26/4/21 # Aux #5 Electro.

La semana pasada vieron con el profe fuerzas entre condensadores y dieléctricos.

Vector polarización: $\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ densidad de momento dipolar en un volumen

Densidades de carga polarizante (o ligada)

1) Superficial: $\sigma_b = \vec{P}\Big|_{borde} \cdot \hat{n}$

2) Volumetrica: $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$

Vector desplazamiento: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$; en medios lineales $\vec{D} = \varepsilon(\vec{r}')\vec{E}$

↳ conllevа a una ley de Gauss

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_\ell}$$

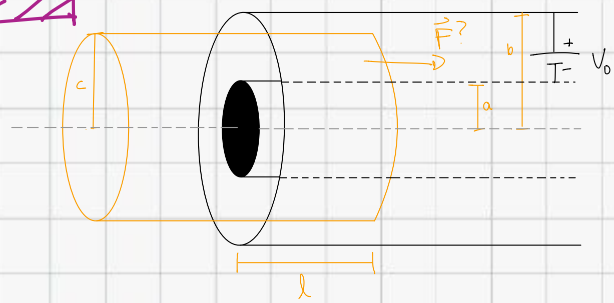
con ρ_ℓ la densidad de carga volumetrica libre en el medio

Ec. constitutivas del medio $\Rightarrow$ $\vec{P} = \underbrace{\chi_e}_{\text{susceptibilidad del medio}} \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$

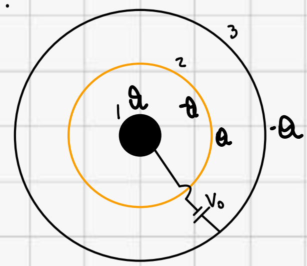
$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \underbrace{\varepsilon}_{\text{permitividad del medio.}} \vec{E}$$

$$= \underbrace{\kappa}_{\text{constante dieléctrica.}} \varepsilon_0 \vec{E}$$

P1



Podemos pensar esto como 2 sistemas de conductores, calculemos la energía que almacenan. Para esto enumeremos los conductores:



Para simplificarme la vida en este problema diré que el conductor 1 tiene carga Q. Por lo que el campo eléctrico para $a<r<b$:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi z r \varepsilon_0}\hat{r}$$; asumiendo simetría axial + un tambor gaussiano de radio r y "altura" z.

Con esto (sin considerar el condensador 2) la diferencia de potenciales:

$$\Delta V_{13} = V_1 - V_3 \overset{\text{enunciado}}{=} V_0 = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{-Q}{2\pi z \varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi z \varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = V_0$$

De esta forma Q era simplemente $Q = \frac{2\pi z \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} V_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\hat{r}$ //

¿Cuanto es la diferencia de potencial entre 1 y 2?

$$\Delta V_{ac} = V(c) - V(a) = -\int_c^a \frac{V_0}{r\ln\left(\frac{b}{a}\right)}dr = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ln\left(\frac{c}{a}\right)$$ // por lo que la capacitancia da:

$$C_{ac} = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\frac{2\pi\varepsilon_0 z}{\cancel{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}\cancel{V_0}}{\frac{\cancel{V_0}}{\cancel{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}\ln\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 z}{\ln\left(\frac{c}{a}\right)}$$ //

Para el caso $c<r<b$ es lo mismo ya que la carga por la superficie exterior es Q por la neutralidad del conductor. Así, la dif. de potencial y la capacitancia quedan:

$$\Delta V_{cb} = V(b) - V(c) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ln\left(\frac{b}{c}\right) \quad ; \quad C_{bc} = \frac{2\pi z \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}$$ //

La energía almacenada por el sistema de condensadores tiene que ser:

$$W = \frac{1}{2}\sum Q_i \Delta V_i = \frac{1}{2}\sum C_i \Delta V_i^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}\pi\varepsilon_0 z}{\cancel{\ln\left(\frac{c}{a}\right)}}\left(\frac{V_0 \ln\left(\frac{c}{a}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2 + \frac{\cancel{2}\pi\varepsilon_0 z}{\cancel{\ln\left(\frac{b}{c}\right)}}\left(\frac{V_0 \ln\left(\frac{b}{c}\right)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right)^2\right]$$

$$W = \frac{\pi\varepsilon_0 z V_0^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\ln \cancel{c} - \ln a + \ln b - \ln \cancel{c}\right] = \frac{\pi\varepsilon_0 z V_0^2}{\ln^{\cancel{2}}\left(\frac{b}{a}\right)}\cancel{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\pi\varepsilon_0 z V_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} //$$

Como estamos a ΔV cte la fuerza eléctrica será:

$$\vec{F}_{elec} = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} //$$

dimensiones: $\left[\varepsilon_0 V_0^2\right] = \left[\frac{\cancel{C^2}}{\cancel{Nm^2}} \cdot \frac{\cancel{N^2}\cancel{m^2}}{\cancel{C^2}}\right] = [N]$ ✓//

P2) Aquí es llegar y usar formulas uwu, recordemos que la densidad de carga volumetrica de polarización es:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -2ax$$

Ahora, tenemos un lío con la superficial ¨n tenemos que analizar 3 superficies.

i) La cara $x = L$ que tiene $\hat{n} = \hat{\imath} \Rightarrow \sigma_{b,1} = aL^2 + b$; recordar evaluar $\vec{P}$ en el borde donde estamos calculando.

ii) La cara $x = 0$ que tiene $\hat{n} = -\hat{\imath} \Rightarrow \sigma_{b,2} = -b$

iii) el manto de la varilla con $\hat{n} = \hat{r}$, como $\vec{P}$ solo tiene componente en $\hat{\imath}$ en esta disposición del sistema $\vec{P}$ siempre es ortogonal a $\hat{r}$, por lo que $\sigma_{b,3} = \vec{P}\big|_{manto} \cdot \hat{r} = 0 //$

Con esto, la carga total ligada (o de polarización) es:

$$Q_b = \int_V \rho_b \, d\tau + \int_S \sigma_b \, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{r}\int_0^{L} \rho_b(x)\, dx\, dr\, d\theta + \sigma_{b,1} \cdot A + \sigma_{b,2} \cdot A$$

$$Q_b = A\left(-\int_0^L 2ax\, dx + (aL^2 + b) - b\right) = A\left(-aL^2 + aL^2 + b - b\right) = 0 //$$

P3b) Tenemos suerte de que la carga se encuentra justo en el centro de la cavidad ya que esto implica simetría esférica para los campos:

$$\vec{E} = E(r)\hat{r} \quad \wedge \quad \vec{D} = D(r)\hat{r}$$

Usando Gauss en la cavidad con el vector desplazamiento, como q es la única carga libre, tenemos que:

$$4\pi r^2 D(r) = q \Rightarrow \boxed{D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}} \quad \forall r > 0.$$

El campo eléctrico es un poco diferente. En $0<r<a$ tenemos:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$ Ya que la cavidad solo tiene vacío como medio

Para $a<r<\infty$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi K\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Como la cavidad tiene vacío $\vec{P}$ es 0 dentro de ella. Para el dieléctrico $\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(K-1)\vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = P(r)\hat{r} = \frac{K-1}{4\pi K}\cdot\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

Ya con el vector polarización es posible calcular muchas más cositas uwu

Veamos las densidades volumetrias ligadas:

$$\rho_b = -\nabla\cdot\vec{P} = \begin{cases} 0 & ;\ \text{si } 0<r<a \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2P_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(\frac{K-1}{4\pi K}q\right)}{\partial r} = 0 & ;\ \text{si } a<r<\infty \end{cases}$$

no hay ninguna carga volumétrica ligada.

¿y la densidad superficial?

$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{\underset{\text{borde}}{r=a}} = -\vec{P}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a} = -\frac{(K-1)}{4\pi K}\cdot\frac{q}{a^2} \Rightarrow$$

Así la carga total inducida es:

$$Q_b = 4\pi a^2\sigma_b = -q\cdot\frac{K-1}{K}$$

$$\Rightarrow q + Q_b = q - q\frac{(K-1)}{K} = \frac{q}{K}$$

suma de todas las cargas en el espacio, algo así como una "carga efectiva".

P4

a) Al igual que en el problema anterior tenemos simetría esférica, por lo que haciendo Gauss tenemos que:

i) $r \leq R_1$: $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_f = 0 \Rightarrow \vec{D}=0$ y así $\vec{E}=0$ Lo que es obvio ya que tenemos un conductor xd

ii) $R_1 \leq r \leq R_2$: $\iint \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) = Q$ → es la única carga libre, las de polarización no aportan.

$$\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

iii) $r \geq R_2$: $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) = Q \Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

b) ¿Donde estarían las densidades de polarización? En los bordes ¿cuales? Veamos ambos

$$\sigma_b(R_1) = \vec{P}(R_1)\cdot\hat{n} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon R_1^2}\hat{r}\cdot(-\hat{r}) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{Q}{4\pi R_1^2} \,//$$

$$\sigma_b(R_2) = \vec{P}(R_2)\cdot\hat{n} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon R_2^2}\hat{r}\cdot\hat{r} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi R_2^2} \,//$$

¿Como saco la libre? $\vec{D}$ está relacionada a ella por Gauss, de forma directa es:

$$\sigma_f(R_1) = \vec{D}(R_1)\cdot\hat{r} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\hat{r}\cdot\hat{r} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

Creo que verán estas condiciones de borde esta semana

c) Calculemos la dif. de potencial:

$$V_1(R_1) = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}dr + \int_{R_2}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

En ausencia de dieléctrico

$$V_2(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

¿como se comparan? usando que $\varepsilon > \varepsilon_0$

dado lo anterior $\frac{1}{\varepsilon_0} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) > \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

y así concluimos que el potencial disminuye al estar en presencia de un medio dieléctrico

$$V_2(R_1) > V_1(R_1)$$