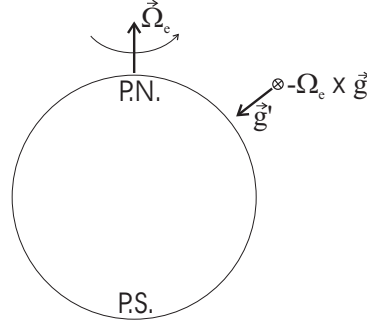


Figura 8.9: Esquema de vectores

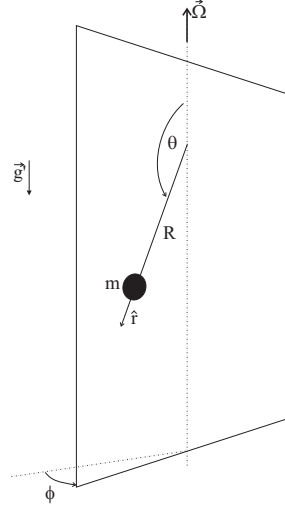


Figura 8.10: Péndulo con plano rotante

### 8.5.3. Péndulo de Foucault

*Problema:* Al dejar oscilar un péndulo cuasi-ideal durante muchas horas, se observa que su plano de oscilación va rotando en un eje vertical.

La figura 8.10 ilustra el fenómeno descrito. El movimiento del péndulo que describimos en capítulos anteriores del curso era completamente plano, y no se encontraba esta rotación del plano de oscilación. Buscaremos la causa en la no inercialidad del sistema de referencia que usamos al describir el movimiento del péndulo.

Dado que el movimiento del péndulo es ahora tri-dimensional, usaremos coordenadas esféricas para describirlo (indicadas en figura 8.10). En particular, nos interesa la ecuación del ángulo azimutal ( $\phi$ , en la convención usada en las clases), pues es en esta dirección en la que ocurre el movimiento de interés.

Dado que las fuerzas reales no tienen componente según  $\hat{\phi}$ , si el sistema de referencia fuese inercial la ecuación de movimiento en  $\hat{\phi}$  se reduciría a (con  $r = R$ ,  $\dot{r} = 0$ )

$$m \left( R\ddot{\phi} \sin \theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \right) = 0, \quad (8.46)$$

cuya solución para  $\phi$  es simplemente  $\ddot{\phi} = \dot{\phi} = 0$ , es decir, no hay rotación azimutal.

Sin embargo, para un sistema no inercial que rota con la Tierra, debemos verificar si hay fuerzas inerciales que tengan componente según  $\hat{\phi}$ . Nuevamente nos preocuparemos sólo de la fuerza de Coriolis,  $\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}$ . Más aún, considerando que  $\vec{v}$  es cuasi-horizontal, nos ocuparemos sólo del efecto de la componente vertical de la velocidad angular terrestre,  $\Omega_{ez} = \vec{\Omega}_e \cdot \hat{k} = \Omega_e \sin \varphi$ , donde  $\varphi$  es la latitud del lugar.

Por otro lado, la velocidad en coordenadas esféricas ( $r = R = \text{constante}$ ) es

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + R\dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi} \quad (8.47)$$

de donde la componente  $\hat{\phi}$  de la fuerza de Coriolis será

$$\vec{F}_{\text{cor}} \cdot \hat{\phi} = -2m\Omega_e \sin(\varphi)R\dot{\theta}(\hat{k} \times \hat{\theta}) \cdot \hat{\phi}. \quad (8.48)$$

La descomposición de  $\hat{k}$  en coordenadas esféricas la hemos visto ya muchas veces y corresponde a  $\hat{k} = -\sin(\theta)\hat{\theta} + \cos(\theta)\hat{r}$ . Con lo cual se obtiene

$$\vec{F}_{\text{cor}} \cdot \hat{\phi} = -2m\Omega_e \sin(\varphi)R\dot{\theta} \cos(\theta). \quad (8.49)$$

La ecuación de movimiento según  $\hat{\phi}$  en el sistema no-inercial resulta entonces

$$R\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = -2\Omega_e\sin(\varphi)R\dot{\theta}\cos(\theta). \quad (8.50)$$

Se puede verificar que la solución en  $\phi$  es

$$\ddot{\phi} = 0, \quad (8.51)$$

$$\dot{\phi} = -\Omega_e\sin(\varphi) \quad (8.52)$$

La rotación azimutal es, por lo tanto, una rotación de velocidad angular constante, cuyo periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_e\sin(\varphi)}, \quad (8.53)$$

que para la latitud de Santiago ( $\varphi \sim -33,5^\circ$ ) implica un periodo de  $\sim 44$  horas y rotación en sentido contrario a los punteros del reloj ( $\dot{\phi} > 0$ ).

¿Cómo interpretamos físicamente esta rotación del plano de oscilación? Su causa está en la fuerza de Coriolis introducida por la rotación terrestre. Recordemos que la fuerza de Coriolis es siempre perpendicular a la velocidad (relativa) de la partícula. En el caso de la partícula en el hemisferio Sur, la componente vertical de la rotación terrestre produce una fuerza de Coriolis que se dirige a la izquierda del vector velocidad. En su movimiento oscilatorio la partícula es continuamente desviada hacia su izquierda, lo cual produce una lenta rotación del plano de oscilación, según se ilustra en la figura 8.11.



Figura 8.11: Trayectoria del péndulo de Foucault mirada desde arriba (Hemisferio Sur).

## Capítulo 9

# Sistemas de Partículas

Hasta ahora hemos estudiado la dinámica de una partícula individual y conocemos su ecuación de movimiento, la que nos permite calcular la posición  $\vec{r}(t)$  de la partícula si conocemos las fuerzas que actúan sobre ella. También hemos definido los conceptos de energía y momento angular de la partícula y sabemos cómo calcular su evolución. A medida que abordamos problemas más complejos (y más realistas) los sistemas que estudiaremos serán también más complejos y el modelo de una sola partícula será insuficiente o inapropiado. En este capítulo estudiaremos el problema de describir la dinámica de un sistema compuesto por varias partículas.

A modo de ejemplo, podemos pensar en un sistema de dos partículas A y B unidas entre sí por un resorte a la vez que caen sometidas a su peso (ver Figura 9.1). El movimiento de este sistema puede ser bastante complejo, puesto que ambas van cayendo con velocidades distintas, pueden ir rotando y el resorte puede irse estirando o comprimiendo. Si escribimos la ecuación de movimiento de la partícula A veremos que aparece en ella la posición de la partícula B (pues  $|\vec{r}_A - \vec{r}_B|$  determina la magnitud de la fuerza del resorte). Esto hace que no podamos resolver la ecuación de movimiento de A (encontrar  $\vec{r}_A(t)$ ) sin resolver en forma simultánea la ecuación de movimiento para B. En este caso decimos que las ecuaciones de movimiento de A y B están acopladas.

Si el sistema que estudiamos tiene más partículas (por ejemplo, un gas compuesto por muchísimas moléculas individuales) el número de ecuaciones de movimiento que debemos resolver en forma simultánea crece y el problema de describir el movimiento de una de las partículas individuales se torna muy complicado. Sin embargo, también es cierto que a medida que el sistema tiene más partículas la importancia de cada una de ellas en forma individual suele decrecer. Por ejemplo, si estudiamos un gas compuesto por muchas moléculas casi nunca nos interesará la posición o velocidad de una molécula individual, sino que nos preguntaremos por propiedades globales de las moléculas que conforman el

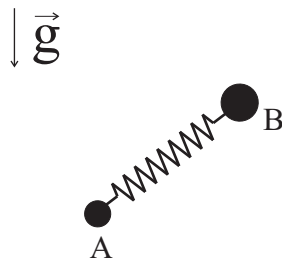


Figura 9.1: Sistema de dos partículas con resorte y peso

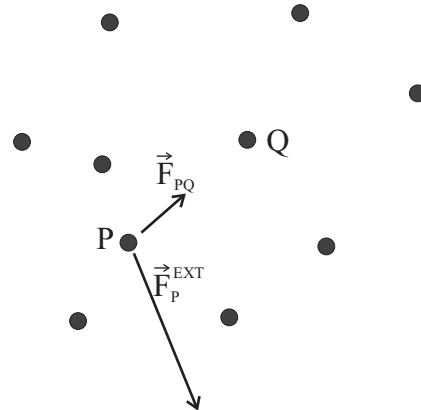


Figura 9.2: Fuerzas internas y externas

gas, como por ejemplo, la rapidez promedio de todas ellas. Veremos en este capítulo que para sistemas compuestos por varias partículas podemos deducir ecuaciones relativamente simples para la evolución de algunas propiedades globales del sistema, como su momento, su energía y su momento angular (conceptos cuya definición extenderemos para un sistema de partículas).

## 9.1. Definición del Sistema

Al abordar un problema con varias partículas el primer paso es definir cuáles de ellas conforman nuestro sistema de interés. La decisión de cuáles de todas las partículas del universo pertenecen a nuestro sistema depende exclusivamente del gusto o interés del analista, es decir, de la pregunta que estamos tratando de responder. A modo de ejemplo, pensemos en una gran mesa de billar con 10 bolas rojas y 10 bolas verdes. A uno de los jugadores puede interesarle describir el movimiento del grupo de bolas rojas, por lo que su sistema comprenderá sólo las bolas de ese color. Las otras bolas no formarán parte de su sistema y sus efectos se sentirán como fuerzas *externas* al sistema de bolas rojas. Al otro jugador, en cambio, le preocupa el grupo de bolas verdes, por lo que probablemente su sistema de partículas contendrá sólo las bolas verdes, y las bolas rojas serán externas a su sistema.

Una vez definidas las partículas que conforman nuestro sistema será extremadamente conveniente distinguir entre las interacciones entre las partículas del sistema (llamadas *fuerzas internas* del sistema) y las interacciones entre las partículas del sistema y el resto del universo (*fuerzas externas*). La figura 9.2 ilustra esta distinción. La partícula P percibe una fuerza externa  $\vec{F}_P^{\text{ext}}$  que, por ejemplo, podría ser su peso, y también una fuerza  $\vec{F}_{PQ}$  que es la fuerza interna debida a su interacción con la partícula Q (asumimos que Q pertenece al sistema). Esta fuerza interna podría ser por ejemplo, la fuerza de un resorte que ligue a ambas partículas. Por supuesto, pueden existir fuerzas internas entre todos los pares de partículas del sistema, así como puede haber muchas otras fuerzas externas al sistema. Recalquemos que la distinción entre fuerzas internas y externas depende completamente de las partículas que decidí incluir en mi sistema. Si éste no hubiese incluido a la partícula Q, entonces  $\vec{F}_{PQ}$  debe ser considerada una fuerza externa. O bien, si mi sistema hubiese incluido a la partícula “planeta Tierra” que es responsable del peso de la partícula P, entonces el peso de ella debe ser considerado una fuerza interna.

La utilidad de distinguir entre fuerzas internas y externas es que la Ley de Acción

y Reacción nos garantiza que  $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$ . Al aplicar esta propiedad sobre las fuerzas internas, veremos en las secciones siguientes que en la evolución de muchas propiedades globales del sistema las fuerzas internas no tienen un efecto neto. Esta es una gran simplificación, pues en sistemas de muchas partículas la cantidad de fuerzas internas que puede existir es muy grande, de tal modo que si sabemos a priori que en algunos casos ellas pueden ser ignoradas, entonces el análisis se simplifica grandemente.

## 9.2. Movimiento del Sistema

### 9.2.1. Centro de Masa

La primera propiedad global que definiremos para un sistema de partículas es la posición de su Centro de Masa (CM). Consideramos un sistema compuesto por  $N$  partículas puntuales individuales, cada una con masa  $m_i$  y con una posición descrita mediante un vector  $\vec{r}_i$ . Definiremos la posición del centro de masa del sistema,  $\vec{R}_{CM}$ , como

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{r}_i, \quad (9.1)$$

donde  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  es la masa total del sistema (también una propiedad global del sistema). La posición del centro de masa puede interpretarse como un promedio ponderado de las posiciones de las partículas individuales, donde los factores de ponderación son proporcionales a las masas individuales de cada una.

El centro de masa nos indica la posición “promedio” del sistema, y lo utilizaremos para representar la posición del sistema como un todo. Notemos que la posición del CM no corresponde en general con la posición de ninguna de las partículas individuales que componen el sistema. Por otra parte, si todas las partículas del sistema tienen igual masa el CM se ubica en el centro geométrico simple de todas las partículas del sistema.

### 9.2.2. Movimiento del Centro de Masa

Dado que cada partícula del sistema se mueve en el tiempo de acuerdo a su ecuación de movimiento particular, la posición del CM también cambia en el tiempo. A partir de la definición de  $\vec{R}_{CM}$  podemos calcular la velocidad y la aceleración del CM simplemente derivando 9.1 con respecto al tiempo

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{v}_i \quad (9.2)$$

$$\vec{A}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{a}_i, \quad (9.3)$$

donde  $\vec{v}_i$  y  $\vec{a}_i$  son las velocidades y aceleraciones de cada partícula individual, y hemos supuesto que la masa de cada una es constante en el tiempo.

Para cada partícula del sistema podemos escribir su ecuación de movimiento en la forma

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{neto}} \quad (9.4)$$

lo que podemos reemplazar en 9.3 y reordenar para obtener

$$M\vec{A}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{neta}}. \quad (9.5)$$

Al ver la ecuación 9.5 podemos decir que el CM se mueve obedeciendo una ecuación similar a la ecuación de movimiento de una partícula individual, salvo que la masa en 9.5 es la masa total del sistema y la fuerza neta que acelera al CM es la suma vectorial de todas las fuerzas actuando sobre cada partícula del sistema. Sin embargo, aún podemos decir algo más. Entre todas las fuerzas que actúan sobre una partícula individual, hemos distinguido las fuerzas ejercidas por otras partículas del sistema (fuerzas internas), y las fuerzas que se originan en elementos o partículas ajenos al sistema (fuerzas externas). Es decir, la fuerza neta sobre la partícula  $i$  la separaremos en

$$\vec{F}_i^{\text{neta}} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}. \quad (9.6)$$

El primer término de la mano derecha representa todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula  $i$ , mientras que  $\vec{F}_{ij}$  representa la fuerza que la partícula  $j$  del sistema ejerce sobre la partícula  $i$ . Reemplazando 9.6 en 9.5 obtenemos

$$M\vec{A}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \left( \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}. \quad (9.7)$$

La tercera ley de Newton (Acción y Reacción) nos asegura que  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  de lo cual es fácil ver que la doble sumatoria en 9.7 siempre se anula. Por lo tanto, la ecuación de movimiento del CM se simplifica a

$$M\vec{A}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (9.8)$$

En conclusión, el movimiento del CM es equivalente al de una partícula cuya masa es la masa total del sistema, y las fuerzas relevantes son sólo las fuerzas *externas*. Las fuerzas internas del sistema no afectan ni pueden afectar el movimiento del CM.

### 9.2.3. Movimiento Relativo al Centro de Masa

Según la sección anterior, el movimiento del CM se describe exactamente como el de una partícula de masa  $M$  sujeta a las fuerzas externas al sistema, por lo cual es un problema que podemos considerar conocido y resuelto. En ocasiones resulta útil describir el movimiento de las partículas con respecto a la posición del CM. En tal caso, definimos el vector  $\vec{\rho}_i$  como la posición de la partícula  $i$  relativa a la posición del CM (ver Figura 9.3):

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{\text{CM}}. \quad (9.9)$$

Debido a la definición de  $\vec{R}_{\text{CM}}$  (ecuación 9.1) se puede ver que

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{\text{CM}}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i - M \vec{R}_{\text{CM}} = 0, \quad (9.10)$$



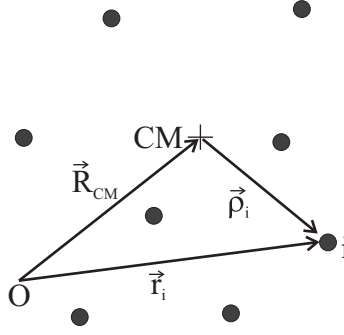


Figura 9.3: Movimiento relativo al CM

es decir, el promedio (ponderado por las masas) de las posiciones de las partículas del sistema respecto del CM es nulo:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i = 0. \quad (9.11)$$

La velocidad de la partícula  $i$  relativa al CM es simplemente  $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{\text{CM}}$ , y derivando 9.11 con respecto al tiempo se obtiene

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0. \quad (9.12)$$

Por último, se define la aceleración de la partícula relativa al CM,  $\ddot{\vec{\rho}}_i = \vec{a}_i - \vec{A}_{\text{CM}}$  y derivando 9.12 se cumple que

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = 0. \quad (9.13)$$

### 9.3. Energía Mecánica del Sistema

#### 9.3.1. Energía Cinética del Sistema de Partículas

La energía cinética total del sistema de partículas es simplemente la suma de la energía cinética de todas las partículas individuales que componen el sistema, en la forma

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i. \quad (9.14)$$

Introduciendo la definición de la velocidad relativa al CM,  $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{\text{CM}}$ , la energía cinética total del sistema resulta

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{\text{CM}} + \dot{\vec{\rho}}_i) \cdot (\vec{V}_{\text{CM}} + \dot{\vec{\rho}}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{\text{CM}} \cdot \vec{V}_{\text{CM}} + \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + 2\vec{V}_{\text{CM}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i). \quad (9.15)$$

El último término de la ecuación anterior se anula ya que

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i 2\vec{V}_{\text{CM}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{V}_{\text{CM}} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0 \quad (9.16)$$

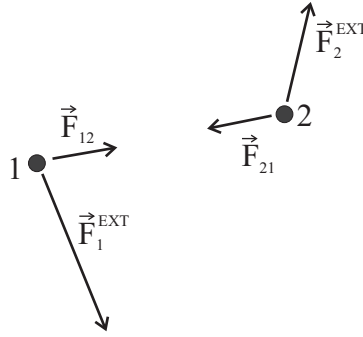


Figura 9.4: Sistema de 2 partículas

debido a la propiedad 9.12. Por lo tanto, la energía cinética total del sistema se reduce a

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{\text{CM}} \cdot \vec{V}_{\text{CM}} + \dot{\vec{\rho}}_i \cdot \dot{\vec{\rho}}_i) = \frac{1}{2} M V_{\text{CM}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{\rho}}_i|^2. \quad (9.17)$$

Esta última ecuación la resumimos como

$$K = K_{\text{CM}} + K_{\text{REL}}, \quad (9.18)$$

donde  $K_{\text{CM}}$  es la energía cinética del centro de masa y  $K_{\text{REL}}$  es la suma de la energía cinética de las partículas en su movimiento *relativo* al CM.

La ecuación 9.18 se puede interpretar diciendo que la energía cinética total de un sistema de partículas se divide en una parte asociada al movimiento del sistema como un todo ( $K_{\text{CM}}$ ) y otra parte que podemos llamar energía cinética “interna” del sistema, pues se debe al movimiento de las partículas individuales respecto a su CM ( $K_{\text{REL}}$ ). Como ejemplo de esta separación, podemos mencionar el movimiento de un grupo grande de moléculas de aire. El término  $K_{\text{CM}}$  se relaciona con el movimiento del CM de este grupo de moléculas, que es lo que llamamos comúnmente “velocidad del viento” (valores típicos del orden de 10 m/s). Por otra parte, sabemos que las moléculas de aire individuales se están moviendo instantáneamente a gran velocidad (valores típicos del orden de 300 m/s). La energía cinética,  $K_{\text{REL}}$ , de este movimiento “interno” de las moléculas se relacionará en cursos posteriores a lo que llamamos temperatura.

### 9.3.2. Conservación de Energía para Sistemas de Partículas

Para deducir la forma que toma la ecuación de conservación de la energía cuando la aplicamos a un sistema de partículas, consideremos un sistema simple compuesto de sólo dos partículas (Figura 9.4). Las ecuaciones de movimiento para cada una de ellas son

$$\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 \left( \frac{dv_1}{dt} \hat{t}_1 + \frac{v_1^2}{\rho_1} \hat{n}_1 \right) \quad (9.19)$$

$$\vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 \left( \frac{dv_2}{dt} \hat{t}_2 + \frac{v_2^2}{\rho_2} \hat{n}_2 \right) \quad (9.20)$$

donde hemos expresado la aceleración de cada partícula usando coordenadas intrínsecas (sólo en 9.19 y 9.20  $\rho_1$  y  $\rho_2$  se refieren a los radios de curvatura instantáneos de las trayectorias de las partículas 1 y 2). Como hicimos en el caso de una partícula, la ecuación de la energía la obtenemos haciendo el producto punto de las ecuaciones anteriores con el

desplazamiento diferencial de cada una de ellas ( $d\vec{r} = ds \hat{t} = v dt \hat{t}$ ). Se obtiene entonces que

$$\vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 = dK_1, \quad (9.21)$$

$$\vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = dK_2. \quad (9.22)$$

Para obtener el cambio de la energía cinética total del sistema debemos sumar las dos ecuaciones anteriores

$$\vec{F}_1^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{\text{ext}} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d(K_1 + K_2) = dK \quad (9.23)$$

donde hemos usado la propiedad  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

De acuerdo a 9.23 el cambio de la energía cinética total del sistema de partículas se origina en el trabajo de las fuerzas externas más el trabajo de las fuerzas internas. En general, en la ecuación de la energía no podemos ignorar el efecto de las fuerzas internas.

Sin embargo, notemos que el trabajo de las fuerzas internas del sistema se calcula en base al desplazamiento relativo entre las partículas del sistema ( $d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ ). Para cierto tipo de sistemas el trabajo de las fuerzas internas es efectivamente cero. Esto ocurre en los sistemas rígidos en que los cambios temporales del vector  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  son perpendiculares a  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ , de tal modo que  $\vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$ , puesto que la fuerza interna  $\vec{F}_{12}$  actúa en la dirección  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . Un ejemplo de esto sería un sistema en que las partículas están unidas entre sí por medio de barras indeformables. Por más complicado que sea el movimiento del sistema, las barras indeformables nos aseguran que los cambios de los vectores  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  son siempre perpendiculares a  $\vec{F}_{ij}$ , por lo que las fuerzas internas no realizan trabajo y no participan de la ecuación de la energía del sistema completo.

Integrando la ecuación 9.23 entre dos instantes A y B, la ecuación más general resulta

$$\Delta K = \sum W^{F_{\text{ext}}} + \sum W^{F_{\text{int}}} \quad (9.24)$$

donde las sumas son sobre todas las fuerzas que actúan sobre el sistema. Si las fuerzas actuando en el problema son conservativas, entonces sus trabajos se pueden calcular en función de energías potenciales:

$$\sum W^{F_{\text{ext}}} = \sum -\Delta V^{\text{ext}} = -\Delta \sum V^{\text{ext}} \quad (9.25)$$

$$\sum W^{F_{\text{int}}} = \sum -\Delta V^{\text{int}} = -\Delta \sum V^{\text{int}} \quad (9.26)$$

de tal forma que en este caso la ecuación de conservación de la energía mecánica total resulta

$$\Delta \left( K + \sum V^{\text{int}} + \sum V^{\text{ext}} \right) = 0. \quad (9.27)$$

En este caso la energía mecánica total incluye la energía cinética total del sistema, las energías potenciales debidas a las fuerzas (conservativas) internas, y las energías potenciales debidas a las fuerzas (conservativas) externas.

Cuando además hay fuerzas internas o externas no conservativas, la ecuación se extiende naturalmente a

$$\Delta \left( K + \sum V^{\text{int}} + \sum V^{\text{ext}} \right) = W^{F_{\text{nocon}}} \quad (9.28)$$

donde en la mano derecha está el trabajo de las fuerzas no conservativas externas e internas al sistema, el cual se debe calcular integrando los correspondientes términos de la ecuación 9.23.

## 9.4. Momento Angular del Sistema

### 9.4.1. Momento Angular respecto del Origen

El momento angular de cada partícula respecto al origen  $O$  del sistema de referencia fue definido por

$$\vec{l}_{Oi} = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad (9.29)$$

y derivamos en capítulos anteriores su ecuación de evolución

$$\frac{d\vec{l}_{Oi}}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{neto}} = \vec{\tau}_{Oi}^{\text{neto}} \quad (9.30)$$

que corresponde a la ecuación del momento angular.

Se define el momento angular del sistema de partículas con respecto al origen simplemente como la suma de los momentos angulares de todas las partículas que componen el sistema:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{l}_{Oi} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \quad (9.31)$$

Nos interesa derivar la ecuación que nos diga cómo cambia  $\vec{L}_O$  en el tiempo, lo cual obtenemos simplemente derivando 9.31 con respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_{Oi}^{\text{neto}}. \quad (9.32)$$

Podemos simplificar esta expresión si distinguimos entre los torques ejercidos por las fuerzas internas y las fuerzas externas al sistema

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}. \quad (9.33)$$

Llamemos  $S$  a la doble sumatoria que contiene los torques de las fuerzas internas:

$$S = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}. \quad (9.34)$$

Consideremos los términos presentes en  $S$  que involucran a las partículas  $P$  y  $Q$ :

$$S = \cdots + \vec{r}_P \times \vec{F}_{PQ} + \cdots + \vec{r}_Q \times \vec{F}_{QP} + \cdots \quad (9.35)$$

y recordemos que por la ley de acción y reacción,  $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$  de tal modo que 9.35 equivale a

$$S = \cdots + (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{PQ} + \cdots. \quad (9.36)$$

Por último consideramos que las fuerzas internas entre las partículas siempre tienen la dirección de la recta que las une, es decir,  $(\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \parallel \vec{F}_{PQ}$ , por lo que el producto cruz en 9.36 se anula, de lo cual  $S = 0$ , y la ecuación del momento angular respecto al origen para el sistema de partículas se reduce a

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_{Oi}^{\text{neto};\text{ext}} = \vec{T}_O^{\text{ext}}. \quad (9.37)$$

Podemos concluir que el momento angular del sistema respecto del origen es afectado sólo por el torque de las fuerzas externas al sistema, sin participación de las fuerzas internas.

### 9.4.2. Momento Angular respecto a otros puntos

La ecuación 9.37 muestra que el momento angular del sistema respecto al origen tiene una ecuación de evolución muy semejante a la ecuación del momento angular de una partícula individual. Análogamente a lo que hicimos en el caso de una partícula, podemos definir el torque del sistema respecto a un punto cualquiera Q (que en general puede moverse con velocidad  $\vec{v}_Q$ ) en la forma

$$\vec{L}_Q = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{v}_i. \quad (9.38)$$

Se puede ver que

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_O - \vec{r}_Q \times M\vec{V}_{CM} \quad (9.39)$$

de tal manera que su ecuación de evolución es

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} - \vec{r}_Q \times M\vec{A}_{CM} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{CM}. \quad (9.40)$$

Reemplazando 9.37 y 9.8 en la ecuación anterior

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{r}_Q \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{CM} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{CM}. \quad (9.41)$$

Por lo tanto, el momento angular del sistema respecto a un punto arbitrario Q tiene la ecuación

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{T}_Q^{\text{ext}} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{CM}, \quad (9.42)$$

donde hemos llamado  $\vec{T}_Q^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$ , que corresponde al torque de las fuerzas externas respecto al punto Q. En este caso la ecuación del momento angular no tiene la simpleza de 9.37, puesto que además del torque de las fuerzas externas respecto a Q ( $\vec{T}_Q^{\text{ext}}$ ) se debe incluir el último término de la mano derecha.

En dos casos la ecuación del momento angular 9.42 toma su forma más simple en que el último término de la mano derecha se anula. El primer caso es cuando el punto Q tomado como referencia no se mueve respecto al origen ( $\vec{v}_Q = 0$ ). Este caso incluye por supuesto el caso en que el punto Q es justamente el origen, en cuyo caso 9.42 es exactamente igual a 9.37. Sin embargo, el mismo tipo de ecuación simple de momento angular se aplica si Q es cualquier otro punto fijo.

El segundo caso en que 9.42 se simplifica es menos trivial. Cuando el punto Q corresponde al centro de masa del sistema, el último término de 9.42 también se anula pues las dos velocidades involucradas en el producto cruz son idénticas. Por lo tanto, podemos escribir que la ecuación de evolución del momento angular del sistema respecto a su centro de masa es

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_{CMi}^{\text{neto;ext}} = \vec{T}_{CM}^{\text{ext}}. \quad (9.43)$$

Lo novedoso de esta ecuación es que se cumple independiente de cuán complicado sea el movimiento del centro de masa.

### 9.4.3. Momento Angular relativo al Centro de Masa

Podemos definir un momento angular en base a la posición y la velocidad de cada partícula relativas al Centro de Masa, en la forma

$$\vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i, \quad (9.44)$$

donde  $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{\text{CM}}$  es la posición relativa de cada partícula al CM. La velocidad relativa al CM es  $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{\text{CM}}$ , lo cual podemos reemplazar en 9.44 para obtener

$$\vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \times \vec{V}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_i = \vec{L}_{\text{CM}} \quad (9.45)$$

donde la segunda sumatoria desapareció gracias a la propiedad 9.11. La conclusión aquí es que el momento angular del sistema respecto al CM es igual si lo calculamos utilizando las velocidades absolutas de las partículas o usando las velocidades relativas de ellas respecto al CM. Claramente 9.45 y 9.43 muestran que la ecuación de evolución de  $\vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}}$  es

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{\mathcal{T}}_{\text{CM}}^{\text{ext}}. \quad (9.46)$$

Un corolario útil de esta subsección es el cálculo del torque neto realizado por el peso de todas las partículas respecto del CM. El peso es usualmente una fuerza externa sobre las partículas, por lo tanto, en principio debe ser incluido en el torque de las ecuaciones 9.43 o 9.46. Sin embargo, si calculamos el torque neto del peso respecto al CM obtenemos

$$\vec{\mathcal{T}}_{\text{CM}}^{m\vec{g}} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{R}_{\text{CM}}) \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^N \vec{\rho}_i \times m_i \vec{g} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i \right) \times \vec{g} = 0 \quad (9.47)$$

donde hemos usado nuevamente la propiedad 9.11. Por lo tanto, podemos concluir que el peso de las partículas no ejerce torque respecto al Centro de Masa. Un sistema de partículas sometido sólo a la acción del peso como fuerza externa, conserva su momento angular respecto al CM, independiente de lo complejo del sistema y de las fuerzas internas que existan en él.

# Capítulo 10

## Impulsos y choques

Consideremos una bola de billar que se mueve sobre una mesa horizontal y que al llegar al borde rebota tras chocar con la pared lateral (figura 10.1). Entre los instantes justo antes y justo después del choque la bola sufre un cambio grande de su vector velocidad. Los choques son precisamente interacciones mecánicas que producen en la partícula un cambio grande de momento en un pequeño intervalo de tiempo. La ecuación de Newton nos dice que los cambios de momento de una partícula se asocian a las fuerzas en la forma

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (10.1)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza neta actuando sobre ella. De aquí el cambio de momento entre dos instantes  $t_i$  y  $t_f$  es

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (10.2)$$

Cuando el intervalo de tiempo considerado es pequeño ( $t_f \sim t_i$ ) la ecuación 10.2 nos indica que para producir un cambio de momento significativo, la fuerza en ese instante debe ser “grande”. De hecho, si modelamos un choque como una interacción que produce un cambio instantáneo de momento en la partícula, la ecuación 10.2 nos dice que eso es posible sólo si en ese instante la fuerza se hace infinita. Sólo así el límite

$$\lim_{t_f \rightarrow t_i} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

puede ser distinto de cero.

Las fuerzas que son instantáneamente infinitas y que, por lo tanto, son capaces de producir un cambio instantáneo del momento de una partícula (un “salto” o un cambio brusco de su velocidad) son denominadas fuerzas impulsivas. En este capítulo definiremos el

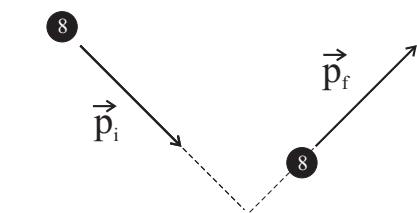


Figura 10.1: Choque de bola ocho.

concepto de impulso y describiremos algunos elementos de choques de partículas. Recalquemos que estas fuerzas “infinitas” que producen cambios “instantáneos” de momento son sólo una idealización o modelación de una interacción mecánica compleja. Este modelo será muy útil para describir algunas características de los choques entre partículas o de partículas con paredes. Sin embargo, en muchos casos la descripción detallada de lo que pasa después de un choque requerirá que especifiquemos exactamente el tipo de choque y/o el tipo de partícula y pared involucrados. Es decir, el modelo de la simple partícula puntual dejará de ser suficiente y tendremos que usar el modelo de una bola de billar más realista. El capítulo (o curso) siguiente tratará justamente de la mecánica de cuerpos sólidos.

## 10.1. Impulsos

### 10.1.1. Impulso lineal

Se define el impulso integrado de la fuerza  $\vec{F}$  en el intervalo de tiempo entre  $t_1$  y  $t_2$  en la forma

$$\vec{I}_{t_1, t_2}^{\vec{F}} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \quad (10.3)$$

Con la definición de impulso integrado, la ecuación de Newton integrada en el tiempo se transforma en

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{I}_{t_1, t_2}^{\vec{F}^{\text{neto}}}. \quad (10.4)$$

El impulso instantáneo de una fuerza se define como el límite de 10.3 cuando el intervalo temporal de la integral se reduce a cero

$$\vec{I}^{\vec{F}}(t) \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\delta t} \vec{F}(t) dt. \quad (10.5)$$

Es claro que el impulso instantáneo equivale al límite

$$\vec{I}^{\vec{F}}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \vec{F}(t) \delta t, \quad (10.6)$$

por lo que si en el instante  $t$  la fuerza  $\vec{F}(t)$  tiene una magnitud finita (es decir, no es infinita), su impulso instantáneo es cero. Una fuerza “común” (cuya magnitud nunca se hace infinito) tiene un impulso instantáneo nulo. Una fuerza “común” puede producir  $d\vec{p}/dt$  y cambios de  $\vec{p}$  en intervalos finitos de tiempo, pero no puede producir saltos instantáneos de  $\vec{p}$ .

Una fuerza impulsiva es aquella que tiene un impulso instantáneo no nulo. Según 10.6 esto puede ocurrir sólo si en el instante del impulso la magnitud de la fuerza se hace infinita. Las fuerzas impulsivas nos sirven para describir experimentos en que la partícula cambia cuasi-instantáneamente su momento, por cuanto en presencia de una fuerza impulsiva que actúa en el instante  $t$  la ecuación de Newton nos dice que

$$\vec{p}(t_+) - \vec{p}(t_-) = \vec{I}^{\text{neto}}(t). \quad (10.7)$$

La ecuación 10.7 puede ser considerada la 2a Ley de Newton aplicada en forma instantánea. Ella nos dice que cambios bruscos de momento se deben a impulsos instantáneos que existan en el momento considerado. Notemos que si en  $t$  no existe ninguna fuerza impulsiva, entonces no puede haber un cambio instantáneo de momento, con lo cual  $\vec{p}$  cambia en forma continua en el tiempo. Por otra parte, si en el instante considerado existen fuerzas “comunes” y fuerzas impulsivas actuando, sólo estas últimas participan en la ecuación 10.7, por cuanto el impulso instantáneo de las fuerzas comunes es cero.



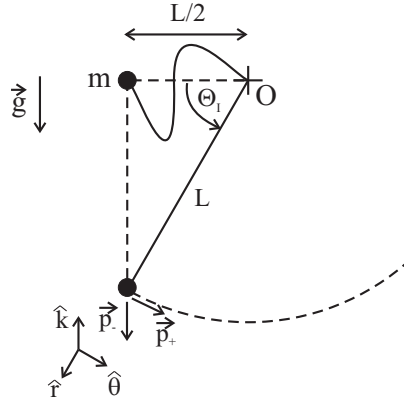


Figura 10.2: Partícula cayendo atada a cuerda inicialmente sin tensión.

### Ejemplo

Consideremos el ejemplo de la figura 10.2. Una partícula de masa  $m$  cae sometida a su peso estando atada a una cuerda de largo  $L$ , cuyo otro extremo está fijo a un punto  $O$ . La partícula parte desde el reposo a la misma altura que el punto  $O$ , pero a una distancia  $L/2$  de él, por lo que inicialmente la cuerda no está tensa. Podemos imaginar que la partícula caerá libremente en vertical hasta que sus distancia al punto  $O$  sea  $L$ . En ese momento la cuerda se tensa y la partícula cambia bruscamente su momento, pasando de un movimiento rectilíneo vertical a uno circular en torno a  $O$ . El cambio brusco de momento de la partícula sugiere que ese instante debe ser analizado con el concepto de impulso. Llamemos  $t_I$  al instante en que la cuerda llega a su largo  $L$ . El movimiento de la partícula en el intervalo  $0 \leq t < t_I$  es una simple caída libre desde reposo inicial, por lo que lo conocemos completamente. En particular es fácil ver que con la nomenclatura indicada en la figura 10.2, se tiene

$$\Theta_I = \pi/3, \quad (10.8)$$

$$\vec{p}_- = -v_o \hat{k}, \quad (10.9)$$

donde  $v_o = 3^{1/4} \sqrt{gL}$ .

El salto de momento que ocurre en el instante  $t_I$  se debe evaluar con la ecuación 10.7. En este caso la única fuerza impulsiva que actúa en ese instante es la tensión de la cuerda por lo que se tiene

$$\vec{p}_+ - \vec{p}_- = \vec{I}^T. \quad (10.10)$$

Notemos que el peso de la partícula sí actúa en ese instante, pero dado que el peso no es una fuerza impulsiva (no se hace infinito en ningún instante), no aparece en la ecuación de movimiento impulsivo. Aún podemos decir algo más. Debido a que la fuerza de una cuerda ideal siempre es radial, el impulso de ella también debe serlo, por lo que

$$\vec{I}^T = X \hat{r}, \quad (10.11)$$

donde  $X$  es la magnitud del impulso de la tensión. Apliquemos entonces la ecuación 10.10 en el sistema polar de la figura:

$$\vec{p}_- = -mv_o \hat{k} = -mv_o (-\cos \Theta_I \hat{r} - \sin \Theta_I \hat{\theta}), \quad (10.12)$$

$$\vec{p}_+ = mv_+ \hat{\theta}. \quad (10.13)$$

Combinando 10.11-10.13 en 10.10 obtenemos las ecuaciones escalares que me permiten conocer las incógnitas  $X$  y  $v_+$

$$0 - mv_o \sin \Theta_I = X, \quad (10.14)$$

$$mv_+ - mv_o \cos \Theta_I = 0, \quad (10.15)$$

de donde

$$X = -mv_o \sin \Theta_I, \quad (10.16)$$

$$v_+ = v_o \cos \Theta_I. \quad (10.17)$$

Podemos ver que la ecuación del impulso nos permitió conocer el valor del impulso instantáneo de la cuerda, y conocer la velocidad de la partícula después del impulso. Para  $t > t_I$  el problema vuelve a ser un simple movimiento circular con gravedad. Queda propuesto determinar la altura máxima que alcanza la partícula en su movimiento posterior a  $t_I$ . Calcular finalmente el cambio de energía mecánica producido en  $t_I$ .

### 10.1.2. Mecánica Instantánea

Hemos visto que el concepto de impulso extiende la aplicación de las leyes de la dinámica a interacciones cuasi-instantáneas. Con su ayuda podemos entonces expresar los distintos conceptos que vimos en los primeros capítulos del curso en sus versiones instantáneas.

#### 1a Ley de Newton Instantánea

Si no existen fuerzas impulsivas el momento de la partícula es una función continua en el tiempo.

#### 2a Ley de Newton Instantánea

Cambios instantáneos de momento se deben a fuerzas impulsivas. Repetimos la ecuación 10.7:

$$\vec{p}(t_+) - \vec{p}(t_-) = \vec{I}^{\text{heto}}(t).$$

#### 3a Ley de Newton Instantánea

Por estar definidos en función de una fuerza, los impulsos cumplen también la ley de Acción y Reacción: si un agente del universo ejerce sobre la partícula un impulso  $\vec{I}$ , ella ejerce sobre el agente un impulso  $-\vec{I}$ .

#### Conservación de EMT Instantánea

En el instante que la partícula es sometida a una fuerza impulsiva hemos visto que su vector momento cambia bruscamente. Este cambio de  $\vec{p}$  no está necesariamente asociado a un cambio de energía cinética de la partícula, puesto que el cambio de  $\vec{p}$  podría ser un cambio brusco de dirección del vector sin que su magnitud se vea afectada (por ejemplo un rebote elástico de una partícula contra una pared). En otros casos, sin embargo, el cambio instantáneo de momento sí lleva asociado un cambio de energía cinética de la partícula. ¿A dónde se va la energía cinética en este caso?. Dado que la partícula no cambia su posición espacial en el momento del impulso, su energía potencial respecto a fuerzas conservativas externas no puede cambiar. Por lo tanto, los cambios de energía cinética que la partícula sufre en el momento del impulso normalmente están asociados a

trabajos de fuerzas disipativas y/o cambios de energía interna que la partícula sufre en el instante del impulso. Por ejemplo, típicamente después de que un sistema semi-rígido choca contra una pared sólida el sistema queda “vibrando”, lo que significa que parte de la energía cinética que el sistema tenía antes del choque se transformó en energía interna.

### Conservación del Momento Angular Instantáneo

En analogía al concepto de impulso lineal visto en la sección anterior, una fuerza impulsiva se asocia a un torque impulsivo que es capaz de cambiar instantáneamente el momento angular de la partícula:

$$\vec{l}_o(t_+) - \vec{l}_o(t_-) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\delta t} \vec{r} \times \vec{F}^{\text{neta}} dt. \quad (10.18)$$

El lado derecho de esta ecuación es el impulso angular instantáneo (respecto a O) de la fuerza neta actuando sobre la partícula. Nuevamente, sólo las fuerzas impulsivas pueden producir un cambio instantáneo del momento angular de la partícula. En este caso además de que la fuerza sea impulsiva, su brazo de torque debe ser distinto de cero. En el ejemplo de la sección anterior se propone verificar que el momento angular de la partícula respecto a O es continuo en el instante  $t_I$  (es decir, no sufre un salto) debido a que la fuerza impulsiva que existe es radial, por lo que por más infinita que sea su magnitud instantánea, ella es incapaz de producir torque respecto al punto O.

### 10.1.3. Otras consideraciones

#### Unidades del impulso

Vale hacer notar aquí también que en cuanto a unidades, el impulso lineal no tiene unidades de fuerza, sino que tiene unidades de moméntum, es decir,  $[I] = MLT^{-1}$ . Por su parte el impulso angular tiene unidades de momento angular ( $[ML^2T^{-1}]$ ).

#### Formalismo matemático

En el momento del impulso la magnitud de la fuerza impulsiva es infinita, pero su impulso es finito. En el ejemplo anterior se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow t_I} \|\vec{T}(t)\| = \infty, \quad (10.19)$$

$$\int_{t_{I-}}^{t_{I+}} \|\vec{T}(t)\| dt = mv_o \sin \Theta_I < \infty. \quad (10.20)$$

Matemáticamente, este tipo de funciones que se hacen infinito en un punto, pero cuya integral es finita, se describen en base a la función Delta de Dirac,  $\delta(x)$ , representada simbólicamente por

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0), \\ \infty & (x = 0), \end{cases} \quad (10.21)$$

tal que además su integral es unitaria, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (10.22)$$

La función  $\delta(x)$ , junto con su hermana la función escalón,  $S(x)$ , representada por

$$S(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (x > 0), \end{cases} \quad (10.23)$$

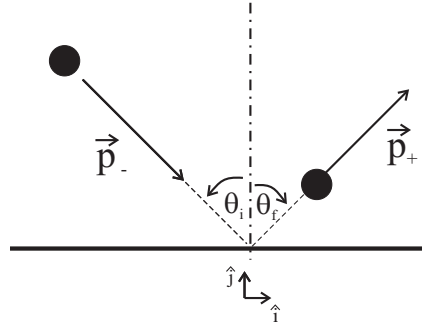


Figura 10.3: Choque de partícula con pared.

permiten aplicar técnicas de cálculo diferencial a funciones discontinuas. Las definiciones rigurosas de estas funciones, así como su cálculo y aplicaciones físicas se pueden ver en textos como por ejemplo *Mathematical Physics* (E. Butkov, Addison-Wesley Pub. Co., 1968).

## 10.2. Choques

### 10.2.1. Choque de partícula con pared

Consideremos el choque más simple de una partícula: aquél en que ella se mueve sobre una superficie horizontal y choca con una pared ideal, como el caso de la Figura 10.3. La ecuación de impulso en el momento del choque es

$$\vec{p}_+ - \vec{p}_- = \vec{I}. \quad (10.24)$$

Utilizando la nomenclatura de la figura 10.3, se tiene que

$$\vec{p}_- = mv_i \sin \theta_i \hat{i} - mv_i \cos \theta_i \hat{j}, \quad (10.25)$$

$$\vec{p}_+ = mv_f \sin \theta_f \hat{i} + mv_f \cos \theta_f \hat{j}. \quad (10.26)$$

Suponiendo que no existe roce, la única fuerza que puede ser impulsiva durante el choque es la normal, por lo que en tal caso

$$\vec{I} = X \hat{j}. \quad (10.27)$$

Por lo tanto, la descomposición de la ecuación 10.24 en las componentes perpendicular y paralela a la pared son

$$mv_f \sin \theta_f - mv_i \sin \theta_i = 0, \quad (10.28)$$

$$mv_f \cos \theta_f + mv_i \cos \theta_i = X. \quad (10.29)$$

En este caso si suponemos que las condiciones iniciales  $(v_i, \theta_i)$  son conocidas, hemos llegado a 2 ecuaciones escalares y 3 incógnitas  $(v_f, \theta_f, X)$ , por lo que debemos hacer una suposición adicional respecto del choque, si es que queremos conocer su resultado. Una posibilidad es suponer que la energía mecánica total de la partícula se conserva durante el choque. En tal caso agregamos la condición adicional

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2, \quad (10.30)$$

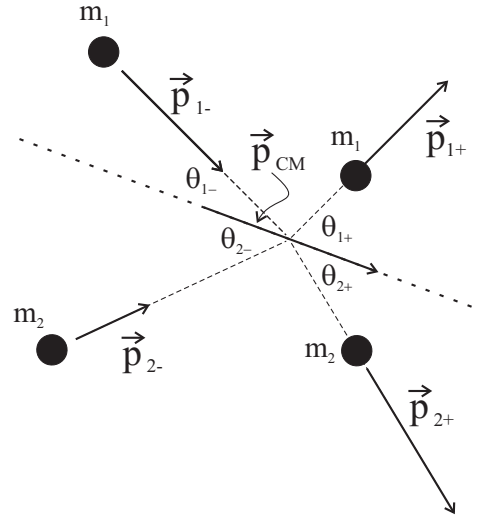


Figura 10.4: Choque de 2 partículas.

de donde la solución completa del problema es

$$v_f = v_i, \quad (10.31)$$

$$\theta_f = \theta_i, \quad (10.32)$$

$$X = 2mv_i \cos \theta_i. \quad (10.33)$$

Puede verse que en este caso tuvimos que agregar una condición adicional acerca de lo que pasa con la EMT en el choque, con el objeto de determinar la condición después de él. Como veremos luego la EMT no necesariamente se conserva en los choques. Se propone resolver este mismo problema suponiendo que la EMT de la partícula después del choque es una fracción  $f$  de la EMT antes del choque.

### 10.2.2. Choque de 2 partículas

Consideremos el choque de 2 partículas como las de la figura 10.4, que se aproximan cada una a su punto de encuentro con su propio momento  $\vec{p}_{1-}$  y  $\vec{p}_{2-}$ . Suponiendo que todo ocurre en un plano horizontal sin roce (mesa de hielo), cada partícula conserva su momento inicial hasta justo antes del choque. En el choque cada una recibe una fuerza de tipo impulsiva que puede hacerla cambiar instantáneamente su momento. Sin embargo, si consideramos a ambas partículas como un sistema, esa fuerza impulsiva, por más grande que sea, es una fuerza interna del sistema. Por lo tanto, no habiendo fuerzas adicionales importantes, el centro de masa (CM) del sistema de las 2 partículas ni se “da cuenta” del choque y su momento antes, durante y después del choque se mantiene constante. El momento de CM lo podemos conocer a partir de las condiciones previas al choque, en la forma

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p}_{1-} + \vec{p}_{2-}. \quad (10.34)$$

Ya que  $\vec{p}_{CM}$  se mantiene constante en el choque podemos usar su dirección como referencia del problema (ver figura 10.4). Para la condición después del choque nos gustaría conocer  $v_{1+}$ ,  $v_{2+}$ ,  $\theta_{1+}$  y  $\theta_{2+}$ . La ecuación que tenemos disponible es la conservación del momento

del CM, que nos entrega las 2 ecuaciones escalares siguientes

$$m_1 v_{1-} \cos \theta_{1-} + m_2 v_{2-} \cos \theta_{2-} = m_1 v_{1+} \cos \theta_{1+} + m_2 v_{2+} \cos \theta_{2+}, \quad (10.35)$$

$$-m_1 v_{1-} \sin \theta_{1-} + m_2 v_{2-} \sin \theta_{2-} = m_1 v_{1+} \sin \theta_{1+} - m_2 v_{2+} \sin \theta_{2+}. \quad (10.36)$$

Ahora tenemos 2 ecuaciones y 4 incógnitas ( $v_{1+}, v_{2+}, \theta_{1+}, \theta_{2+}$ ). A pesar de que podemos decir exactamente cómo se mueve el CM después del choque, no podemos decir todavía cómo se mueve cada una de las partículas después del choque. Puesto de otro modo, la condición de conservación del momento del sistema de partículas tiene muchas soluciones posibles para la misma condición inicial. Nuevamente debemos restringir más el problema, de tal forma de encontrar la solución apropiada al caso real que estemos estudiando.

Un caso posible es que después del choque las partículas quedan pegadas. En este caso, las condiciones adicionales son

$$v_{2+} = v_{1+}, \quad (10.37)$$

$$\theta_{2+} = -\theta_{1+}, \quad (10.38)$$

donde en la segunda condición hemos sido rigurosos con nuestra definición de  $\theta_{1+}$  y  $\theta_{2+}$  de acuerdo a la figura 10.4. Las ecuaciones 10.35 a 10.38 son ahora un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. Podríamos hacer la matemática (se recomienda hacerla), pero en este caso la solución sale inmediatamente con un argumento físico: si las 2 partículas quedan pegadas, ellas deben seguir moviéndose con la velocidad  $\vec{v}_{\text{CM}}$  (que es conocida por la condición inicial).

### 10.2.3. Energía en choques

Hemos visto que en general la ecuación de conservación del momento es insuficiente para determinar las velocidades de cada partícula individual después de un choque. Un tipo de condición adicional que suele imponerse para cerrar el problema se basa en decir algo sobre qué pasa con la EMT del sistema durante el choque. Ya en el ejemplo de la sección 10.2.1 una condición de energía nos permitió determinar el momento de una partícula después de su choque con una pared.

Consideremos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  que se acercan con velocidades  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$ , respectivamente. Las velocidades después del choque las denotaremos con una prima:  $\vec{v}'_1$  y  $\vec{v}'_2$ . Si las partículas no tienen ningún tipo de energía “interna” (por ejemplo alguna rotación propia), entonces la ecuación de la EMT entre las condiciones antes y después del choque se puede escribir en general como

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + Q, \quad (10.39)$$

donde  $Q$  representa la posibilidad de que en el choque el sistema conserve su EMT (caso  $Q = 0$ ) o bien pierda EMT (caso  $Q > 0$ ). Esta posible pérdida de EMT no es energía que realmente se pierda, sino que se transforma a otros tipos de energía no considerados en el balance de EMT. Por ejemplo, puede representar energía sonora que se propaga en la forma del ruido asociado al choque, o puede ser un aumento de energía interna en la forma de incremento de la temperatura de las partículas que chocan, o energía química si las partículas tenían un pegamento que las deja moviéndose juntas después del choque.

Es ilustrativo expresar la ecuación de la EMT (10.29) en términos de las velocidades relativas de las partículas entre sí antes y después del choque. La velocidad relativa de la partícula 1 respecto a la partícula 2 antes del choque se define como

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad (10.40)$$

mientras que después del choque la velocidad relativa de 1 respecto de 2 es

$$\vec{v}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2. \quad (10.41)$$

Es fácil mostrar que con estas definiciones se tiene

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{v} \quad (10.42)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} - \frac{m_1}{M} \vec{v} \quad (10.43)$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{CM} + \frac{m_2}{M} \vec{v}' \quad (10.44)$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_{CM} - \frac{m_1}{M} \vec{v}' \quad (10.45)$$

donde debemos recordar que  $\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{v}'_1 + \frac{m_2}{M} \vec{v}'_2$  es constante en el choque.

Con 10.42-10.45 la EMT antes del choque se puede expresar como

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{2} m_1 v_{CM}^2 + m_1 \left( \frac{m_2}{M} v \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{CM}^2 + m_2 \left( \frac{m_1}{M} v \right)^2 \quad (10.46)$$

mientras que para la condición después del choque

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_1 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}'_2 \cdot \vec{v}'_2 = \frac{1}{2} m_1 v_{CM}^2 + m_1 \left( \frac{m_2}{M} v' \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{CM}^2 + m_2 \left( \frac{m_1}{M} v' \right)^2. \quad (10.47)$$

Reemplazando 10.46 y 10.47 en 10.39 la ecuación de la EMT en el choque puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu v'^2 + Q \quad (10.48)$$

donde  $\mu = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$  es la masa reducida del sistema de 2 partículas definida al final del capítulo anterior.

Se define el coeficiente de restitución del choque como

$$\epsilon \equiv \frac{v'}{v} \quad (10.49)$$

de tal forma que la pérdida de EMT en el choque puede escribirse como

$$Q = \frac{1}{2} \mu v^2 (1 - \epsilon). \quad (10.50)$$

El parámetro  $\epsilon$  describe qué le pasa a la EMT durante el choque. Si en el choque no hay pérdida de EMT, entonces  $\epsilon = 1$  y  $Q = 0$ . Este caso se denomina choque completamente elástico. Por otro lado la máxima pérdida de EMT que puede tener un choque ocurre cuando  $v' = 0$ , es decir, la velocidad relativa entre ambas partículas después del choque es cero (las partículas quedan pegadas después del choque). Este caso se denomina choque completamente inelástico, y se caracteriza por  $\epsilon = 0$  y  $Q = \frac{1}{2} \mu v^2$ . Casos reales pueden tener también coeficientes de restitución con valores intermedios.

#### 10.2.4. Choques elásticos

Como hemos visto en las secciones previas en un choque elástico de 2 partículas se conserva el momento total (pues en un choque las fuerzas de interacción son internas) y se conserva también la EMT (por ser elástico). Veremos aquí que incluso en este caso la solución completa después del choque sigue indeterminada. Para simplificar al máximo,

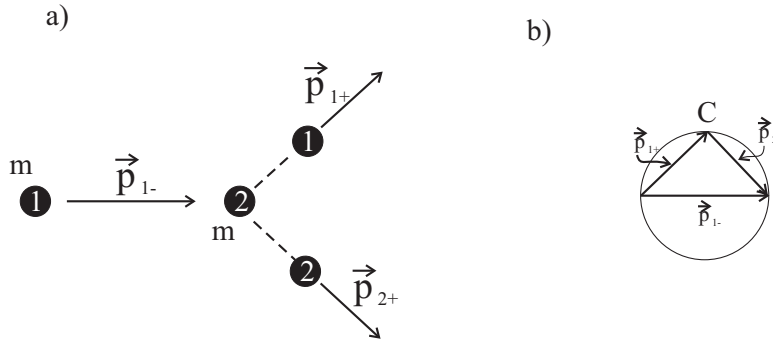


Figura 10.5: Choque de partícula con otra en reposo.

consideremos el choque de 2 partículas de igual masa  $m$ , una de las cuales tiene antes del choque un momento  $\vec{p}_{1-}$ , mientras que la otra está en reposo (ver figura 10.5a). Nos interesa conocer los momentos  $\vec{p}_{1+}$  y  $\vec{p}_{2+}$  de cada partícula después del choque.

La conservación del momento impone que

$$\vec{p}_{1+} + \vec{p}_{2+} = \vec{p}_{1-} \quad (10.51)$$

mientras que es fácil mostrar que en este caso simple la conservación de la EMT impone

$$p_{1+}^2 + p_{2+}^2 = p_{1-}^2. \quad (10.52)$$

Las anteriores son 3 ecuaciones escalares para 4 incógnitas, por lo que el sistema sigue teniendo 1 grado de libertad y la solución después del choque no es única. Geométricamente las condiciones 10.51 y 10.52 se representan en el diagrama de la figura 10.5b. Puede verse que todos los vectores  $\vec{p}_{1+}$  y  $\vec{p}_{2+}$  que define un punto  $C$  sobre la circunferencia de radio  $p_{1-}$ , cumplen tanto la condición de momento como la de energía. Exactamente cual de estas soluciones posibles es la que ocurre realmente dependerá de detalles específicos del choque que dependen de características difíciles de representar con partículas puntuales, como por ejemplo la forma de las “partículas”.

Concluimos entonces que para saber exactamente lo que ocurre con cada partícula después del choque las ecuaciones del momento y de la energía son en general insuficientes, y debe agregarse alguna condición adicional sobre el choque. Aquí ya hemos estirado demasiado el modelo de masas puntuales y nos vemos obligados a reconocer que para estudiar choques este modelo es insuficiente. Mal que mal los choques deben ocurrir con objetos macroscópicos que tienen forma, energías internas, etc. Para estudiar este tipo de interacciones será necesario extender nuestra aplicación de las leyes de la mecánica a sistemas con masa distribuida como los cuerpos sólidos, lo cual se hace en el capítulo (o curso) siguiente (o previo).



## Capítulo 11

# Sistemas Rígidos y Sólidos

En el capítulo de Sistemas de Partículas nos referimos en algunas ocasiones a sistemas “rígidos” de partículas, como aquéllos en que la posición relativa de las partículas que lo componen no cambia en el tiempo. Un ejemplo prototípico de un sistema rígido sería el compuesto de varias partículas unidas entre sí por barras como el ilustrado en la Figura 11.1. Si bien el sistema puede moverse como un todo en forma muy compleja, trasladándose y rotando en el espacio, su rigidez le impone fuertes restricciones al movimiento de las partículas individuales, lo cual de cierta manera reduce la complejidad del problema general de sistemas de partículas. Esta simplificación puede apreciarse considerando que un sistema general de  $N$  partículas presenta en total  $N$  incógnitas vectoriales: la posición de cada partícula. Una estructura rígida de  $N$  partículas, por su parte, plantea simplemente 2 incógnitas vectoriales: la posición del Centro de Masa y la velocidad angular de rotación del sistema. Si conozco ambos vectores en el tiempo (además de la forma de la estructura y las condiciones iniciales) seré capaz de conocer exactamente en cada instante la posición de cada una de las partículas que componen el sistema.

En este capítulo, por tanto, investigamos la forma en que las ecuaciones dinámicas de sistemas de partículas se aplican en el caso particular de sistemas rígidos. Al final del capítulo extenderemos el análisis al caso cuando las partículas de la estructura rígida están tan juntas entre sí que es más conveniente considerar que la masa se distribuye de manera continua en el espacio, formando lo que llamaremos cuerpos sólidos. Nos habremos entonces liberado de la restricción de considerar partículas puntuales y sabremos cómo aplicar las ecuaciones de la mecánica a objetos mucho más parecidos a “cosas reales”.

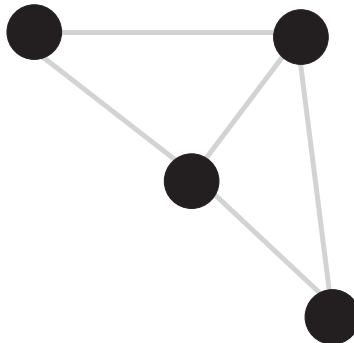


Figura 11.1: Sistema rígido de partículas

## 11.1. Resumen de Sistemas de Partículas

Recordemos brevemente las conclusiones del capítulo de Sistemas de Partículas. La ecuación de movimiento del Centro de Masa es

$$M\vec{A}_{\text{CM}} = \vec{F}^{\text{EXT}}. \quad (11.1)$$

La ecuación del momento angular toma las formas alternativas

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\tau}_o^{\text{EXT}}, \quad (11.2)$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{CM}}^{\text{EXT}}, \quad (11.3)$$

mientras que la ecuación de la EMT la podemos escribir como

$$\Delta(K_{\text{CM}} + K_{\text{REL}} + V_{\text{INT}} + V_{\text{EXT}}) = W^{\text{FNC,INT}} + W^{\text{FNC,EXT}}, \quad (11.4)$$

en que la notación a estas alturas no debiera requerir gran explicación. Una inmediata simplificación que surge al considerar una estructura rígida es que ya mostramos en el capítulo respectivo que en este caso las fuerzas internas no realizan trabajo. Por lo tanto, la ecuación 11.4 toma la forma

$$\Delta(K_{\text{CM}} + K_{\text{REL}} + V_{\text{EXT}}) = W^{\text{FNC,EXT}}. \quad (11.5)$$

Antes de seguir adelante definiremos en forma más precisa lo que implica la restricción de rigidez en la cinemática del sistema de partículas.

## 11.2. Definición de sistema rígido

Intuitivamente un sistema rígido de partículas es simple de visualizar. Un sistema de masas puntuales que están soldadas a barras ideales como se ejemplificó en la figura 11.1 constituye un claro ejemplo de estructura rígida.

Para definir en forma más cuantitativa lo que consideraremos como un sistema rígido de partículas haremos uso de lo que aprendimos en el capítulo de movimiento relativo, cuando tratamos la descripción del movimiento de partículas usando sistemas de referencia inerciales y sistemas de referencia que tenían un movimiento arbitrario respecto a un sistema inercial. En efecto, consideraremos que un sistema de partículas es rígido cuando podamos definir (al menos) un sistema de referencia (inercial o no inercial) *respecto del cual* todas las partículas permanezcan siempre en reposo relativo. La idea es que cuando un sistema de partículas es rígido podemos “pegar” a él un sistema de referencia cuyo origen y ejes se mueven solidarios con la estructura rígida de partículas, de tal forma que todas las partículas consideradas se mantienen en reposo relativo a dicho sistema de referencia móvil. Claramente, si el movimiento de la estructura rígida es complicado, el sistema de referencia móvil que la estructura lleva “pegada” será un sistema de referencia no inercial, pero, afortunadamente, ya sabemos harto de sistemas de referencia no inerciales (supongo).

Repitiendo entonces lo que hicimos en el capítulo de Movimiento Relativo, consideraremos nuevamente 2 sistemas de referencia: un sistema de referencia inercial S, y otro sistema de referencia no inercial S', cuyo origen O' y ejes X', Y' y Z' se mueven solidariamente con la estructura rígida de partículas que estamos considerando. Recordemos las

relaciones cinemáticas generales que obtuvimos en el capítulo mencionado:

$$\vec{r} = \vec{R}_o + \vec{r}', \quad (11.6)$$

$$\vec{v} = \vec{V}_o + \vec{v}' + \vec{\Omega}_e \times \vec{r}', \quad (11.7)$$

$$\vec{a} = \vec{A}_o + \vec{a}' + 2\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' + \vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') + \vec{\alpha}_e \times \vec{r}'. \quad (11.8)$$

En las ecuaciones 11.6-11.8  $\vec{R}_o$ ,  $\vec{V}_o$  y  $\vec{A}_o$  describen el movimiento del origen de S',  $\vec{\Omega}_e$  y  $\vec{\alpha}_e$  describen la rotación de los ejes coordenados de S',  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  describen el movimiento absoluto (respecto de S) de una partícula y  $\vec{r}'$ ,  $\vec{v}'$  y  $\vec{a}'$  describen el movimiento de la partícula relativo al sistema móvil S'.

Considerando ahora que nuestro sistema S' está “pegado” a la estructura rígida de partículas que estamos estudiando, la partícula  $i$  estará siempre en reposo relativo al sistema S', y el sistema S' tendrá la velocidad angular y la aceleración angular de la estructura en estudio. Por lo tanto, se cumplirá

$$\vec{v}'_i = \vec{0}, \quad (11.9)$$

$$\vec{a}'_i = \vec{0}, \quad (11.10)$$

$$\vec{\Omega}_e = \vec{\Omega}_s, \quad (11.11)$$

$$\vec{\alpha}_e = \vec{\alpha}_s, \quad (11.12)$$

donde  $\vec{\Omega}_s$  y  $\vec{\alpha}_s$  son la velocidad angular y la aceleración angular de la estructura rígida considerada. Por lo tanto, las relaciones cinemáticas del movimiento de las partículas respecto de S y S' se reducen a

$$\vec{r}_i = \vec{R}_o + \vec{r}'_i, \quad (11.13)$$

$$\vec{v}_i = \vec{V}_o + \vec{\Omega}_s \times \vec{r}'_i, \quad (11.14)$$

$$\vec{a}_i = \vec{A}_o + \vec{\Omega}_s \times (\vec{\Omega}_s \times \vec{r}'_i) + \vec{\alpha}_s \times \vec{r}'_i. \quad (11.15)$$

El punto O' que sirve de origen al sistema S' puede ser cualquier punto que se mueva solidariamente con la estructura rígida. Podría ser una de las partículas individuales, o podría ser el centro de masa del sistema o cualquier otro punto que cumpla la condición indicada (por ejemplo, en un sistema rígido formado por una vara con 2 masas soldadas en sus extremos, el punto O' podría ser cualquier punto a lo largo de la vara). Por otro lado,  $\vec{\Omega}_s$  y  $\vec{\alpha}_s$  son propiedades del movimiento de la estructura rígida, por lo que no dependen del punto O' que haya sido elegido como origen de S'.

## 11.3. Momento angular de una estructura rígida

### 11.3.1. Momento angular respecto al Centro de Masa

Consideremos el caso particular en que el origen del sistema de referencia móvil solidario a la estructura rígida tiene el origen en su Centro de Masa (CM). En este caso las relaciones cinemáticas 11.13-11.15 toman la forma

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{\rho}_i, \quad (11.16)$$

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i, \quad (11.17)$$

$$\vec{a}_i = \vec{A}_{CM} + \vec{\Omega}_s \times (\vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i) + \vec{\alpha}_s \times \vec{\rho}_i, \quad (11.18)$$

donde hemos llamado nuevamente  $\vec{\rho}_i$  al vector posición relativa de cada partícula respecto del CM.

Calculemos el momento angular de la estructura respecto de su CM. En el capítulo correspondiente mostramos que éste puede calcularse indistintamente usando la velocidad absoluta de cada partícula, o bien su velocidad respecto al CM:  $\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{\text{CM}}$ . Usando 11.17 se tiene que

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{\text{CM}} = \vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i, \quad (11.19)$$

lo que indica que el movimiento de la partícula  $i$  respecto del CM se debe en el caso de una estructura rígida solamente a la rotación que la estructura puede tener. Por lo tanto, el momento angular de la partícula  $i$  relativo al CM es

$$\vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}i} = m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i = m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i). \quad (11.20)$$

El triple producto cruz lo desarrollamos como

$$\vec{\rho}_i \times (\vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i) = \rho_i^2 \vec{\Omega}_s - (\vec{\rho}_i \cdot \vec{\Omega}_s) \vec{\rho}_i. \quad (11.21)$$

Para poder avanzar digamos que usamos coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  en el sistema  $S'$ , tal que

$$\vec{\rho}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}, \quad (11.22)$$

$$\vec{\Omega}_s = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k}, \quad (11.23)$$

de tal forma que 11.21 la podemos escribir como

$$\vec{\rho}_i \times (\vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i) = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \vec{\Omega}_s - (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z) \vec{\rho}_i. \quad (11.24)$$

El resultado puede escribirse como el vector

$$\begin{pmatrix} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \Omega_x - (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z) x_i \\ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \Omega_y - (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z) y_i \\ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \Omega_z - (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z) z_i \end{pmatrix}, \quad (11.25)$$

o alternativamente en la forma más elegante

$$\begin{bmatrix} (y_i^2 + z_i^2) & -y_i x_i & -z_i x_i \\ -y_i x_i & (x_i^2 + z_i^2) & -z_i y_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & (y_i^2 + z_i^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}. \quad (11.26)$$

Devolviéndonos ahora a 11.20 tenemos entonces que

$$\vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}i} = \begin{bmatrix} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -m_i y_i x_i & -m_i z_i x_i \\ -m_i y_i x_i & m_i(x_i^2 + z_i^2) & -m_i z_i y_i \\ -m_i z_i x_i & -m_i z_i y_i & m_i(y_i^2 + z_i^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}, \quad (11.27)$$

lo cual sumamos sobre todas las partículas para obtener el momento angular de la estructura respecto a su CM en la forma

$$\vec{L}_{\text{CM}} = \vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}} = \begin{bmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & \sum_i -m_i y_i x_i & \sum_i -m_i z_i x_i \\ \sum_i -m_i y_i x_i & \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) & \sum_i -m_i z_i y_i \\ \sum_i -m_i z_i x_i & \sum_i -m_i z_i y_i & \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}. \quad (11.28)$$

La matriz en 11.28 recibe el nombre de matriz de inercia de la estructura respecto del CM definida en la forma

$$I_{\text{CM}} \equiv \begin{bmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & \sum_i -m_i y_i x_i & \sum_i -m_i z_i x_i \\ \sum_i -m_i y_i x_i & \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) & \sum_i -m_i z_i y_i \\ \sum_i -m_i z_i x_i & \sum_i -m_i z_i y_i & \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) \end{bmatrix}, \quad (11.29)$$

tal que ahora el momento angular respecto del CM lo escribimos simplemente como

$$\vec{L}_{CM} = \vec{\mathcal{L}}_{CM} = I_{CM}\vec{\Omega}_s. \quad (11.30)$$

Notemos que la matriz de inercia depende sólo de la distribución espacial de las partículas respecto al CM de la estructura en un sistema de referencia solidario a ella, por lo que los elementos de la matriz no cambian en el tiempo!. Por lo tanto, la gracia de 11.30 es justamente separar la dependencia de la variable dinámica Momento Angular entre un término que sólo depende de la forma de la estructura y una variable cinemática eminentemente variable en el tiempo como su velocidad angular.

### 11.3.2. Momento angular en movimiento con punto fijo

Supongamos el caso de una estructura rígida cuyo movimiento es tal que existe un punto de ella que permanece absolutamente fijo (es decir, en reposo respecto de un sistema inercial). Podemos pensar por ejemplo en un trompo que “gira y baila como trompo”, pero cuya púa tiene su extremo fijo. En este caso bien podemos definir ese punto fijo como origen del sistema de referencia S’ pegado a la estructura. De este modo las relaciones cinemáticas 11.13-11.15 se reducen a

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i, \quad (11.31)$$

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega}_s \times \vec{r}'_i, \quad (11.32)$$

$$\vec{a}_i = \vec{\Omega}_s \times (\vec{\Omega}_s \times \vec{r}'_i) + \vec{\alpha}_s \times \vec{r}'_i, \quad (11.33)$$

donde hemos considerado por simplicidad que los orígenes de los sistemas inercial y móvil coinciden en el punto fijo del movimiento de la estructura.

Las ecuaciones 11.31-11.32 indican entonces que en este caso

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega}_s \times \vec{r}_i. \quad (11.34)$$

El momento angular con respecto al origen de cada partícula es entonces

$$\vec{L}_{O_i} = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\Omega}_s \times \vec{r}_i). \quad (11.35)$$

Podemos apreciar la absoluta analogía entre 11.35 y 11.20, de tal manera que el resultado que obtenemos para el momento angular  $\vec{L}_O$  lo podemos escribir inmediatamente como

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\Omega}_s, \quad (11.36)$$

donde  $I_O$  es la matriz de inercia del sistema de partículas referido a un sistema de coordenadas con origen en O.

Concluimos entonces que la matriz de inercia es útil tanto para calcular el momento angular respecto al CM, como respecto a algún punto de la estructura que se mantenga en reposo absoluto. En cada caso, por supuesto, la matriz de inercia debe ser calculada con respecto al punto particular considerado.

## 11.4. Energía cinética de una estructura rígida

### 11.4.1. Energía cinética relativa al Centro de Masa

La energía cinética del movimiento relativo al CM fue definida como

$$K_{REL} = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2. \quad (11.37)$$

Para una estructura rígida 11.19 nos informa que

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i, \quad (11.38)$$

por lo que

$$K_{\text{REL}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\rho}}_i \cdot (\vec{\Omega}_s \times \vec{\rho}_i), \quad (11.39)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{\Omega}_s \cdot (\vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i), \quad (11.40)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s \cdot \vec{\mathcal{L}}_{\text{CM}}, \quad (11.41)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s \cdot (I_{\text{CM}} \vec{\Omega}_s), \quad (11.42)$$

donde vuelve a tomar importancia la matriz de inercia del sistema rígido respecto del CM. De hecho, para estructuras rígidas muchas veces la energía cinética del movimiento relativo al CM se denomina energía cinética rotacional, pues puede verse en 11.42 que ella depende directamente de la velocidad angular de la estructura.

### 11.4.2. Energía cinética en movimiento con punto fijo

En el caso particular del movimiento de un sistema rígido con punto fijo la energía cinética total del sistema es

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i, \quad (11.43)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\Omega}_s \times \vec{r}_i), \quad (11.44)$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{\Omega}_s \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i), \quad (11.45)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s \cdot \vec{L}_O, \quad (11.46)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_s \cdot I_O \vec{\Omega}_s, \quad (11.47)$$

donde vuelve a tomar importancia la matriz de inercia del sistema rígido respecto de O.

## 11.5. Matriz de Inercia

Las ecuaciones 11.30, 11.36, 11.42, y 11.47 constituyen los principales resultados a utilizar cuando se estudie el movimiento de estructuras rígidas o cuerpos sólidos mediante las ecuaciones dinámicas 11.1-11.5. Dado el rol principal que la matriz de inercia juega en este caso, resulta muy conveniente considerar algunas de sus propiedades.

En términos generales, podemos considerar a la Matriz de Inercia,  $I_O$ , de un sistema de partículas como una propiedad geométrica que se define en función de las posiciones de las partículas que componen el sistema, respecto de un punto O que consideramos el origen de un sistema de referencia (el punto O podría ser el CM de la sección 11.3.1 o el punto fijo de

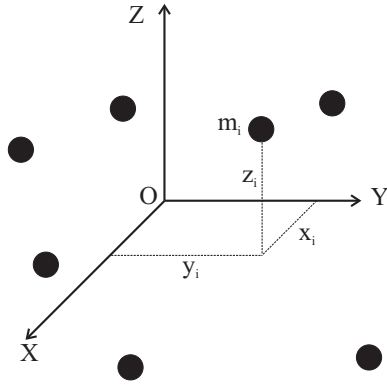


Figura 11.2: Esquema general para cálculo de Matriz de Inercia respecto a O.

la sección 11.3.2, u otro punto cualquiera respecto del cual nos da la gana de calcular  $I$ ). Consideremos entonces un sistema de  $N$  partículas cuyas posiciones son descritas usando un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el punto O (ver figura 11.2). En este sistema de coordenadas la partícula  $i$  de masa  $m_i$  tiene coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$ .

La matriz de inercia,  $I_O$ , del sistema se define entonces como

$$I_O \equiv \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i x_i & -\sum_{i=1}^N m_i z_i x_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i z_i y_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}. \quad (11.48)$$

Los términos de la diagonal de la matriz de inercia reciben el nombre de momentos de inercia respecto de los ejes X, Y y Z, respectivamente. Así por ejemplo, el momento de inercia respecto al eje X está definido por

$$I_{xx} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad (11.49)$$

que corresponde a la suma de las distancias cuadráticas de cada partícula al eje X ponderadas por las respectivas masas. Análogamente los momentos de inercia respecto a los ejes Y y Z están dados por

$$I_{yy} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad (11.50)$$

$$I_{zz} \equiv \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (11.51)$$

Por su parte, los términos fuera de la diagonal de la matriz de inercia reciben el nombre de productos de inercia, y se definen por

$$I_{xy} \equiv -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i, \quad (11.52)$$

$$I_{xz} \equiv -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i, \quad (11.53)$$

$$I_{yz} \equiv -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i. \quad (11.54)$$

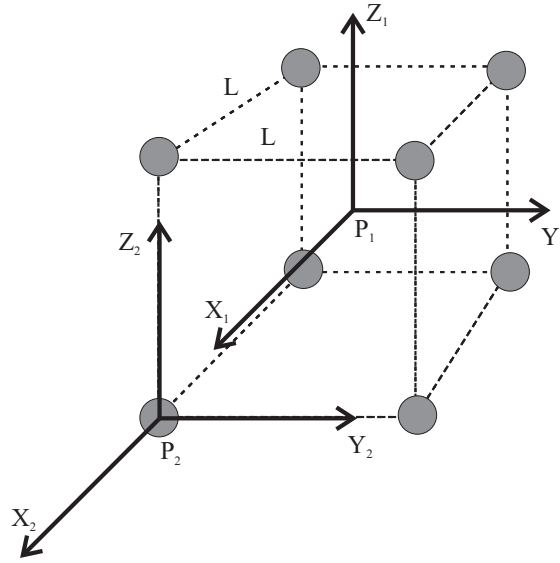


Figura 11.3: Sistema rígido de partículas compuesto por 8 masas iguales dispuestas en vértices de cubo de lado  $L$ .

Usando las definiciones anteriores la matriz de inercia puede escribirse como

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (11.55)$$

Por las definiciones anteriores puede verse que los momentos de inercia son siempre mayor o igual a cero, los productos de inercia pueden ser mayor, menor o igual a cero, la matriz de inercia es siempre simétrica y sus elementos diagonales son siempre  $\geq 0$ .

### 11.5.1. Ejemplo

Antes de seguir adelante calculemos la matriz de inercia del sistema de la figura 11.3 compuesto por 8 partículas de igual masa,  $m$ , dispuestas en los vértices de un cubo de lado  $L$ . Calculemos primero la matriz de inercia,  $I_1$ , respecto al sistema de referencia con origen,  $P_1$ , en el centro del cubo y con ejes,  $X_1, Y_1, Z_1$ , paralelos a sus lados. Respecto a este sistema de referencia se propone mostrar que

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 8m \left( \left( \frac{L}{2} \right)^2 + \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) = 4mL^2 \quad (11.56)$$

y también

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0. \quad (11.57)$$

Calculemos también la matriz de inercia,  $I_2$ , de la misma estructura pero ahora respecto al sistema de referencia con origen,  $P_2$ , ubicado en uno de los vértices del cubo y con ejes,  $X_2, Y_2, Z_2$ , paralelos a sus lados (ver figura 11.3). En este caso se propone mostrar que

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = 4mL^2 + 2m(\sqrt{2}L)^2 = 8mL^2, \quad (11.58)$$

y

$$I_{xy} = I_{xz} = -2mL^2, \quad (11.59)$$

$$I_{yz} = 2mL^2. \quad (11.60)$$



Por lo tanto, las matrices de inercia respectivas son

$$I_1 = mL^2 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad (11.61)$$

$$I_2 = mL^2 \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}. \quad (11.62)$$

### 11.5.2. Algunas propiedades

#### Caso plano

En el caso que la posición de todas las partículas del sistema esté contenida en el plano XY, se tiene que  $z_i = 0$ , y, por lo tanto, los productos de inercia  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ .

#### Simetrías

En los casos que la configuración espacial de las partículas del sistema presente algún tipo de simetría respecto a los ejes o planos de referencia usados en el cálculo de  $I$ , ésta toma algunas características particulares. Por ejemplo, supongamos que el sistema de partículas es simétrico respecto al plano XZ. Esta simetría implica que por cada partícula de masa  $m_i$  ubicada en  $(x_i, y_i, z_i)$  existe en el sistema otra partícula de masa  $m_j$  ubicada en  $(x_j, y_j, z_j)$  que cumple

$$m_j = m_i, \quad (11.63)$$

$$x_j = x_i, \quad (11.64)$$

$$y_j = -y_i, \quad (11.65)$$

$$z_j = z_i. \quad (11.66)$$

Es fácil ver que con estas propiedades al calcular los productos de inercia  $I_{xy}$  e  $I_{yz}$  ellos resultarán nulos. Si además el sistema es simétrico también respecto del plano XZ entonces  $I_{xz} = 0$ . Tal era el caso del ejemplo anterior cuando calculamos  $I_1$  y todos los productos de inercia resultaron nulos. Para el cálculo de  $I_2$ , sin embargo, los planos de referencia no eran planos de simetría del sistema por lo cual los productos de inercia no resultaron nulos.

### 11.5.3. Cambio de $I$ por traslación del origen: Teorema de Steiner

Vimos antes que a veces necesitaremos calcular la matriz de inercia respecto al CM y otras veces la necesitaremos respecto a un punto O distinto del CM. Por lo tanto, en general podríamos requerir conocer  $I$  respecto de un punto cualquiera y una pregunta natural que surge es cuál es la relación entre las matrices de inercia de un sistema de partículas calculadas respecto de 2 sistemas cartesianos distintos (distinto origen y/o distintos ejes de referencia). Responderemos esta pregunta para el caso particular pero importante en que uno de los sistemas cartesianos es arbitrario, y el segundo tiene ejes de referencia paralelos al primero, pero su origen se ubica en el centro de masa (CM) del sistema de partículas. La figura 11.4 ilustra el caso considerado. Llamaremos  $(x_i, y_i, z_i)$  a las coordenadas de las partículas respecto del sistema arbitrario, respecto del cual el CM tiene coordenadas  $(x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$ . Llamaremos  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  a las coordenadas de las partículas referidas al

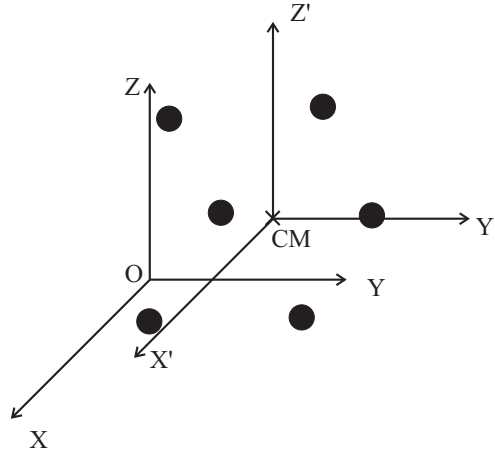


Figura 11.4: Esquema para derivación de Teorema de Steiner.

sistema con origen en el centro de masa, de tal forma que se cumple (ver capítulo de Sistemas de Partículas)

$$\sum_i^N m_i x'_i = 0, \quad (11.67)$$

$$\sum_i^N m_i y'_i = 0, \quad (11.68)$$

$$\sum_i^N m_i z'_i = 0. \quad (11.69)$$

Partamos considerando el momento de inercia con respecto al eje X

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i ((y_{CM} + y'_i)^2 + (z_{CM} + z'_i)^2) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (y_{CM}^2 + 2y_{CM}y'_i + y_i'^2) + (z_{CM}^2 + 2z_{CM}z'_i + z_i'^2) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (y_{CM}^2 + z_{CM}^2) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N m_i (2y_{CM}y'_i + 2z_{CM}z'_i) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2). \end{aligned}$$

La penúltima sumatoria es nula por las propiedades 11.67-11.69, por lo que se tiene finalmente que

$$I_{xx} = M(y_{CM}^2 + z_{CM}^2) + I_{x'x'}, \quad (11.70)$$

donde  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  es la masa total del sistema, y  $I_{x'x'}$  es el momento de inercia calculado respecto al eje  $X'$  que es paralelo al eje  $X$  pero que pasa por el CM. Análogamente, la

relación entre los otros momentos de inercia es

$$I_{yy} = M(x_{CM}^2 + z_{CM}^2) + I_{y'y'}, \quad (11.71)$$

$$I_{zz} = M(x_{CM}^2 + y_{CM}^2) + I_{z'z'}. \quad (11.72)$$

Del mismo modo, se propone demostrar que la relación entre los productos de inercia es

$$I_{xy} = -Mx_{CM}y_{CM} + I_{x'y'}, \quad (11.73)$$

$$I_{xz} = -Mx_{CM}z_{CM} + I_{x'z'}, \quad (11.74)$$

$$I_{yz} = -My_{CM}z_{CM} + I_{y'z'}. \quad (11.75)$$

Las relaciones vistas se conocen como Teorema de Steiner. Considerando que en el ejemplo de la sección anterior el CM de las 8 partículas queda en el centro del cubo, se propone verificar que los momentos y productos de inercia de las matrices  $I_1$  e  $I_2$  efectivamente cumplen el Teorema de Steiner.

#### 11.5.4. Cambio de $I$ por rotación de ejes: Direcciones Principales de Inercia

Al momento de encontrarnos con la matriz de inercia en 11.22 dijimos que poníamos un sistema cartesiano en  $S'$ , con el cual definíamos las coordenadas de cada partícula del sistema. Sin embargo, nunca dijimos qué orientación dábamos a los ejes X, Y, Z de ese sistema de referencia. Por lo tanto, la orientación de los ejes cartesianos de  $S'$  puede ser cualquiera. En otras palabras, el resultado principal obtenido entonces,

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\Omega}_s, \quad (11.76)$$

no depende de la orientación de los ejes X, Y, Z que definen las coordenadas de cada partícula en  $S'$ . De hecho la notación misma de la matriz de inercia,  $I_{CM}$ , indica sólo el punto de referencia (CM) y no indica los ejes de referencia usados en el cálculo de las coordenadas.

Lo anterior no significa que los elementos individuales de la matriz no cambien si uso ejes de referencia distintos. Por ejemplo el producto de inercia  $I_{xy}$  se definió como

$$I_{xy} = \sum_i -m_i x_i y_i, \quad (11.77)$$

y claramente su valor cambiará si mi eje X apunta en una dirección distinta. Lo mismo ocurre con todos los 9 elementos de  $I$ . Pero, por otro lado, si cambio la orientación de mis ejes de referencia cambian también las componentes de  $\vec{\Omega}_s$  y de  $\vec{L}_{CM}$ , todo de manera tal que el resultado

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\Omega}_s, \quad (11.78)$$

se sigue cumpliendo. En resumen, ante una rotación de los ejes coordenados cambian las componentes de los vectores  $\vec{\Omega}_s$  y  $\vec{L}_{CM}$ , y cambian las componentes de la matriz de inercia  $I_{CM}$ , pero la ecuación 11.78 no se modifica.

Considerando lo anterior, se puede mostrar que siempre se puede encontrar un set de direcciones ortogonales para las cuales la matriz de inercia toma una forma diagonal en que los productos de inercia se anulan. Este set de direcciones recibe el nombre de direcciones principales de inercia. Si los ejes X, Y, Z son direcciones principales de inercia, entonces la matriz de inercia es simplemente

$$I_{CM} = \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix}. \quad (11.79)$$

Las direcciones principales de inercia tienen la gracia de que cuando la estructura rígida gira respecto de una de esas direcciones el momento angular y la velocidad angular resultan vectores paralelos. Por ejemplo, si la estructura gira con velocidad angular en la dirección de la dirección principal X, entonces

$$\Omega_s = (\Omega_X, 0, 0) \quad (11.80)$$

y usando 11.78 y 11.79 obtenemos

$$\vec{L}_{CM} = I_{XX}\vec{\Omega}_s. \quad (11.81)$$

La propiedad anterior nos permite determinar las direcciones principales si conocemos la matriz de inercia respecto de un set de ejes coordenados arbitrarios (x,y,z). Dado que este sistema de ejes es arbitrario, la matriz de inercia será en general completa. Sin embargo, podemos buscar las direcciones principales imponiendo que en ellas el momento angular sea paralelo a la velocidad angular. Es decir, buscamos las direcciones en las que se cumple que

$$\lambda\vec{\Omega}_s = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \vec{\Omega}_s, \quad (11.82)$$

donde  $\lambda$  es un escalar. El problema matemático 11.82 es el problema de valores y vectores propios de la matriz  $I$ . Los vectores propios definen efectivamente las direcciones principales de inercia y los valores propios corresponden a los momentos de inercia respecto de las direcciones principales de inercia, los que son llamados Momentos Principales de Inercia.

La simplicidad de la matriz de inercia cuando las direcciones del sistema de referencia S' apuntan en las direcciones principales de inercia, hace que sea deseable definir S' en base a ellas. Para estructuras simples es usualmente fácil distinguir rápidamente las direcciones principales de inercia: ejes de simetría son buenos candidatos para ello pues los productos de inercia tienden a anularse como vimos en la sección 11.5.2.

## 11.6. Sólidos

### 11.6.1. Distribución continua de masa

Cuando las partículas consideradas están muy juntas entre sí es más conveniente considerar que la masa se distribuye en forma continua en el espacio. En este caso las partículas pasan a ser elementos de masa  $dm$  y las sumas sobre las partículas individuales pasan a ser integrales sobre la masa del cuerpo sólido.

La forma en que la masa se distribuye en el espacio se describe con el concepto de densidad másica. Para un cuerpo en 3-D, la densidad másica se define como

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (11.83)$$

donde  $\Delta m$  es la masa contenida en el elemento de volumen  $\Delta V$ . La densidad puede ser en general una función del espacio ( $\rho(\vec{r})$ ) si es que el cuerpo tiene partes más densas que otras. Usando la densidad el elemento diferencial de masa puede escribirse como

$$dm = \rho dV \quad (11.84)$$

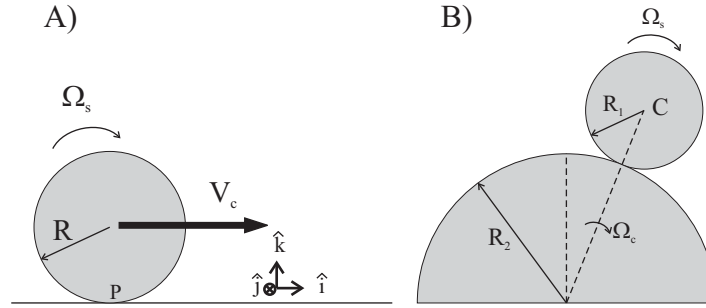


Figura 11.5: Disco rodando sin resbalar. A) Sobre superficie horizontal. B) Sobre otro disco.

donde  $dV$  es ahora un elemento de volumen y las integrales se hacen sobre el volumen del cuerpo considerado. Para cuerpos 2-D o 1-D las densidades másicas se definen por unidad de área o de longitud, respectivamente, y las integrales se transforman en integrales de superficie o de línea.

Este límite de considerar la masa distribuida continuamente en el espacio no se aplica solamente en el estudio de cuerpos sólidos, sino que también al estudio de movimientos de fluidos como el agua, el aire, etc. Las ecuaciones de movimiento de estos últimos, sin embargo, no pueden imponer la restricción de rigidez y deben dar la posibilidad de movimiento relativo entre los elementos diferenciales de masa. La hermosa teoría resultante se estudiará en los cursos de Mecánica de Fluidos.

### 11.6.2. Propiedades extendidas

El hecho de considerar la masa distribuida continuamente en el espacio no cambia las ecuaciones dinámicas que ya derivamos para estructuras rígidas. Solamente cambia el hecho de que las propiedades que se definieron como sumatorias sobre las partículas pasan a ser ahora integrales sobre el volumen del cuerpo. A modo de ejemplo, para un cuerpo en 3-D la posición del centro de masa es ahora

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho dV, \quad (11.85)$$

y el momento de inercia respecto al eje X es

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV, \quad (11.86)$$

donde el dominio de las integrales corresponde al volumen ocupado por el cuerpo.

### 11.6.3. Condición de no-resbalamiento

En problemas de movimiento de sólidos rígidos una condición cinemática que se encuentra frecuentemente es la de rodadura sin resbalamiento entre el sólido y la superficie sobre la cual éste se mueve. Para ilustrar esta condición consideremos que el disco de radio  $R$  en la figura 11.5A rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal. En este caso la condición de no resbalamiento impone una restricción cinemática entre la velocidad del centro del disco ( $\dot{x}_C$ ) y la velocidad angular del disco ( $\Omega_s$ ). La condición matemática asociada se obtiene imponiendo que la velocidad relativa entre los puntos de contacto instantáneo entre

el disco y la superficie sea nula. Si la superficie está en reposo entonces debemos imponer que la velocidad absoluta del punto P del disco (en contacto con la superficie) sea también cero. Podemos ligar la velocidad del punto P con la del centro C del disco mediante la relación

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\Omega}_s \times \vec{CP}. \quad (11.87)$$

En este caso

$$\vec{v}_C = \dot{x}_C \hat{i}, \quad (11.88)$$

$$\vec{\Omega}_s = \Omega_s \hat{j}, \quad (11.89)$$

$$\vec{CP} = -R \hat{k}, \quad (11.90)$$

de tal manera que al imponer  $\vec{v}_P = \vec{0}$  obtenemos la restricción cinemática

$$\Omega_s = \frac{\dot{x}_C}{R}. \quad (11.91)$$

Se deja propuesto mostrar de esta misma manera que el rodamiento sin resbalar del disco de radio  $R_1$  sobre el semidisco de radio  $R_2$  de la figura 11.5B se traduce en la condición cinemática

$$\Omega_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \Omega_C. \quad (11.92)$$

Notemos que desde el punto de vista dinámico la condición de no resbalamiento implica que en el punto de contacto actúa una fuerza de roce *estático*, mientras que desde el punto de vista energético esta fuerza de roce estático no realiza trabajo ya que actúa sobre un punto del cuerpo que se encuentra instantáneamente en reposo.

**Capítulo 12**

**Epílogo**





# Apéndice A

## Vectores y Matrices

### A.1. Vectores: aspectos básicos

VARIABLES físicas que tienen magnitud, dirección y sentido se representan matemáticamente con vectores. Por ejemplo, la posición, velocidad y aceleración de una partícula son vectores, así como las fuerzas. Como vimos en el capítulo inicial del curso, hay muchas formas alternativas de describir matemáticamente un mismo vector. Por ejemplo, si el vector “vive” en un espacio 3-D, lo describiremos con una tríada de números que corresponderán a sus coordenadas. Sin embargo, esta tríada no es lo que define al vector, ya que si yo cambio el sistema de referencia o de coordenadas que uso, entonces el *mismo* vector lo describiré con una tríada *distinta* de números. Entonces, lo que realmente define al vector es su magnitud, dirección y sentido. Si cambio el sistema de referencia o de coordenadas, las coordenadas de un vector dado deberán cambiar de manera tal que el vector mismo no cambie.

En lo que sigue, simplemente repasamos algunos operadores importantes y enunciamos algunas relaciones vectoriales que aparecen en el curso. La demostración de ellas, así como el repaso de las relaciones básicas del álgebra vectorial se dejan propuestas al estudiante.

Sobre notación: la distinción entre variables escalares y vectoriales es tan fundamental, que es muy conveniente que la notación muestre claramente las variables que son vectores: flechitas, gorritos, negritas, etc. pueden ser usados para ello. La gran mayoría de los alumnos, sin embargo, desprecia la importancia de la notación, y, en demasiadas ocasiones pondrán flechas donde no deben, dividirán por vectores, o sumarán escalares con vectores, más otras aberraciones varias. Allí donde la notación correcta les iba a ayudar a no cometer un error, la notación desprolija sólo aumenta la confusión y disminuye la nota.

#### A.1.1. Producto punto y producto cruz

Recordemos primeramente las operaciones de producto que pueden “sufrir” los vectores. El producto punto de 2 vectores,  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , entrega como resultado el valor escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \alpha, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre ambos vectores. Si uno de los vectores es un vector unitario,  $\hat{u}$ , entonces

$$\vec{A} \cdot \hat{u} = \|\vec{A}\| \cos \alpha, \quad (\text{A.2})$$

puede interpretarse como la magnitud de la proyección de  $\vec{A}$  en la dirección definida por  $\hat{u}$ . El producto punto es conmutativo. El producto punto de 2 vectores perpendiculares es nulo. El producto punto de un vector consigo mismo es su magnitud al cuadrado.

El otro producto importante entre 2 vectores es el producto cruz. A diferencia del producto punto, el resultado del producto cruz es un vector. La magnitud del vector resultante está dada por

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\alpha. \quad (\text{A.3})$$

La dirección del vector resultante es siempre perpendicular al plano formado por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Por último, el sentido del vector resultante se obtiene mediante la aplicación de la regla de la mano derecha: partiendo con la palma de la mano derecha estirada, se cierra ésta desde  $\vec{A}$  hasta  $\vec{B}$  por el camino más corto. El vector resultante apunta en el sentido que apunta el pulgar.

El producto cruz no es conmutativo, sino más bien:  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ . El producto cruz de dos vectores paralelos es nulo. El producto cruz de un vector consigo mismo es nulo. La magnitud de  $\vec{A} \times \vec{B}$  es dos veces el área del triángulo formado por  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

### A.1.2. Fórmulas misceláneas

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (\text{A.5})$$

## A.2. Matrices: valores y vectores propios

En el transcurso de este curso nos aparecen en más de alguna parte ecuaciones que resulta conveniente escribir en forma matricial y en cuyo análisis usamos los conceptos de vectores y valores propios (modos normales en el capítulo de equilibrios y oscilaciones, y matriz de inercia en el capítulo de sistemas rígidos y sólidos). Si bien la teoría matemática correspondiente se estudia en el curso de álgebra lineal, ocurre a veces que en dicho curso el afán de trabajar en un espacio general de  $N$  dimensiones puede oscurecer el alcance más físico de estos conceptos. Nos restringiremos, por lo tanto, aquí a considerar espacios de “sólo” 2 ó 3 dimensiones y trataremos de enfatizar la interpretación física o geométrica de los vectores y valores propios de una matriz.

El producto de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  de  $3 \times 3$  elementos por un vector,  $\vec{r}$ , está dado por

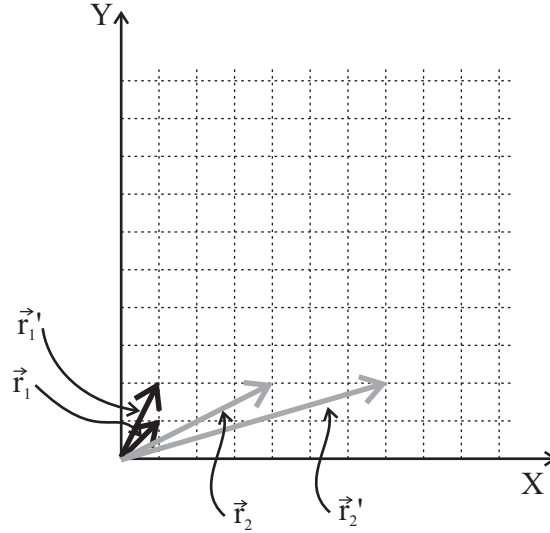
$$\mathbf{A}\vec{r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Lo importante de notar es que la multiplicación de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  por un vector  $\vec{r}_1$  entrega como resultado un nuevo vector,  $\vec{r}_2$ , el cual tendrá en general una dirección que puede ser muy distinta a la dirección del vector  $\vec{r}_1$ . A modo de ejemplo, consideremos un caso en 2-D en que la matriz considerada sea de  $2 \times 2$  elementos y el vector  $\vec{r}_1$  tenga 2 coordenadas. Para trabajar sobre un ejemplo concreto, consideremos que la matriz  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

y que el vector  $\vec{r}_1$  es

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

Figura A.1: Vectores  $\vec{r}$  y  $\mathbf{A}\vec{r}$ .

de tal forma que  $\mathbf{A}\vec{r}_1$  es el vector  $\vec{r}_2$

$$\vec{r}_2 = \mathbf{A}\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

La Figura A.1 muestra los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  en este caso. Puede verse que el vector resultante  $\vec{r}_2$  tiene una dirección bastante distinta a la dirección de  $\vec{r}_1$ . Este cambio de dirección que la multiplicación por una matriz  $\mathbf{A}$  impone a un vector  $\vec{r}$  no sólo depende de la matriz, sino que también del vector. Por ejemplo, si ahora consideramos nuestra misma matriz  $\mathbf{A}$  multiplicando a un vector  $\vec{r}'_1$ :

$$\vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

se puede verificar que

$$\vec{r}'_2 = \mathbf{A}\vec{r}'_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

y vemos en la figura que el cambio de dirección entre  $\vec{r}'_1$  y  $\vec{r}'_2$  es más pronunciado que el que tienen  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ .

Dado lo anterior, cabe preguntarse para qué vector  $\vec{r}$  la multiplicación  $\mathbf{A}\vec{r}$  entregará como resultado un vector que tenga la misma dirección que  $\vec{r}$ . O, en otras palabras, para qué vector  $\vec{r}$  el vector  $\mathbf{A}\vec{r}$  resulta paralelo a  $\vec{r}$ . Si reflexionamos un poco en esta pregunta, veremos que la respuesta no puede ser un vector específico, sino más bien, la respuesta será una *dirección* específica, ya que si para cierto vector  $\vec{r}$  se tiene que  $\mathbf{A}\vec{r}$  es un vector paralelo a  $\vec{r}$ , lo mismo se cumplirá para cualquier vector  $\alpha\vec{r}$ , con  $\alpha$  escalar.

Matemáticamente, la pregunta planteada se expresa buscando los vectores  $\vec{r}$  que cumplan la condición

$$\mathbf{A}\vec{r} = \lambda\vec{r}, \quad (\text{A.12})$$

donde  $\lambda$  es un escalar por ahora indeterminado. Este problema matemático se denomina problema de vectores y valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . En nuestro ejemplo particular, el problema es encontrar la dirección de  $\vec{r} = (x, y)$  tal que se cumpla que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

El sistema de ecuaciones en A.13 equivale al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 0 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Para encontrar alguna solución en  $\vec{r}$  no nula, una condición que debe cumplirse es que el determinante de la matriz en A.14 sea cero, dado que, de lo contrario, podríamos invertirla y la única solución del problema sería  $\vec{r} = \vec{0}$ . Esta condición de determinante nulo es en este caso

$$(1 - \lambda)(-\lambda) - 6 = 0. \quad (\text{A.15})$$

Esta ecuación algebraica se denomina ecuación característica del problema de valor propio de  $\mathbf{A}$ , y es la que me permite determinar los valores  $\lambda$ , los que hasta el momento eran indeterminados (sólo habíamos impuesto que  $\lambda$  fuese escalar). Para nuestro ejemplo, la ecuación característica nos entrega dos valores propios de  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = 3, \quad (\text{A.16})$$

$$\lambda_2 = -2. \quad (\text{A.17})$$

Una vez encontrados los valores propios de  $\mathbf{A}$  podemos finalmente responder la pregunta planteada: para qué direcciones de  $\vec{r}$  se cumple A.13. Esto se hace reemplazando en A.14 cada uno de los valores propios encontrados. Por ejemplo, reemplazando  $\lambda_1$  en A.14 obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Puede verse que el sistema de ecuaciones es linealmente dependiente, lo cual es justamente lo que buscamos al imponer la condición de que el determinante en A.14 fuese nulo. Por lo tanto, A.18 no nos entrega una solución única, sino más bien una dirección específica. En efecto, el sistema A.18 impone una única restricción sobre el vector  $\vec{r} = (x, y)$  para que sea solución del problema de vector propio de  $\mathbf{A}$  (con  $\lambda = \lambda_1$ ):

$$-2x + 3y = 0. \quad (\text{A.19})$$

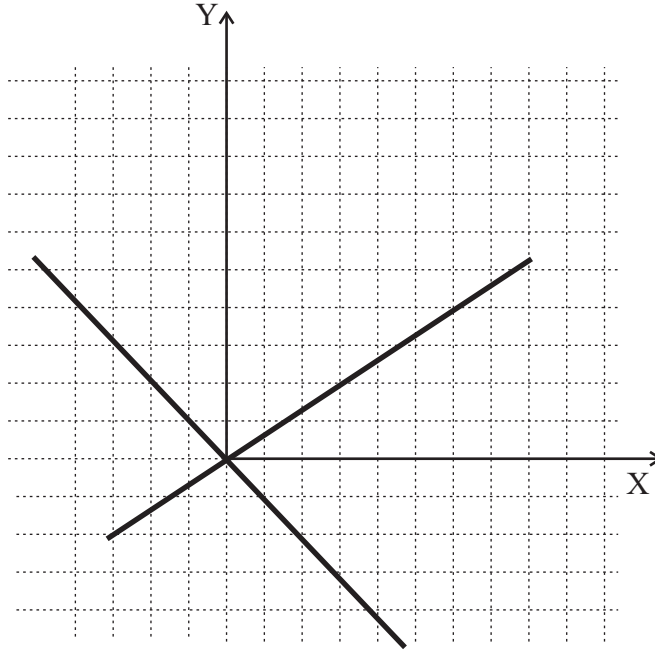
Es decir, cualquier vector  $\vec{r} = (x, y)$  con

$$y = \frac{2}{3}x, \quad (\text{A.20})$$

cumplirá la condición A.13 con  $\lambda = \lambda_1 = 3$ . La condición A.20 define efectivamente una dirección muy específica en el espacio, tal que si  $\vec{r}$  tiene esa dirección, entonces  $\mathbf{A}\vec{r} = \lambda_1\vec{r}$ . Un vector que tenga esa dirección será denominado vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1$  de  $\mathbf{A}$ . Por ejemplo

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

sería un vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 3$  de nuestra matriz  $\mathbf{A}$ . Notemos que lo más importante del vector propio es su dirección, por lo que  $\vec{r} = (3, 2)$  podría también considerarse vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado a  $\lambda_1$ . Repitiendo el procedimiento, pero ahora con  $\lambda_2 = -2$ , queda propuesto mostrar que un vector propio asociado a  $\lambda_2$  podría ser  $\vec{r} = (1, -1)$ .

Figura A.2: Direcciones propias de la matriz  $\mathbf{A}$ .

En resumen, dada una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  y un vector  $\vec{r}$  que tiene la dirección del vector propio de  $\mathbf{A}$  asociado al valor propio  $\lambda$ , se cumple entonces que

$$\mathbf{A}\vec{r} = \lambda\vec{r}, \quad (\text{A.22})$$

es decir, para vectores en esa dirección propia, la multiplicación por la matriz  $\mathbf{A}$  equivale a una simple ponderación del vector por el escalar  $\lambda$ . Verifiquemos esta conclusión en nuestro caso ejemplo, considerando el vector  $\vec{r} = (6, 4)$ . Hacemos la multiplicación

$$\vec{r}_2 = \mathbf{A}\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Dado que el vector  $\vec{r}$  tenía la misma dirección del primer vector propio de  $\mathbf{A}$ , obtuvimos que  $\mathbf{A}\vec{r} = \lambda_1\vec{r} = 3\vec{r}$ . Si consideramos un segundo vector  $\vec{r} = (-2, 2)$  podemos verificar que  $\mathbf{A}\vec{r} = -2\vec{r} = (4, -4)$ . La figura A.2 muestra las 2 direcciones propias de la matriz  $\mathbf{A}$  de nuestro ejemplo. El curso matemático respectivo profundizará en los aspectos teóricos del problema, determinando condiciones para que los valores propios de la matriz existan, o bien, bajo qué condiciones las direcciones principales son ortogonales, etc., etc., etc. Aquí nos quedamos solamente con esta noción conceptual de que dada una matriz cuadrada, ella tiene en general asociadas estas direcciones que le son propias, respecto de las cuales la multiplicación de la matriz por un vector, equivale a una simple ponderación escalar. Como vimos en los capítulos respectivos, estas direcciones propias de las matrices que encontramos en el curso corresponden a elementos importantes de nuestros sistemas físicos: por ejemplo, modos normales de oscilación de sistemas complejos, o direcciones principales de inercia de estructuras rígidas.



## Apéndice B

# Ecuaciones diferenciales ordinarias





# Apéndice C

## Integrales de Línea

Al usar los conceptos de energía y trabajo es recurrente la necesidad de calcular integrales de línea a lo largo de curvas en el espacio. Por ejemplo, si queremos calcular el trabajo,  $W$ , que una cierta fuerza no conservativa,  $\vec{F}^{\text{nc}}$ , realizó sobre una partícula mientras ésta se movió sobre su trayectoria  $\mathcal{C}_1$  desde un punto A a un punto B, debemos calcular

$$W = \int_A^B \vec{F}^{\text{nc}} \cdot d\vec{r}. \quad (\text{C.1})$$

Otras veces querremos calcular la energía potencial asociada a una fuerza conservativa,  $\vec{F}^{\text{c}}$ , usando la expresión

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}^{\text{c}}}^{\vec{r}^{\text{ref}}} \vec{F}^{\text{c}} \cdot d\vec{r}. \quad (\text{C.2})$$

En este último caso la forma exacta de la curva  $\mathcal{C}$  no es importante puesto que se nos dice que la fuerza es conservativa y, por lo tanto, podemos elegir la forma de  $\mathcal{C}$  que más nos convenga para calcular la integral.

Estas integrales de línea no son necesariamente fáciles de comprender las primeras veces que uno se enfrenta a ellas, y a veces no parece muy claro ni siquiera qué es lo que se integra y sobre qué variable se integra. En esta sección de los apuntes tratamos de explicar con mayor detalle este tipo de integrales. En paralelo con el curso de Mecánica, se espera que el curso de cálculo en varias variables explique en detalle las formalidades matemáticas asociadas a ellas, por lo que aquí nos limitaremos a mostrar sólo algunos aspectos básicos de su cálculo.

### C.1. Representación de la curva $\mathcal{C}$

El primer requisito para poder calcular una integral de línea es conocer la curva  $\mathcal{C}$  por sobre la cual realizaremos la integral. Por lo tanto, debemos familiarizarnos con la forma matemática en que describimos una curva. En términos generales una curva en el espacio se describe en la forma

$$\mathcal{C} : \quad \vec{r} = \vec{r}(p), \quad p_1 \leq p \leq p_2 \quad (\text{C.3})$$

que significa que el vector posición de todos los puntos sobre la curva  $\mathcal{C}$  depende sólo de una variable independiente,  $p$  (el parámetro de la curva). Dado un valor de  $p$  la función  $\vec{r}(p)$  me entrega un punto específico del espacio que pertenece a la curva  $\mathcal{C}$ . Dado otro valor de  $p$  obtendré otro punto de la curva, y así sucesivamente. Si la función  $\vec{r}(p)$  es continua, podemos imaginar que todos los puntos que obtendremos formarán de hecho una sucesión

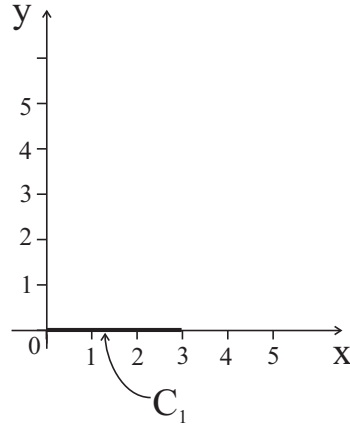


Figura C.1: Curva  $\mathcal{C}_1$  correspondiente al tramo del eje entre 0 y 3.

continua de puntos en el espacio que corresponde justamente a nuestra curva  $\mathcal{C}$ . Los valores  $p_1$  y  $p_2$  son los valores que toma el parámetro  $p$  en los puntos extremos de la curva.

Apliquemos estas ideas a casos particulares. Consideremos un espacio plano que describimos con coordenadas cartesianas. Una curva muy simple en este plano podría ser el tramo del eje  $X$  entre 0 y 3 (ver figura C.1). Usando el formalismo de la ecuación C.3 esta curva se describe matemáticamente en la forma

$$\mathcal{C}_1 : \quad \vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} = p \hat{i}, \quad 0 \leq p \leq 3. \quad (\text{C.4})$$

Dado que la ecuación C.4 es vectorial, ella equivale a dos ecuaciones escalares:

$$x = p, \quad 0 \leq p \leq 3, \quad (\text{C.5})$$

$$y = 0, \quad 0 \leq p \leq 3, \quad (\text{C.6})$$

que claramente describen las coordenadas de todos los puntos de la curva  $\mathcal{C}_1$ . Advirtamos inmediatamente que existe cierta libertad para definir el parámetro  $p$  con que describimos la misma curva  $\mathcal{C}_1$ . En efecto, se comprueba fácilmente que la ecuación

$$\mathcal{C}_1 : \quad \vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} = 3p \hat{i}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (\text{C.7})$$

describe exactamente la misma curva  $\mathcal{C}_1$ . Y así, podemos imaginar muchas otras formas de describir matemáticamente la misma curva. Muchas veces elegimos el parámetro  $p$  tal que coincide con una de las coordenadas, pero debemos tener clara la diferencia conceptual entre ambos. Un ejemplo en que el parámetro no coincide con ninguna de las coordenadas sería la curva descrita por

$$x = p^2, \quad (\text{C.8})$$

$$y = \frac{1}{p}, \quad (\text{C.9})$$

con  $1 < p < 2$ . Cómo se vería esta curva en el plano?.

## C.2. El vector desplazamiento $d\vec{r}$

La clave de calcular las integrales de línea en las ecuaciones C.1 o C.2 es reconocer que los vectores  $d\vec{r}$  en ella van siguiendo a la curva  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto, si la curva  $\mathcal{C}$  sobre la que

calculamos la integral está descrita mediante la ecuación

$$\mathcal{C} : \quad \vec{r} = \vec{r}(p), \quad p_1 \leq p \leq p_2, \quad (\text{C.10})$$

el vector  $d\vec{r}$  sobre la curva será

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dp} dp \quad (\text{C.11})$$

y la integral se transforma en una integral sobre el parámetro  $p$  en la forma

$$I = \int_{p_1}^{p_2} \vec{F}(\vec{r}(p)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dp} dp. \quad (\text{C.12})$$

Nuevamente, esta expresión general quedará más clara si la aplicamos a casos particulares, como lo haremos a continuación.

### C.3. Coordenadas cartesianas

Cuando utilizamos coordenadas cartesianas para describir el espacio, las coordenadas  $x$  e  $y$  de los puntos sobre la curva  $\mathcal{C}$  son funciones conocidas del parámetro  $p$ , es decir,

$$x = x(p), \quad (\text{C.13})$$

$$y = y(p). \quad (\text{C.14})$$

Por lo tanto, la derivada del vector posición que se encuentra en el integrando de C.12 es

$$\frac{d\vec{r}}{dp} = \frac{d(x \hat{i} + y \hat{j})}{dp} = \frac{dx}{dp} \hat{i} + \frac{dy}{dp} \hat{j}. \quad (\text{C.15})$$

Notemos que en el último paso los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  no fueron derivados, por cuanto recordamos que en coordenadas cartesianas los vectores unitarios son uniformes (constantes) en el espacio, por lo que no cambian si nos movemos sobre la curva  $\mathcal{C}$ .

Por su parte, la fuerza  $\vec{F}$  puede descomponerse en sus componentes cartesianas en la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x, y) \hat{i} + F_y(x, y) \hat{j}, \quad (\text{C.16})$$

donde reconocemos que las componentes de  $\vec{F}$  son funciones (escalares) del espacio. Combinando C.15 y C.16 la integral del trabajo a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  resulta

$$I = \int (F_x(x, y) \hat{i} + F_y(x, y) \hat{j}) \cdot \left( \frac{dx}{dp} \hat{i} + \frac{dy}{dp} \hat{j} \right) dp = \int \left[ F_x(x, y) \frac{dx}{dp} + F_y(x, y) \frac{dy}{dp} \right] dp. \quad (\text{C.17})$$

Debido a que sobre la curva las coordenadas  $x$  e  $y$  son función de  $p$  el resultado es una integral de una función escalar de  $p$ :

$$I = \int \left[ F_x(x(p), y(p)) \frac{dx}{dp} + F_y(x(p), y(p)) \frac{dy}{dp} \right] dp. \quad (\text{C.18})$$

#### C.3.1. Ejemplo

Consideremos un campo de fuerzas descrito en coordenadas cartesianas en la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = 2cxy \hat{i} + c(x^2 + y^2) \hat{j}, \quad (\text{C.19})$$

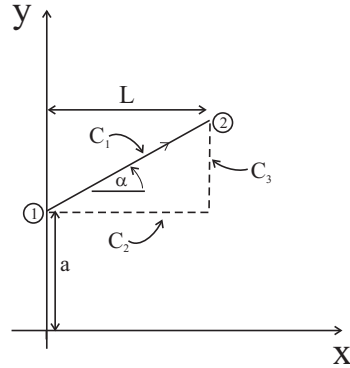


Figura C.2: Curvas para el cálculo de trabajos de una fuerza en el movimiento de una partícula desde el punto 1 al punto 2.

en que  $c$  es una constante. Calculemos el trabajo realizado por esta fuerza para una partícula que se mueve desde el punto 1 al punto 2 según se indica en la figura C.2.

En primer lugar escribamos la ecuación de la recta que pasa por 1 y 2 en función de los datos disponibles

$$y = a + \tan \alpha x. \quad (\text{C.20})$$

Esta descripción de la curva  $\mathcal{C}$  es correcta, pero no está en la forma paramétrica que usamos en C.13 y C.14. Recordemos que había cierta libertad en definir el parámetro de la curva. En este caso lo elegiremos tal que coincida con el valor de  $x$ , de tal forma que la ecuación paramétrica será

$$x = p, \quad (\text{C.21})$$

$$y = a + \tan \alpha p. \quad (\text{C.22})$$

Con esta elección el vector  $d\vec{r}$  a lo largo de la curva  $\mathcal{C}$  resulta

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dp} dp = \left( \frac{dx}{dp} \hat{i} + \frac{dy}{dp} \hat{j} \right) dp = (\hat{i} + \tan \alpha \hat{j}) dp. \quad (\text{C.23})$$

Por otro lado, la fuerza evaluada en puntos sobre la curva resulta ser sólo una función de  $p$ :

$$\vec{F}(\vec{r}(p)) = 2cx(p)y(p) \hat{i} + c(x(p)^2 + y(p)^2) \hat{j} = 2cp(a + \tan \alpha p) \hat{i} + c(p^2 + (a + \tan \alpha p)^2) \hat{j}. \quad (\text{C.24})$$

Por lo tanto, la integral del trabajo será

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (2cp(a + \tan \alpha p) \hat{i} + c(p^2 + (a + \tan \alpha p)^2) \hat{j}) \cdot (\hat{i} + \tan \alpha \hat{j}) dp \quad (\text{C.25})$$

$$= \int [2cp(a + \tan \alpha p) + c(p^2 + (a + \tan \alpha p)^2) \tan \alpha] dp. \quad (\text{C.26})$$

Esta integral podrá verse complicada, pero es simplemente una integral de una función de  $p$ .

Antes de poder llegar a nuestro resultado final, nos falta todavía algo muy importante: indicar exactamente cuáles son los límites de integración. Se debe ser muy cuidadoso en definirlos pues en caso de error llegaremos a un resultado con el signo cambiado, lo cual será un desastre en la ecuación de la energía. La definición de los límites de integración

depende del punto en que la partícula inicia su recorrido y de su punto final, pero también de la forma en que elegí parametrizar la curva. En nuestro caso nos dicen que la partícula parte en el punto 1, en el cual  $x = 0$ . Debido a la forma en que elegí parametrizar la curva (ecuaciones C.21 y C.22), ese punto inicial corresponde a  $p_1 = 0$ . El punto final de la trayectoria, por su parte, corresponde de acuerdo a mi parametrización al valor  $p_2 = L$ . Con esto estoy listo, pues la integral que debo evaluar está completamente definida:

$$\int_0^L [2cp(a + \tan \alpha p) + c(p^2 + (a + \tan \alpha p)^2) \tan \alpha] dp, \quad (\text{C.27})$$

que es un simple problema de cálculo.

Se deja propuesto aquí terminar el cálculo anterior, y luego calcular el trabajo si la partícula se mueve entre los mismos puntos, pero ahora siguiendo la trayectoria compuesta de los 2 tramos rectos  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$ . Analizar si el resultado final es igual o distinto al obtenido para la trayectoria  $\mathcal{C}_1$ . Explicar y comentar.

## C.4. Coordenadas polares

Cuando utilizamos coordenadas polares para describir el espacio, las coordenadas  $r$  y  $\theta$  de los puntos sobre la curva  $\mathcal{C}$  son funciones conocidas del parámetro  $p$ , esto es

$$r = r(p), \quad (\text{C.28})$$

$$\theta = \theta(p). \quad (\text{C.29})$$

Por lo tanto, la derivada del vector posición que se encuentra en el integrando de C.12 es

$$\frac{d\vec{r}}{dp} = \frac{d(r\hat{r})}{dp} = \frac{dr}{dp} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dp}. \quad (\text{C.30})$$

Fijémonos que el último término da la posibilidad de que  $\hat{r}$  cambie a lo largo de la curva. Esto es posible, por cuanto vimos al principio del curso que en coordenadas polares los vectores unitarios no son uniformes en el espacio, por lo cual al movernos sobre la curva existe la posibilidad de que  $\hat{r}$  cambie. En general sabemos que  $\hat{r}$  depende de  $\theta$ , y, debido a C.29, en este caso depende también de  $p$ . Por lo tanto, la derivada se completa como sigue

$$\frac{d\vec{r}}{dp} = \frac{dr}{dp} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dp} = \frac{dr}{dp} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dp} \hat{\theta}, \quad (\text{C.31})$$

donde hemos usado la ya conocida relación válida para coordenadas polares:  $d\hat{r}/d\theta = \hat{\theta}$ .

Al usar coordenadas polares la fuerza  $\vec{F}$  se expresará en la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r, \theta) \hat{r} + F_\theta(r, \theta) \hat{\theta}, \quad (\text{C.32})$$

de tal forma que la integral del trabajo resulta

$$I = \int (F_r(r, \theta) \hat{r} + F_\theta(r, \theta) \hat{\theta}) \cdot \left( \frac{dr}{dp} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dp} \hat{\theta} \right) dp, \quad (\text{C.33})$$

$$= \int \left[ F_r(r(p), \theta(p)) \frac{dr}{dp} + F_\theta(r(p), \theta(p)) r(p) \frac{d\theta}{dp} \right] dp, \quad (\text{C.34})$$

que nuevamente se puede ver complicada, pero es una simple integral en la variable  $p$ . Para entenderla mejor apliquémosla a un caso particular.

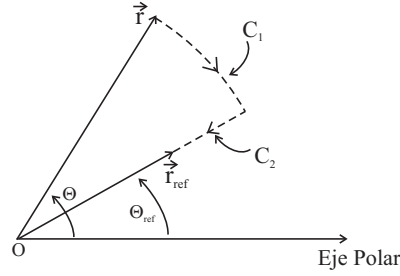


Figura C.3: Esquema para el cálculo de energía potencial de una fuerza central.

### C.4.1. Ejemplo

Calculemos una expresión para la energía potencial de un campo de fuerza que tiene la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{A}{r^3} \hat{r}. \quad (\text{C.35})$$

Esta es una fuerza de tipo central de acuerdo a la definición vista en clases, por lo tanto, es conservativa y es factible asociarle una energía potencial (en clases vimos un caso parecido). Si conocemos la fuerza conservativa la energía potencial la calculamos mediante

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_{\text{ref}}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{C.36})$$

donde ni siquiera hemos indicado la trayectoria entre  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_{\text{ref}}$ , pues para fuerzas conservativas ella no afecta la integral. Por lo tanto, elegimos a nuestro gusto la trayectoria que seguiremos entre ambos puntos. El vector  $\vec{r}$  define un punto cualquiera del espacio, pero sus coordenadas polares las llamaremos por ahora  $(R, \Theta)$ , para no confundirlas con las coordenadas genéricas  $(r, \theta)$  que variarán cuando nos movamos a lo largo de las curvas. En analogía a lo que hicimos en clases, elegimos una trayectoria compuesta por los tramos  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  (ver figura C.3).

En  $\mathcal{C}_1$  la ecuación paramétrica de la curva es

$$r = R = \text{constante} \quad (\text{C.37})$$

$$\theta = p \quad (\text{C.38})$$

con  $p$  variable desde  $\Theta$  hasta  $\theta_{\text{ref}}$ . Por lo tanto,

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dp} dp = \left( \frac{dr}{dp} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dp} \hat{\theta} \right) dp = R \hat{\theta}. \quad (\text{C.39})$$

Por otro lado, la fuerza evaluada sobre  $\mathcal{C}_1$  es

$$\vec{F}(\vec{r}(p)) = -\frac{A}{R^3} \hat{r}. \quad (\text{C.40})$$

Viendo C.39 y C.40 podemos concluir que en el tramo  $\mathcal{C}_1$  se cumple que  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ , lo que en clases obtuvimos conceptualmente al darnos cuenta que en ese tramo el desplazamiento es perpendicular a la fuerza.

En  $\mathcal{C}_2$  la ecuación paramétrica de la curva es

$$r = p \quad (\text{C.41})$$

$$\theta = \theta_{\text{ref}} = \text{constante} \quad (\text{C.42})$$

con  $p$  variable desde  $R$  hasta  $r_{\text{ref}}$ . Por lo tanto,

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dp} dp = \left( \frac{dr}{dp} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dp} \hat{\theta} \right) dp = dp \hat{r}. \quad (\text{C.43})$$

Por su parte, la fuerza evaluada sobre  $\mathcal{C}_2$  es

$$\vec{F}(\vec{r}(p)) = -\frac{A}{p^3} \hat{r}, \quad (\text{C.44})$$

por lo que en el tramo  $\mathcal{C}_2$  se cumple que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{A}{p^3} dp \quad (\text{C.45})$$

y la integral buscada es

$$V(\vec{r}) = \int -\frac{A}{p^3} dp. \quad (\text{C.46})$$

Nos falta aún determinar los límites de integración. Al inicio del tramo  $\mathcal{C}_2$  se tiene  $p = R$ , y al final  $p = r_{\text{ref}}$ , por lo tanto, la integral es

$$V(\vec{r}) = \int_R^{r_{\text{ref}}} -\frac{A}{p^3} dp = \left[ \frac{A}{2p^2} \right]_R^{r_{\text{ref}}} = \frac{A}{2} \left( \frac{1}{r_{\text{ref}}^2} - \frac{1}{R^2} \right). \quad (\text{C.47})$$

Si elegimos como referencia una energía potencial cero en  $r_{\text{ref}} = \infty$ , entonces la energía potencial de esta fuerza en un punto arbitrario,  $\vec{r} = R\hat{r}$ , será

$$V(\vec{r} = R\hat{r}) = -\frac{A}{2R^2}. \quad (\text{C.48})$$

## C.5. Colofón

Podría parecer a algunos que la metodología presentada para calcular estas integrales de línea es demasiado complicada. Parte de la razón es que los desarrollos anteriores trataron de ser más o menos sistemáticos y generales, de tal modo que se entienda por qué hacemos cada cosa. En la medida que uno aplica esta metodología varias veces, y va ganado experiencia y confianza, la aplicación comienza a ser más fluida, uno se puede saltar algunos pasos en forma segura, y los resultados se obtienen más rápidamente. Pero para llegar a ese punto, se requiere ejercitar, ejercitar, ejercitar!





# Apéndice D

## Campos Escalares

La energía potencial,  $V$ , correspondiente a una fuerza conservativa tiene la forma matemática

$$V(\vec{r})$$

que corresponde a lo que se denomina un *campo escalar*, es decir, una función que asocia un valor escalar a cada punto del espacio. Si bien la teoría matemática de estos campos se presenta detalladamente en otros cursos, en Mecánica utilizaremos algunas propiedades de estas funciones, por lo que haremos aquí una breve presentación de ellas.

### D.1. Representación Gráfica

Lo primero que se debe tener presente al trabajar con campos escalares es que, siendo funciones del espacio, es muy conveniente poder visualizar cómo varían ellos en el espacio. De hecho, muchos de los operadores matemáticos que se aplican a los campos escalares tratan justamente de describir su variación espacial: hacia dónde (en qué dirección del espacio) crecen los valores de  $V$ ?, en qué lugar del espacio se encuentran sus valores máximos o mínimos?, etc. Por lo tanto, antes de empezar a derivar y derivar siempre es bueno poder visualizar la variación espacial de  $V(\vec{r})$ . Por ejemplo, consideremos el campo escalar descrito por la ecuación

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}k(r - l_o)^2, \tag{D.1}$$

que podría corresponder a la energía potencial de un resorte de constantes  $k$  y  $l_o$  cuyo extremo fijo está en el origen. En este caso D.1 me dice que el campo escalar  $V$  depende sólo de  $r$ , la distancia desde el origen del sistema coordenado hasta el punto del espacio que estamos considerando. Cómo representamos gráficamente este campo escalar? La respuesta depende de la dimensión del espacio que estamos considerando. Si el vector  $\vec{r}$  “vive” en un espacio uni-dimensional (es decir, limitamos el análisis a puntos sobre una recta), entonces simplemente podemos graficar  $V(r)$ , como se muestra en la figura D.1. En este caso la función  $V(r)$  es simplemente una parábola con mínimo en  $r = l_o$ .

Cuando el vector  $V(\vec{r})$  pertenece a un espacio de 2 ó 3 dimensiones la visualización gráfica de  $V(\vec{r})$  se complica. En estos casos, más que graficar los valores de  $V(\vec{r})$  directamente, se recurre típicamente a graficar la ubicación de todos los puntos que tienen el mismo valor de  $V$ , que corresponden a iso-líneas de  $V$  (cuando  $\vec{r}$  tiene 2 dimensiones) e iso-superficies de  $V$  (cuando  $\vec{r}$  vive en 3-D). En efecto, la exigencia de tener  $V = V_o$  constante en D.1 se traduce en la ecuación

$$V(\vec{r}) = V_o \tag{D.2}$$

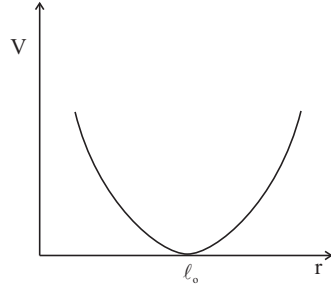


Figura D.1: Gráfico de  $V(r)$  para caso de espacio unidimensional.

la cual introduce una restricción sobre los vectores  $\vec{r}$ , los que ya no son cualquier punto del espacio, sino que sus grados de libertad fueron reducidos en 1 por la restricción D.2. Por lo tanto si  $\vec{r}$  es un vector en 3-D, D.2 es una ecuación para la superficie conformada por todos los puntos del espacio en los que  $V(\vec{r}) = V_o$ . Asimismo, si  $\vec{r}$  es un vector en 2-D, entonces D.2 es una ecuación para la curva conformada por todos los puntos del plano en los que  $V(\vec{r}) = V_o$ . En nuestro ejemplo particular (D.1) la restricción D.2 es

$$\frac{1}{2}k(r - l_o)^2 = V_o, \quad (\text{D.3})$$

que me entrega la ecuación de todos los puntos del espacio en los que  $V = V_o$ . Si el espacio que estamos considerando es 2-D, las isolíneas descritas por D.3 son circunferencias de radio

$$r = l_o \pm \sqrt{2V_o/k}. \quad (\text{D.4})$$

La visualización gráfica de estas isolíneas se esquematiza en la figura D.2. Generalmente es conveniente, además de graficar la forma de las isolíneas, marcar hacia dónde crecen o disminuyen los valores de  $V$ . Por otro lado, si el espacio que estábamos considerando era 3-D, entonces las iso-superficies descritas por D.3 son superficies esféricas de radio descrito también por D.4.

El ejemplo anterior tenía la particularidad de que el campo escalar considerado dependía sólo de  $r$  y no de la(s) otra(s) coordenada(s) espaciales (por ejemplo,  $\theta$ ). Otros

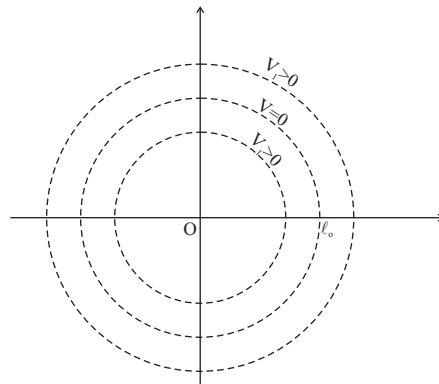


Figura D.2: Isolíneas de  $V(\vec{r})$  dada por D.1 en espacio 2-D (plano).

campos escalares podrían ser más esotéricos, por ejemplo

$$V_1(\vec{r}) = Ax + Bz, \quad (\text{D.5})$$

$$V_2(\vec{r}) = Ar \sin \theta, \quad (\text{D.6})$$

$$V_3(\vec{r}) = Ar \sin(4\theta), \quad (\text{D.7})$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. Se deja propuesto esquematizar las isolíneas correspondientes a  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$ .

## D.2. Derivadas Parciales

Al escribir  $V(\vec{r})$  estamos diciendo que los valores de  $V$  dependen de la posición del vector  $\vec{r}$ . Si este último es descrito en coordenadas cartesianas, entonces  $V(x, y, z)$ , mientras que si estamos usando coordenadas esféricas podemos considerar que  $V(r, \theta, \phi)$ . Enfatizemos que aunque el campo escalar es el mismo, su expresión matemática cambia según el sistema de coordenadas elegido para describir los puntos del espacio. Por ejemplo, el mismo campo  $V_2$  de la sección anterior podría expresarse en función de coordenadas cartesianas en vez de polares (propuesto).

En cualquier caso,  $V$  es entonces una función escalar de varias variables independientes. Por ejemplo, describiendo el espacio con coordenadas cartesianas se tiene

$$V(x, y, z).$$

Se definen las derivadas parciales de  $V$  como las derivadas obtenidas cuando sólo una de las variables independientes cambia, manteniéndose todas las demás constantes. Por ejemplo la derivada parcial con respecto a  $x$  sería

$$\frac{\partial V}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (\text{D.8})$$

Se pueden definir derivadas parciales con respecto a todas las variables independientes de las que dependa  $V$ . Por ejemplo si usamos coordenadas esféricas podríamos tener la derivada parcial con respecto al ángulo cenital,  $\theta$ :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} \equiv \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{V(r, \theta + \Delta \theta, \phi) - V(r, \theta, \phi)}{\Delta \theta}. \quad (\text{D.9})$$

Las derivadas parciales indican cómo cambia la función  $V$  si cambia sólo una de las variables independientes que la definen, manteniendo las demás constantes. Qué pasa si en cierto caso cambian varias o todas ellas? Supongamos que conocemos  $V(x, y, z)$  y deseo calcular el cambio  $dV$  de la función  $V$  asociado a cambios  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  en sus variables independientes. Las derivadas parciales me permiten calcular este cambio en la forma

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz. \quad (\text{D.10})$$

Análogamente, en coordenadas polares el cambio  $dV$  de la función  $V(r, \theta)$  asociado a cambios  $dr$  y  $d\theta$  se puede calcular como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta. \quad (\text{D.11})$$

### D.3. El Operador Gradiente

Se define el operador diferencial gradiente de  $V$ , denotado por  $\vec{\nabla}V$ , tal que los cambios de la función  $V$  que ocurren cuando nos movemos en el espacio un cierto desplazamiento  $d\vec{r}$  puedan calcularse como

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r}. \quad (\text{D.12})$$

En coordenadas cartesianas donde el vector  $d\vec{r}$  tiene la forma genérica

$$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \quad (\text{D.13})$$

las ecuaciones D.10 y D.12 son consistentes entre sí en la medida que  $\vec{\nabla}V$  se calcule como

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}, \quad (\text{D.14})$$

lo cual es simple de verificar (hacer (D.14)·(D.13) y obtener D.10).

Al usar coordenadas polares para describir el espacio, el vector  $d\vec{r}$  tiene la forma genérica

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} \quad (\text{D.15})$$

por lo que las ecuaciones D.11 y D.12 son consistentes entre sí en la medida que  $\vec{\nabla}V$  se calcule como

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} \quad (\text{D.16})$$

lo cual también es simple de verificar (hacer (D.16)·(D.15) y obtener D.11). Por lo tanto, si bien  $\vec{\nabla}V$  conceptualmente sólo depende de la forma del campo  $V(\vec{r})$ , su regla de cálculo depende del sistema coordenado con que se está describiendo el espacio.

El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial (asocia un vector a cada punto del espacio) que tiene un significado físico muy concreto. En efecto, reescribamos la ecuación que lo define

$$dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla}V| |d\vec{r}| \cos \alpha, \quad (\text{D.17})$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre  $d\vec{r}$  y  $\vec{\nabla}V$ . Podemos ver que en un punto dado los cambios  $dV$  que tiene la función  $V$  al desplazarnos un cierto  $d\vec{r}$  dependen fuertemente de la dirección entre  $d\vec{r}$  y el gradiente  $\vec{\nabla}V$  (es decir del  $\cos \alpha$ ). Los máximos valores de  $dV$  se obtendrán cuando nos desplazamos en la misma dirección y sentido del gradiente  $\vec{\nabla}V$ , mientras que si nos desplazamos en una dirección perpendicular al gradiente la función  $V$  no cambia su valor ( $dV = 0$ ). De aquí que se diga que el gradiente de un campo escalar apunta en la dirección de máximo aumento o crecimiento de éste. Alternativamente, podemos esquematizar gráficamente el campo vectorial definido por  $\vec{\nabla}V$  como un campo de vectores que son perpendiculares a las isolíneas del campo  $V$  y que apuntan en la dirección de aumento de  $V$  (ver Figura D.3).

#### D.3.1. El Operador Rotor

El operador rotor es otro operador diferencial pero que se aplica sobre campos vectoriales, por lo que aquí lo aplicaremos al campo vectorial definido por  $\vec{\nabla}V$ . El rotor de un campo vectorial trata de describir la rotación que el campo vectorial presenta. Dejaremos su definición para el curso respectivo, y pondremos aquí sólo sus reglas de cálculo.

Consideramos un campo vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$  descrito en coordenadas cartesianas en la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}, \quad (\text{D.18})$$

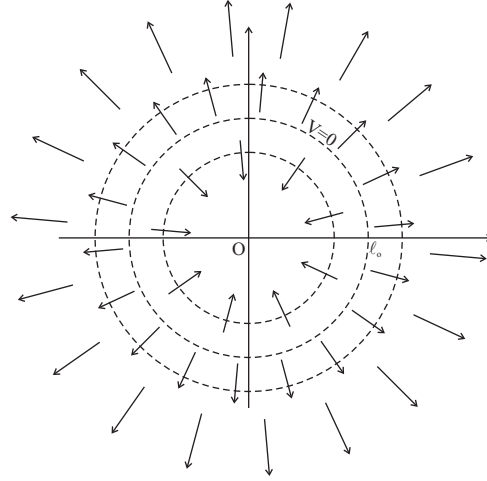


Figura D.3: Campo vectorial  $\vec{\nabla}V$  correspondiente al caso de la Figura D.2.

donde  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  son las componentes cartesianas de  $\vec{F}$ , las que son a su vez campos escalares. El rotor de  $\vec{F}$  en coordenadas cartesianas se calcula como

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (\text{D.19})$$

Para un campo vectorial plano ( $F_z = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ), su rotor se reduce a

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (\text{D.20})$$

Enfaticemos que D.19 o D.20 indican la regla de cálculo del rotor de  $\vec{F}$  sólo cuando describimos el espacio con coordenadas cartesianas. Si el espacio plano lo describimos en coordenadas polares y el campo vectorial lo descomponemos en sus partes radial y tangencial en la forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}, \quad (\text{D.21})$$

entonces el operador rotor se debe calcular como

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{k}. \quad (\text{D.22})$$

Cuando el campo vectorial considerado es el que resulta de aplicar el operador gradiente sobre un campo escalar,  $V(\vec{r})$ , se puede demostrar que su rotor es siempre cero, es decir,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}V) = 0, \quad (\text{D.23})$$

lo que se demuestra combinando D.14 en D.19, o bien, D.16 en D.22 (propuesto).