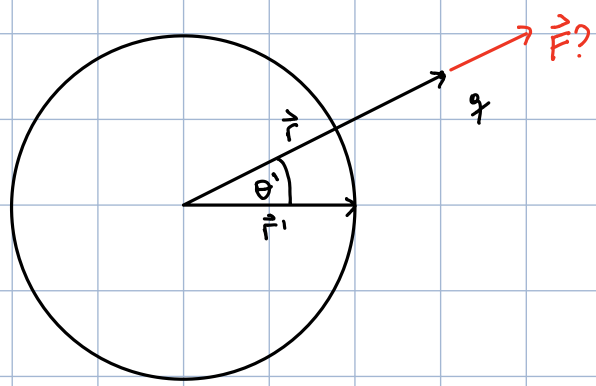
P_1

Queremos calcular la fuerza que experimenta una carga q, debido a un casquete esférico con densidad de carga σ



Para calcular $\vec{F}$ usamos el principio de superposición y la ley de Coulomb. La ley de Coulomb nos dice que la fuerza ejercida por un diferencial de carga dq es:

$$d\vec{F} = \frac{q \cdot dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Luego, el principio de superposición nos dice que la fuerza total la obtenemos sumando los $d\vec{F}$

para una distribución superficial

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \int d\vec{F} = q\int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = q\int \frac{\sigma\, ds'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Ahora, para calcular esta integral, definimos a $\vec{r}\,'$ como un vector en esféricas con θ' el ángulo respecto a $\vec{r}$, como se muestra en el dibujo. Entonces $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{r}\,' = r'\sin\theta'\,(\hat{\theta}\cos\phi' + \hat{\phi}\sin\theta') + r'\cos\theta'\,\hat{r}$ y

$ds' = r'^2 \sin\theta'\, d\phi'\, d\theta'$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{q\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\hat{r} - r'\sin\theta'\left(\hat{\theta}\cos\phi' + \hat{\phi}\sin\theta'\right) - r'\cos\theta'\hat{r}}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'\right)^{3/2}}\, r'^2 \sin\theta'\, d\phi'\, d\theta'$$

Como $\int_0^{2\pi}\cos\phi'\, d\phi' = \int_0^{2\pi}\sin\phi'\, d\phi' = 0$, al integrar en ϕ' esto se simplifica

$$\vec{F} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi} \frac{(r - r'\cos\theta')\,\hat{r}\cdot r'^2\sin\theta'\, d\theta'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'\right)^{3/2}}$$

Esta es una integral dificil de resolver. Una forma es mediante los cambios de variable $u = -\cos\theta'$ y $v = r^2 + r'^2 + 2rr'u$ lo cual da para harta matraca. Otra forma es notando que:

$$\frac{(r - r'\cos\theta')\sin\theta'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'\right)^{3/2}} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{r' - r\cos\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r'^2\hat{r}}{r^2}\left.\frac{r' - r\cos\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}}\right|_0^{\pi} = \frac{\sigma r'^2\hat{r}}{2\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{r + r'}{|r + r'|} - \frac{r' - r}{|r' - r|}\right)$$

Aquí vemos 2 casos posibles. Si $r < r'$ entonces $|r - r'| = r' - r$ y el parentesis se cancela, dando $\vec{F} = 0$ para una carga dentro de la esfera. Por otro lado, para $r > r'$ el resultado sería:

$\vec{F} = \frac{qQ\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ con $Q = 4\pi\sigma r'^2$ la carga total en la esfera, es decir, una esfera genera una fuerza como la de una carga puntual.

Este resultado lo podemos expandir a una esfera rellena con una densidad de carga volumetrica ρ y radio R. Para hacerlo, solo debemos pensar

A la esfera rellena como una suma de cascarones de radio $r' \in [0,R]$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{esfera} = \int \vec{F}_{cascarón}\, dr'$$

En el caso $r > R$, todos los cascarones contribuyen y la fuerza sería

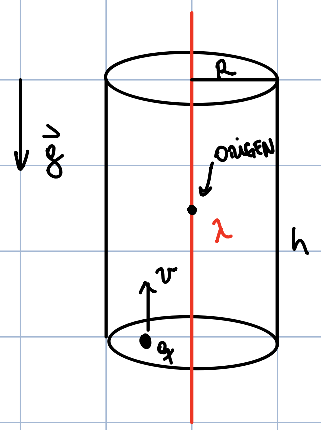
$$\vec{F}_{esfera} = \int_0^R \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi\rho r'^2 dr' = \frac{qQ\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{con} \qquad Q = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

Lo cual da un resultado muy esperable. Por otro lado, para $r < R$ solo contribuyen los cascarones más chicos que r.

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{esfera} = \int_0^r \frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi\rho r'^2 dr' = \frac{q\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

P2

Buscamos la condición para que las partículas cargadas no escapen de la chimenea. Para ello debemos resolver la ecuación de movimiento de las cargas en presencia del filamento cargado con carga λ negativa



El sistema lo trabajamos en coordenadas cilíndricas y calculamos la fuerza que experimenta la carga en la posición $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$ arbitraria

$$\vec{F}(r,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dq = \frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{\overset{\text{largo del filamento}}{L/2}} \frac{r\hat{r} + (z-z')\hat{z}}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}}dz'$$

Esta fuerza tiene componente en $\hat{r}$ y $\hat{z}$ además de depender de r y z, lo cual hará muy difícil resolver las ecuaciones de movimiento. Para simplificar haremos algo muy típico en electromagnetismo, que se conoce como despreciar los efectos de borde. En este caso la aproximación consiste en pensar que el filamento no tiene bordes, es decir, este es infinito. La aproximación es válida en el caso $L \gg R$.

$$\Rightarrow \vec{F} \approx \frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\hat{r} + (z-z')\hat{z}}{(r^2+(z-z')^2)^{3/2}}dz' \overset{u = z'-z}{=} \frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r\hat{r} - u\hat{z}}{(r^2+u^2)^{3/2}}du = \frac{\lambda q\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Con esto, podemos escribir las ecuaciones de movimiento como:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F} \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -mg \quad , \quad m\ddot{r} - \cancel{mr\dot{\theta}^2}^{\,0} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

La solución para la ecuación de z es $z(t) = -\frac{h}{2} + vt - \frac{gt^2}{2}$, mientras que para r debemos aplicar un truco de mecanica.

$$m\ddot{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad / \dot{r} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r}\dot{r} - \frac{q\lambda\dot{r}}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\right) = 0$$

ENERGÍA INICIAL

$$\Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r = cte \equiv \frac{-\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\lambda q}{m\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

$-\lambda > 0$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\lambda q}{m\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right\}^{-1/2} dr = dt \quad / \int \quad \Rightarrow \quad \int \left\{\frac{-\lambda q}{m\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\right\}^{-1/2} dr = t$$

calculadora de integrales

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-\lambda q}{m\pi\varepsilon_0}}\left\{ r\sqrt{\ln\frac{r_0}{r}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} r_0 \,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\ln\frac{r_0}{r}}\right)\right\} = t$$

Error function

Esta última ecuación nos da una relación entre r y t. Lamentablemente es imposible despejar $r(t)$, pero eso no es necesariamente un problema.

La condición para que justo no escape ninguna partícula es que ni siquiera las que comienzan más alejadas del filamento escapen. Entonces en t^* donde $z(t^*) = \frac{h}{2}$ el radio debe ser r^* el radio de recolección

$$\sqrt{\frac{-\lambda q}{m\pi\varepsilon_0}}\left\{ r^*\sqrt{\ln\frac{R}{r^*}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} r_0 \,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\ln\frac{R}{r^*}}\right)\right\} = t^*$$

Como no podemos despejar no tiene mucho sentido reemplazar.