29/3/21 # Aux #2 Electro.

Esta semana estudiaron ley de Gauss con el profe.

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \qquad \text{versión diferencial}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dv \qquad \text{versión integral.}$$

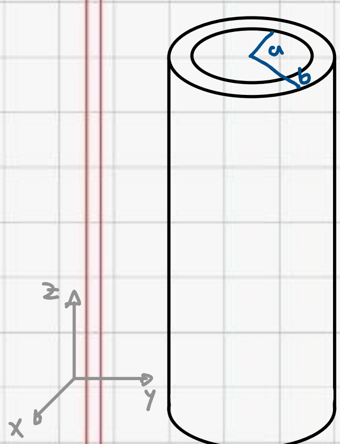
Sabemos que esta ley siempre se cumple, pero que no siempre es útil. En medida de que tengamos mas información si nos servirá (aquí entran las simetrías de problema)

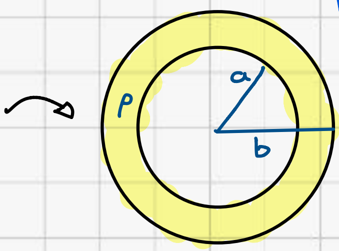
P1

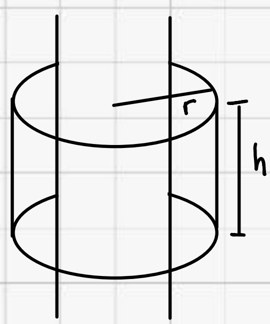
Queremos determinar el campo eléctrico en todo el espacio para la distribución del dibujo:

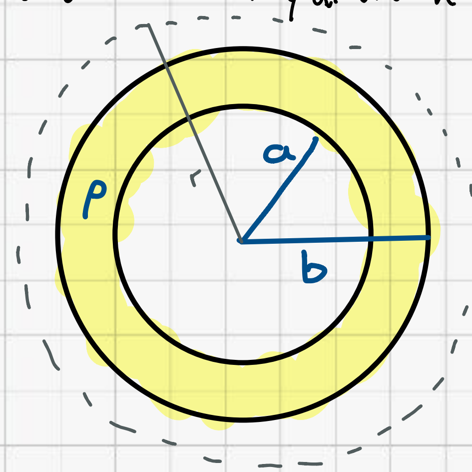
La idea de usar la ley de Gauss es argumentar en base a alguna simetría que $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{S}$. De esta forma podemos sacar $\vec{E}$ del integrando y todo es más fácil.

En este caso usaremos una superficie Gaussiana cilíndrica de radio "r" y altura "h"









De esta forma tendremos que analizar 3 casos: i) $r<a$; ii) $a<r<b$ iii) $r>b$.

Claramente usaremos coordenadas cilíndricas para parametrizar el cilindro, tal que el eje $\hat{z}$ coincida con el eje central del cilindro. Con esto podemos ya hablar del campo, este apriori debe ser de la forma:

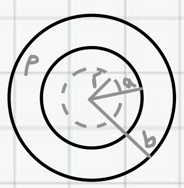
$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}$$; en palabras esto es que el campo es uno radial y que solo depende de la distancia al eje.

Así, el flujo por el manto será: $\displaystyle\int_{manto} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_0^h\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}\cdot r\,d\theta\,dz$

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = 2\pi r h\, E(r)$$

¿y la carga encerrada? para eso analizamos por casos:

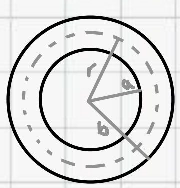
i) $r<a$, aquí la superficie no encierra ninguna carga $\Rightarrow Q_{enc}=0$, por lo que reemplazando en ley de Gauss



$$\Phi = 2\pi r h\, E(r) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = 0 \quad \text{si } 0<r<a$$

ii) $a<r<b$, Aquí la carga encerrada es una porción de la carga total. Expresado de manera integral queda:



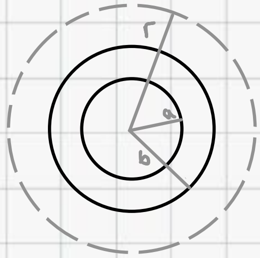
$$Q_{enc} = \int_{Vol} \rho\, dv$$; el volumen a integrar es el volumen donde está la carga, es decir entre los cilindros de radio "a" y "r", y los planos $z=0$ y $z=h$

$$Q_{enc} = \int_0^{2\pi}\int_a^r\int_0^h \rho\, r'\,dz\,dr'\,d\theta = \cancel{2}\pi h \rho \left.\frac{r'^2}{\cancel{2}}\right|_a^r = \pi h \rho (r^2-a^2)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = 2\pi h r\, E(r) = \frac{\pi h \rho (r^2-a^2)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{(r^2-a^2)}{r} \quad \text{si } a<r<b$$

iii) $r>b$, aquí encerramos la siguiente porción de carga:



$$Q(r)=\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_0^h \rho r\,dz\,dr\,d\theta=\pi\rho h(b^2-a^2)$$

$$\Rightarrow\quad E(r)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{(b^2-a^2)}{r^2}\quad \text{si } r>b.$$

Notar que solo integramos en el volumen donde realmente está la carga, el espacio entre b y r no tiene carga por lo que no aporta al igual que el espacio entre 0 y a.

P2)

Para este problema la idea es la misma que en el anterior pero con más partes y otra geometría. Primero notemos que la distribución de carga no me la organiza en partes muy diferentes, de hecho depende de la distancia al radio y nada más. Entre más cercano al centro, más carga. Lo bueno de esto es que no me rompe la simetría esférica, por lo que podremos usar ley de Gauss igualmente.

Calculemos la carga total:

a) $$Q=\iiint\rho(r)\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$; a veces al diferencial $\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ se le dice "ángulo sólido" $d\Omega$ para abreviar.

$$Q=4\pi\rho_0\int_0^R\left(r^2-\frac{r^4}{R^2}\right)dr=4\pi\rho_0\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^{\cancel{5}\,3}}{5\cancel{R^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{Q=\frac{8\pi\rho_0}{15}R^3}$$

b) Ahora, usando que el campo posee simetría esférica sabemos que, con un sist. de coordenadas esférico centrado al centro del átomo, tiene la siguiente forma:

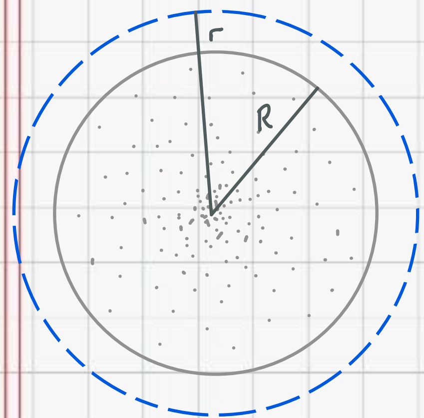
$$\vec{E}(\vec{r})=E(r)\hat{r}.$$

por lo que cualquier flujo por una superficie gaussiana esférica de radio r será:

$$\iint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}E(r)r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\underbrace{4\pi r^2}_{\text{área de la esfera}}E(r)$$

Ahora, tenemos que ponernos en casos:

i) $r \geq R$



calculado en a)

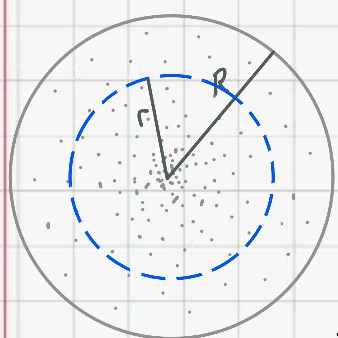
$$\Phi_E = \cancel{4\pi} r^2 E(r) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\cancel{8\pi}^{\,2}\rho_0}{15\varepsilon_0} R^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_T}{r^2}\hat{r}$$

una partícula puntual.

encerramos solo una porción de la carga.

ii) $r < R$



$$\Phi_E = 4\pi r^2 E(r) \overset{?}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho_0\left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) r'^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^{r}\left(r'^2 - \frac{r'^4}{R^2}\right) dr = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right)$$

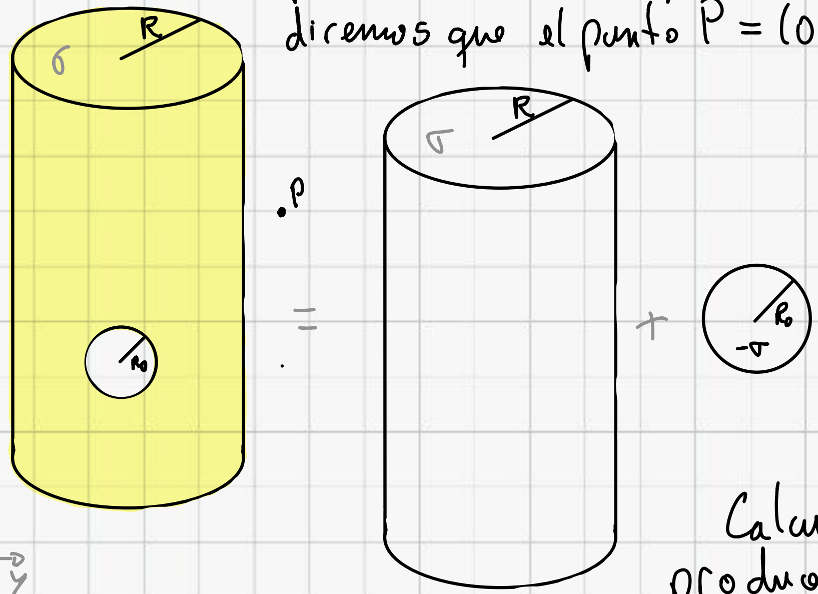
Solo cambiaron los límites de integración. La integral es igual.

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right)\hat{r}$$

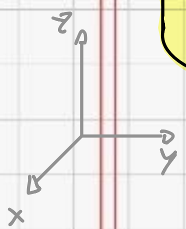
Al final la herramienta de la ley de Gauss tiene por dificultad 2 cosas, identificar las simetrías e integrar bien la carga encerrada.

P3)

Este problema es bueno pensarlo como uno por superposición. Además diremos que el punto $P = (0, \rho, h)$ en cartesianos



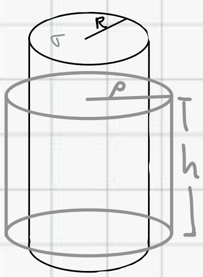
O sea, un cilindro infinito normal con densidad de carga σ superpuesto con una esfera centrada en el origen con densidad de carga uniforme $-\sigma$.



Calculemos los campos que producen usando Gauss.

Cilindro:

Al igual que en el problema 1 usando un tambor gaussiano de altura h y radio ρ



Asumimos simetría cilíndrica $\vec{E}(\rho) = E(\rho)\hat{r}$

$$\Rightarrow \Phi_E = \iint E(\rho)\,\rho\, d\theta\, dz = 2\pi\rho h\, E(\rho) = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2 h}{2} \Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 \rho}\hat{r}$$

Escrito de manera conveniente: $\vec{E}_1(\rho) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0\rho}\hat{y}$ Solo lo puse en cartesianos con mi sistema coordenado.

Esfera:

Bueno el campo de la esfera ya lo sabemos: $\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$; aquí $Q = -\frac{4}{3}\pi R_0^3 \sigma$
y usaremos una manera mas útil del campo:

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} r\hat{r} = \frac{Q\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^3} \text{ ; donde } \vec{r} = (0, \rho, h)$$

reemplazamos:

$$\vec{E}_2 = -\sigma \frac{\cancel{4}}{3}\pi R_0^3 \cdot \frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho\hat{y} + h\hat{z}}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} = \frac{-\sigma R_0^3}{3\varepsilon_0} \frac{\rho\hat{y} + h\hat{z}}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \quad //$$

Finalmente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2\rho}\hat{y} - \frac{R_0^3}{3} \frac{\rho\hat{y} + h\hat{z}}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \right) \quad //$$