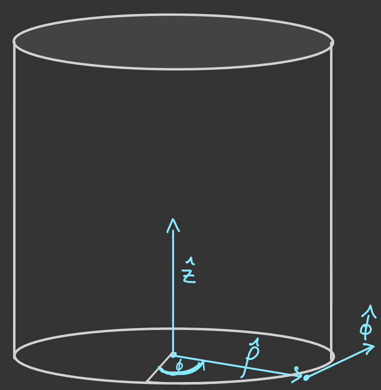
# Cinemática

## • Cilíndricas. $(\hat\rho, \hat\phi, \hat k)$

(radio $\rho$ ; azimutal $\hat\phi$ ; altura $\hat k$)



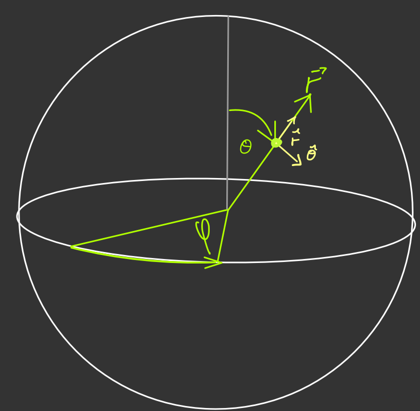

$$\vec\rho = \rho\hat\rho + z\hat k$$

$$\vec v = \dot\rho\hat\rho + \rho\dot\phi\hat\phi + \dot z\hat k$$

$$\vec a = (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\hat\rho + (2\dot\rho\dot\phi + \rho\ddot\phi)\hat\phi + \ddot z\hat k$$

## • Esféricas $(\hat r, \hat\theta, \hat\varphi)$.

(radio $\hat r$ ; inclinación $\hat\theta$ ; azimutal $\hat\varphi$)




$$\vec r = r\hat r$$

$$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta + r\dot\varphi\sin\theta\,\hat\varphi$$

$$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\theta)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\hat\theta + (r\ddot\varphi\sin\theta + 2\dot r\dot\varphi\sin\theta + 2r\dot\varphi\dot\theta\cos\theta)\hat\varphi$$

$$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\theta)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta)\hat\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{d(r^2\dot\varphi\sin^2\theta)}{dt}\hat\varphi$$

A veces conviene más usar esa forma.

## • Intrínsecas $(\hat t, \hat n, \hat b)$.

$$\vec v = v\hat t$$

$$\vec a = \dot v\hat t + \frac{v^2}{\rho_c}\hat n \qquad \text{con } \rho_c = \frac{v^3}{\|\vec v \times \vec a\|} = \frac{v^2}{\|\hat t \times \vec a\|}$$

## • Radio de curvatura:

$$\rho_c = \frac{V^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|} = \frac{V^2}{\|\hat{t} \times \vec{a}\|} \quad \wedge \quad V = \|\vec{V}\|$$

### Pasos

1.- Calcular $\vec{v}$ y $\vec{a}$.
2.- Calcular $\|\vec{v}\|$
3.- Sacar $\vec{v} \times \vec{a}$

↳ El producto cruz.

Para efectos del curso, podemos escribir el producto cruz de dos vectores como el "determinante simbólico de tercer orden" (ulalá señor DIM)

En español: Si estamos en el sistema coordenado $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3 \\ \vec{b} &= b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3 \end{aligned}\right\} \text{2 vectores cualquiera.}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{fila 1 : Aquí los vectores dirección (el orden importa)} \\ \rightarrow \text{fila 2 : Componentes de } \vec{a} \\ \rightarrow \text{fila 3 : Componentes de } \vec{b} \end{array}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3}$$

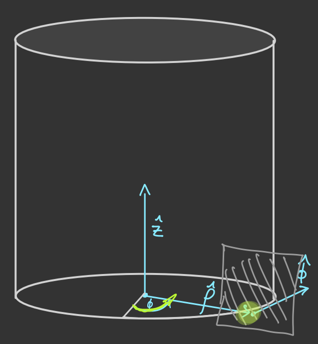
$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ podrían ser $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ o $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ o $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$, etc, etc.

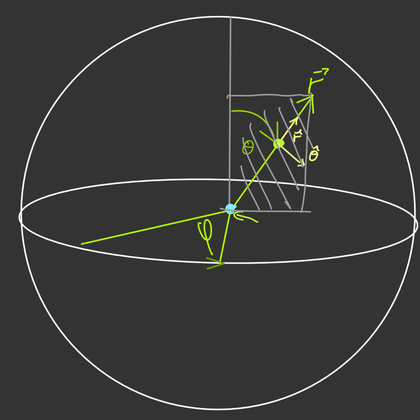
4.- Sacar $\|\vec{v} \times \vec{a}\|$

5.- Evaluar $\rho_c = \dfrac{V^3}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$

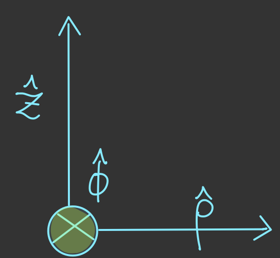
## Cilíndricas $(\rho, \phi, z)$

## Esféricas $(r, \theta, \varphi)$

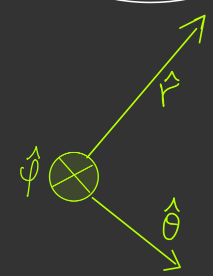


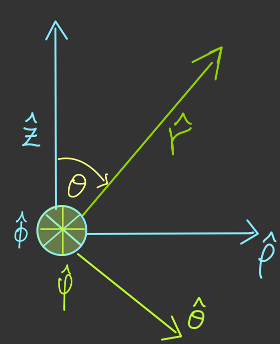


— Vista General —

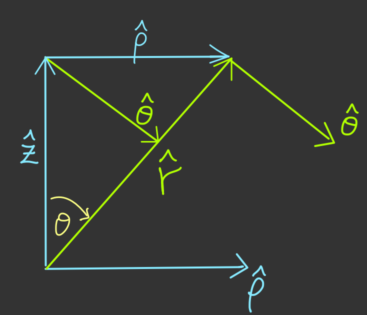



— Vista en un plano —




$\Longrightarrow$

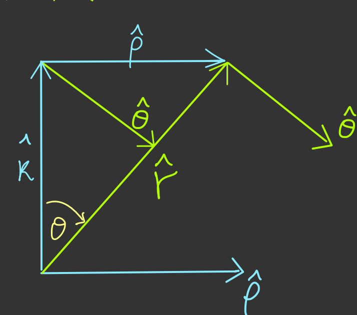



- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}) \longrightarrow$ Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$

$$\hat{\rho} = \sin\theta\, \hat{r} + \cos\theta\, \hat{\theta}$$

$$\hat{\phi} = \hat{\varphi}$$

$$\hat{k} = \cos\theta\, \hat{r} - \sin\theta\, \hat{\theta}$$

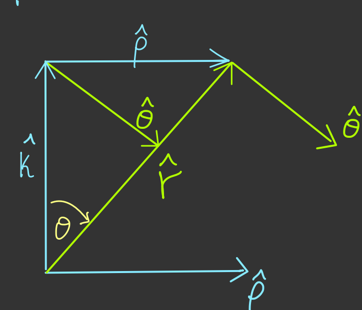



- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}) \longrightarrow$ Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$

$$\hat{r} = \sin\theta\, \hat{\rho} + \cos\theta\, \hat{k}$$

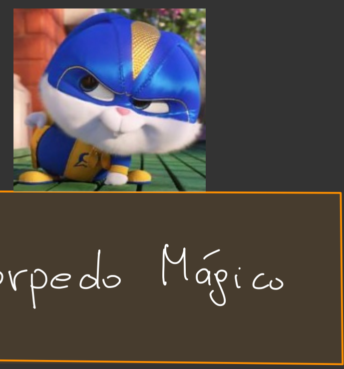
$$\hat{\theta} = \cos\theta\, \hat{\rho} - \sin\theta\, \hat{k}$$

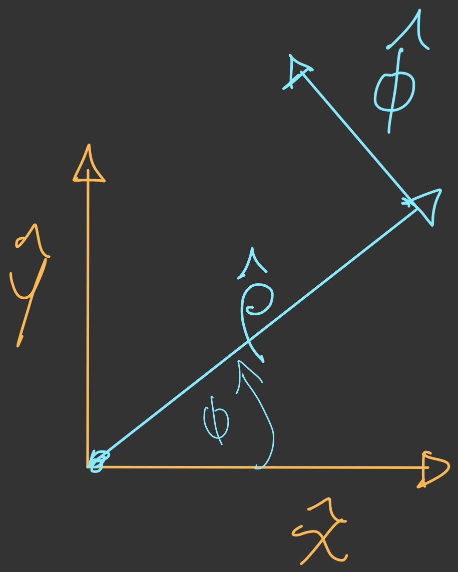
$$\hat{\varphi} = \hat{\phi}$$



- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \longrightarrow$ Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$

$$\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}$$
$$\hat{y} = \operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$$
$$\hat{z} = \hat{k}$$



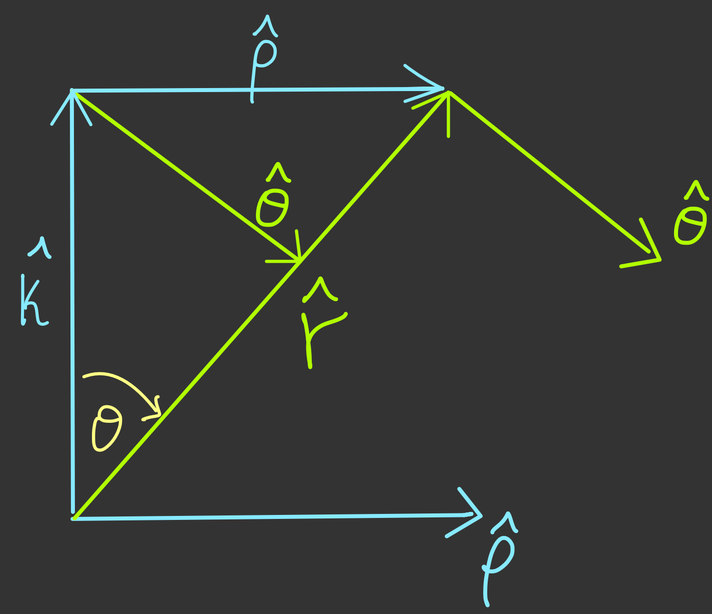
- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}) \longrightarrow$ Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$$\hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{y}$$
$$\hat{\phi} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$
$$\hat{k} = \hat{z}.$$

---

- Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k}) \longrightarrow$ Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$

$$\hat{\rho} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$$
$$\hat{\phi} = \hat{\varphi}$$
$$\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$



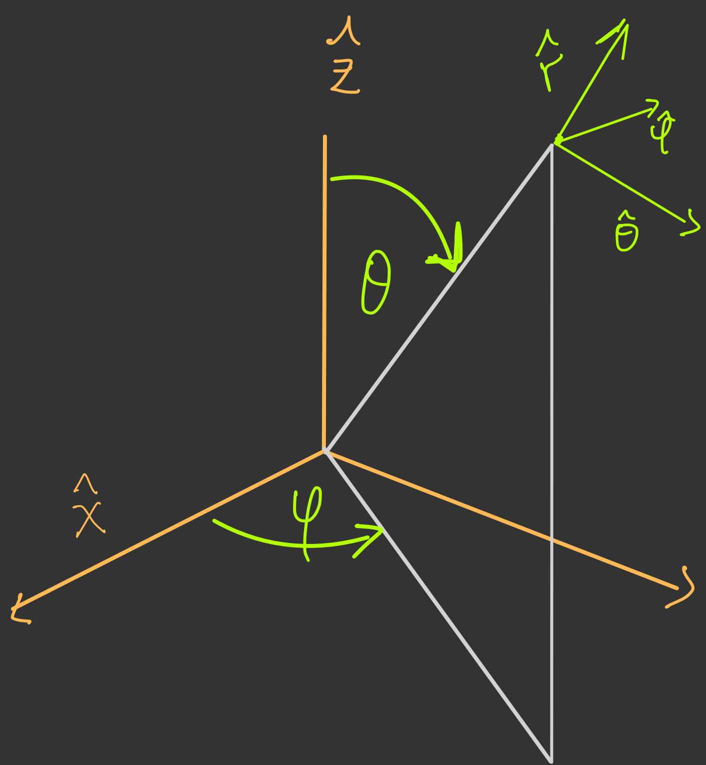
- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}) \longrightarrow$ Cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$

$$\hat{r} = \sin\theta\,\hat{\rho} + \cos\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{\rho} - \sin\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{\varphi} = \hat{\phi}$$

---

- Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}) \longrightarrow$ Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$$\hat{r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\,\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\,\hat{y} + \cos(\theta)\,\hat{z}$$
$$\hat{\theta} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\,\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\,\hat{y} - \sin(\theta)\,\hat{z}$$
$$\hat{\varphi} = -\sin(\varphi)\,\hat{x} + \cos(\varphi)\,\hat{y}$$



- Cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \longrightarrow$ Esféricas $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$

$$\hat{x} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\theta} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$$
$$\hat{y} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{r} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\theta} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$$
$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

# Dinámica

## Cómo abordar ejercicios

**1.- Cinemática:** Describir el movimiento de la partícula

- Elegir un sistema de coordenadas con su origen respectivo
- Calcular los vectores $\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$.

**2.- Dinámica:**

- Hacer un DCL
- Anotar las fuerzas externas $\sum \vec{F}_{ext}$.
- Aplicar la 2da ley de Newton diciendo $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}(t)$
  Con $\vec{a}(t)$ siendo la que sacamos en el paso 1.

**3.- Escribir las ecuaciones de movimiento escalares:**

- Esto es separar la ecuación de $\vec{F} = m \cdot \vec{a}(t)$ en cada eje coordenado, quedando solo las componentes escalares.

**4.- Desarrollar el ejercicio:**

antes de este paso no suelen usarse.

- Aquí recién hacemos la EDO.
- Aquí usamos las condiciones iniciales para integrar la EDO.

## Casos (para cada ecuación escalar)

con A una constante cualquiera

1.- $m\ddot{x} = F_0$

2.- $m\ddot{x} = F(t)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}}$ ⇝ ejemplo:

3.- $m\ddot{x} = F(\dot{x})$

$$\ddot{x} = A \longrightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} \longrightarrow d\dot{x} = A\,dt \rightsquigarrow \dot{x} - \dot{x}_0 = A(t - t_0)$$

$$\ddot{x} = At \longrightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = t \longrightarrow d\dot{x} = At\,dt \rightsquigarrow \dot{x} - \dot{x}_0 = A\frac{t^2}{2}$$

$$\ddot{x} = A\dot{x} \longrightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = A\dot{x} \longrightarrow \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = A\,dt \rightsquigarrow \ln\left(\frac{\dot{x}}{\dot{x}_0}\right) = A(t - t_0)$$

4.- $m\ddot{x} = F(x)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx}}$ ⇝ ejemplo: $\ddot{x} = Ax \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = Ax \longrightarrow d(\dot{x}^2) = 2Ax\,dx$

$$\frac{\dot{x}^2}{2}\Big| = A\frac{x^2}{2}\Big|$$

Son equivalentes

$\boxed{\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}}$ ⇝ ejemplo: $\ddot{x} = Ax \longrightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = Ax \longrightarrow \dot{x}\,d\dot{x} = Ax\,dx$


## Cuidado!

$$\cancel{\int_0^\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\cos\theta} \longrightarrow \int_0^\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\cos\theta + 1$$

$$\cancel{\int_0^t e^{At} = A e^{t}} \longrightarrow \int_0^t e^{At} = A\left(e^{t} - 1\right)$$