Nelson Devia 2011

Auxiliar 3 - Traveling Sales Problem

Problema del vendedor viajero y otros

Paz Montano [1] David Palacios[2]

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de Chile

Very Large Auxiliar, 2021

Table of Contents

Table of Contents

Problema de Programación Lineal - Inicio

- **Parámetros:** Datos exógenos del problema, por lo que son elementos que NO dependen de las decisiones tomadas,dado que no cambiaran.

Problema de Programación Lineal - Inicio

- **Parámetros:** Datos exógenos del problema, por lo que son elementos que NO dependen de las decisiones tomadas,dado que no cambiaran.
- **Variables de decisión:** Elementos del problema que dependen de las decisiones tomadas, y se encuentran en el enunciado cuando el narrador del problema desea tomar una decisión.

Problema de Programación Lineal - Inicio

- **Parámetros:** Datos exógenos del problema, por lo que son elementos que NO dependen de las decisiones tomadas,dado que no cambiaran.
- **Variables de decisión:** Elementos del problema que dependen de las decisiones tomadas, y se encuentran en el enunciado cuando el narrador del problema desea tomar una decisión.
- **Función objetivo:** Es la combinación de elementos que se quieren optimizar, es decir, el valor que se quiere maximizar, minimizar o sus derivados, tales como: Máx Máx, Mín Mín, Máx Mín, Mín Máx, entre otros.

Problema de Programación Lineal - Inicio

- **Parámetros:** Datos exógenos del problema, por lo que son elementos que NO dependen de las decisiones tomadas,dado que no cambiaran.
- **Variables de decisión:** Elementos del problema que dependen de las decisiones tomadas, y se encuentran en el enunciado cuando el narrador del problema desea tomar una decisión.
- **Función objetivo:** Es la combinación de elementos que se quieren optimizar, es decir, el valor que se quiere maximizar, minimizar o sus derivados, tales como: Máx Máx, Mín Mín, Máx Mín, Mín Máx, entre otros.
- **Restricciones:** Son las condiciones que deben cumplir las variables de decisión dadas por cada problema. Las restricciones definen el conjunto factible de soluciones. No olvidar: Naturaleza de variables.

Problema de Programación Lineal - Formulación

Formulación matemática:

$$\max \quad \sum_{n \in N} c_n \cdot x_n$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{n \in N, m \in M} a_{n,m} \cdot x_n \leq b_m \quad \forall n \in N, m \in M$$

Problema de Programación Lineal - Formulación

Formulación matemática:

$$\text{máx} \quad \sum_{n\in N} c_n \cdot x_n$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{n\in N, m\in M} a_{n,m} \cdot x_n \leq b_m \quad \forall n \in N, m \in M$$

Equivalente a:

$$\begin{array}{lccccc}
máx & c_1 \cdot x_1 + & c_2 \cdot x_2 + & \cdots & c_n \cdot x_n & & \\
 & a_{1,1} \cdot x_1 + & a_{1,2} \cdot x_2 + & \cdots & a_{1,n} \cdot x_1 & \leq & b_1 \\
 & a_{2,1} \cdot x_2 + & a_{2,2} \cdot x_2 + & \cdots & a_{2,n} \cdot x_2 & \leq & b_2 \\
 & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & & \\
 & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\
 & a_{m,1} \cdot x_1 + & a_{m,2} \cdot x_2 + & \cdots & a_{m,n} \cdot x_n \leq \mathrm{b}_m & & \\
 & & x_1, x_2, x_3, \cdots, & x_n & & \geq & 0
\end{array}$$

Problema de Programación Lineal - Formulación

Formulación matricial:

$$\text{máx} \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}'$$

$$\begin{array}{l} c'x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}' \geq 0$$

Problema de Programación Lineal - Min Max

Resultan Equivalentes los siguientes problemas de programación lineal:

Maximización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c'x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Minimización:

$$\begin{aligned} \min \quad & -c'x \\ -Ax &\geq -b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema de Programación Lineal - Linealidad

Función Lineal

Una function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal si $f(ax + by) = a \cdot f(x) + b \cdot f(y)$ para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $a, b \in \mathbb{R}$. f es is lineal si hay valores $a_1, \ldots, a_n$ tal que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = \sum_{i=1} a_i \cdot x_i = (a_1 a_2 \ldots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a^T x$$

Restricción Lineal

Una restricción es lineal si es de la forma

- $a^T x \leq b$
- $a^T x \geq b$
- $a^T x = b$

para un vector $a \in \mathbb{R}^n$ y un escalar $b \in \mathbb{R}$.

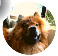
Problema de Programación Lineal - Linealidad

Programa Lineal

- Función lineal objetivo que se maximice o minimice (por ejemplo, $\text{mín} c^T x$)
- Conjunto de restricciones lineales
- Conjunto de variables continuas (por ejemplo $x \in \mathbb{R}^n$)

Tipos de Programa Lineal

- Programación lineal Entera
- Programación lineal Mixta
- Programación lineal Continua / Relajación lienal



Problema de Programación Lineal - Tipos PL

- **Problema de Programación Lineal Entera**: Es un caso particular de PPL en el que el todas las variables deben ser valores enteros.

$$\begin{array}{cl} \max & c'x \\ Ax & \leq b \\ x \in S & \subseteq \mathbb{Z}^n \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{lrrl} \min & -4x & +8y & \\ \text{s.a.} & 2x & -3y & \leq 5 \\ & x, & y & \geq 0 \\ & x, & y & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Problema de Programación Lineal - Tipos PL

- **PPL Entera con variables binarias**:

$$\begin{array}{cc} \text{máx} & c'x \\ Ax & \leq b \\ x \in \{0,1\}^n \subseteq \mathbb{Z}^n & \end{array}$$

Variables binarias: Corresponde a la representación de un factor cualitativo o un accionar, por lo que se debe utilizar una variable binaría para representar dicha variable decisión. Debe constituirse por dos valores exhaustivos, es decir, los dos niveles de la variable cubren todos los valores posibles de la variable, y no existe ningún otro resultado viable.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se cumple la condicion para } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Problema de Programación Lineal - Tipos PL

- **PPL Entera con variables binarias**:

$$\begin{array}{llllll} \min & -4x & +8y & & \\ \text{s.a.} & -3x & -7y & \leq 8 \\ & 2x & +4y & \geq 7 \\ & x, & y & \in \{0,1\} \end{array}$$

Resulta ser un problema lineal entero dado que es posible reescribir el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llllll} \min & -4x & +8y & & \\ \text{s.a.} & -3x & -7y & \leq 8 \\ & 2x & +4y & \geq 7 \\ & x, & y & \geq 0 \\ & x, & y & \leq 1 \\ & x, & y & \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Problema de Programación Lineal - Tipos PL

- **Problema de Programación Lineal Mixto:** En este caso, se tienen tanto variables enteras como continuas. Un caso particular de variable entera son las variables binarias, por lo que si se tienen variables binarias y continuas resulta ser un PLMixto.

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & c'x + d'y \\ Ax + By \leq b & \\ x \in P \subseteq \mathbb{R}^n, y \in S \subseteq \mathbb{Z}^m & \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{lrrl} \min & -4x & +8y & \\ \text{s.a.} & 2x & -3y & \leq 5 \\ & x \in \{0,1\}, & y \in \mathbb{R} & \end{array}$$

1. Relación entre variables

Relación entre variables usando variables binarias $x_1, \ldots, x_n$

- $y_{ij} \leq x_j \Leftrightarrow y_{ij}$ implica x_j
- $\sum_j y_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ Exactamente una de las variables es 1
- $\sum_{j=1}^n x_j \leq 1 \Leftrightarrow$ Como máximo una de las variables es 1
- $\sum_{j=1}^n x_j \geq 1 \Leftrightarrow$ Al menos una de las variables es 1
- $x_1 = 1 - x_2 \Leftrightarrow x_1$ Ocurre si y solo si x_2 no ocurre
- $x_i - x_j = 0 \Leftrightarrow$ Ambos eventos ocurren simultaneamente o ninguno de ellos ocurre
- $x_1 \leq x_2, x_1 \leq x_3, x_1 + 1 \geq x_2 + x_3 \Leftrightarrow x_1$ ocurre si y solo si ambos: x_2 y x_3 ocurren
- $x_1 \geq x_2, x_1 \geq x_3, x_1 \leq x_2 + x_3 \Leftrightarrow x_1$ ocurre si y solo si ocurre x_2 o x_3

2. Formulación con variables binarias

- $x = y \Leftrightarrow x$ ocurre si y sólo si y ocurre.
- $\leq y \Leftrightarrow$ E x no puede ocurrir si y no ocurre.
- $x \geq y \Leftrightarrow x$ debe ocurrir si y ocurre.
- $x + y \leq 1 \Leftrightarrow$ No pueden ocurrir simultáneamente
- $x + y \geq 1 \Leftrightarrow$ Al menos uno debe ocurrir.
- $x + y = 1 \Leftrightarrow$ Si uno ocurre, el otro no.

3. M suficientemente grande

Se introduce el concepto de M grande, constante lo suficientemente grande que permite activar o desactivar restricciones según el valor de la variable decisión.
Podríamos subir un video explicando esto desarrollando la p2 de la tarea 1!!

4. Min Max - Variable auxiliar

Este truco es fundamental para los P.P.L que tengan funciones objetivo como las que siguen: Máx Máx, Mín Mín, Máx Mín, Mín Máx y sus derivados, ya que como lo nombramos anteriormente no sería lineal, por ende, mediante este truco la "linealizaremos". Su uso se limita a seguir los siguientes pasos:

1. Escribir la función objetivo de manera NO LINEAL.
2. Hacer cambio de variable en función objetivo para que sea LINEAL.
3. Definir esta variable.
4. Crear restricción de naturaleza para la variable anterior.
5. Crear restricción de cota inferior o superior, según corresponda para la variable nueva creada.

4. Min Max - Variable auxiliar

Ejemplo:

Imagine que va a modelar un problema de utilidades de un almacén en un período en particular en el cual le entregan las restricciones y parámetros correspondientes, destacando el costo unitario de producción c y el ingreso unitario de venta i. Luego de leerlo modela las variables x la cual indica la cantidad de producto vendido e y la cantidad de producto producido por el almacén. Luego de ello escribe la naturaleza de ambas variables, pero se detiene al verificar que el problema le pide como Función Objetivo maximizar el máximo de las utilidades, las cuales deben ser enteras...

Entonces, procedemos con los pasos anteriores:

(a) Escribir la función objetivo de manera. NO LINEAL:: Máx máx $\left(x^* i - y^* c\right)$

(b) Hacer cambio de variable en función objetivo para que sea LINEAL: Max M, siendo $M =$ Max $\left(x^* i - y^* c\right)$

(c) Definir esta variable: M: Máximo de utilidades del almacén compuesto por ingresos unitarios por cantidad de producto vendido menos costo unitario de producción por cantidad de producto producido.

(d) Crear restricción de naturaleza para la variable anterior: $M \in Z_{+0}$

(e) Crear restricción de cota inferior o superior, según corresponda para la variable nueva creada: Como M es el Máximo de utilidades, será la cota superior, en caso contrario, sería la inferior, teniendo asi $M \geq (x * i - y * c)$

De esta forma, al utilizar la variable auxiliar la función objetivo se encontrara linealizada.

Table of Contents

TSP

Considere a un vendedor de Pinder que debe pasar por las N casas de su provincia vendiendo los productos comestibles de Snnop Dog. Este vendedor debe pasar por cada casa una sola vez para no saturar al público objetivo. Cabe destacar que la distancia entre la casa i y la casa j es d_{ij}. Modele este problema de programación lineal clásico de modo de minimizar las distancias logrando que el vendedor regrese a su casa luego de recorrer toda la provincia.

Solución:

¿Por qué resulta ser un Problema del vendedor viajero (TSP)?:

- Grafo dirigido $G = (V, A)$
- Distancia d_{ij} para cada $(i, j) \in A$
- Restricción: encontrar tour que visita cada nodo exactamente una vez
- Objetivo: minimizar distancia total del tour
- Ciudad de origen es irrelevante

Solución:

¿Por qué resulta ser un Problema del vendedor viajero (TSP)?:

- Grafo dirigido $G = (V, A)$
- Distancia d_{ij} para cada $(i, j) \in A$
- Restricción: encontrar tour que visita cada nodo exactamente una vez
- Objetivo: minimizar distancia total del tour
- Ciudad de origen es irrelevante

¿Como abordamos el problema ?:

Solución:

¿Por qué resulta ser un Problema del vendedor viajero (TSP)?:

- Grafo dirigido $G = (V, A)$
- Distancia d_{ij} para cada $(i, j) \in A$
- Restricción: encontrar tour que visita cada nodo exactamente una vez
- Objetivo: minimizar distancia total del tour
- Ciudad de origen es irrelevante

¿Como abordamos el problema ?:
Identificamos: Parámetros, Variables de decisión, Función Objetivo y Restricciones.

Solución:

Ejemplo Gráfico:

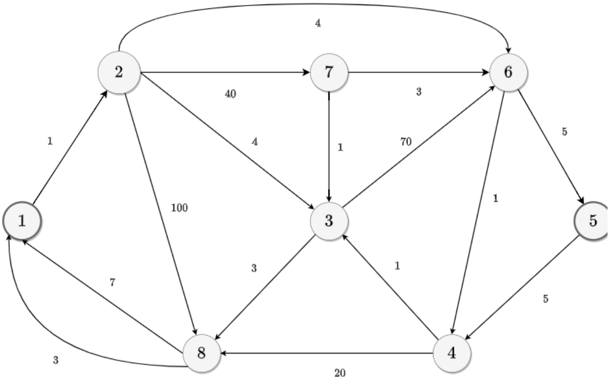


Figure: Ejemplo TSP.

Solución:

Parámetros

- N casas de la provincia, N nodos
- Aristas (i,j) $\in$ A
- $d_{i,j}$: Distacia entre casas

Solución:

Parámetros

- N casas de la provincia, N nodos
- Aristas (i,j) $\in$ A
- $d_{i,j}$: Distacia entre casas

Variables de decisión:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{Si utilizo arista (i,j)} \\ 0, & \sim \end{cases} \qquad \forall i \in N, j \in N$$

Solución:

Parámetros

- N casas de la provincia, N nodos
- Aristas (i,j) $\in$ A
- $d_{i,j}$: Distacia entre casas

Variables de decisión:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{Si utilizo arista (i,j)} \\ 0, & \sim \end{cases} \qquad \forall i \in N, j \in N$$

Función Objetivos:

$$\min \sum_{i,j \in N} d_{ij} x_{i,j}$$

Solución:

Ejemplo Gráfico:

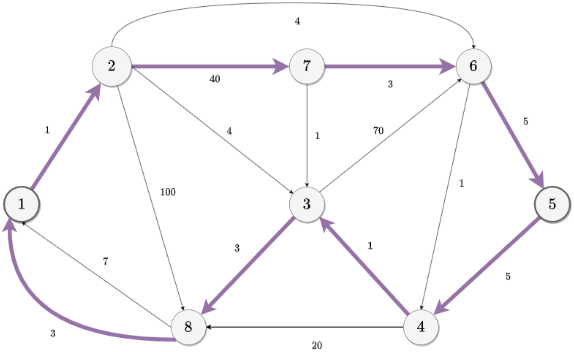


Figure: Ejemplo TSP, Solución Óptima.

Solución:

Restricciones:

- Se llega solo una vez a cada casa

$$\sum_{i \in N} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in N$$

Importante: no se define un un arco de salida ni de entrada, es decir el punto 0 no se encuentra definido.

Solución:

Restricciones:

- Se llega solo una vez a cada casa

$$\sum_{i \in N} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in N$$

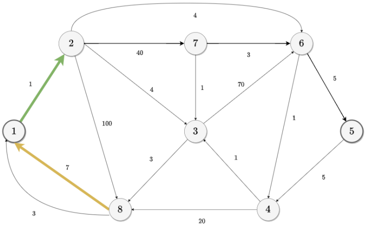
Importante: no se define un un arco de salida ni de entrada, es decir el punto 0 no se encuentra definido.

- Restricción de Flujo

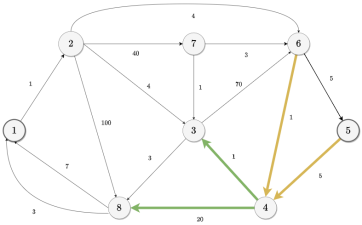
$$\sum_{j \in N} x_{i,j} - \sum_{j \in N} x_{j,i} = 0 \quad \forall i \in N$$

La suma de todos los arcos que salen de un nodo debe ser igual a la suma de todos los arcos que entran.

Solución:



(a) Restricción de Flujo Nodo 1



(b) Restricción de flujo Nodo 4

Figure: Restricciones de flujo: Lo que entra igual a lo que sale

Solución:

Restricciones:

- Eliminación de Subtours

$$\sum_{\{(i,j)\in A | i\in S, j\notin S\}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subseteq N : \emptyset \subsetneq S \subsetneq N$$

Solución:

Restricciones:

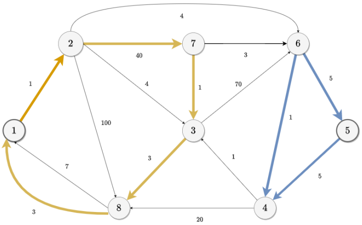
- Eliminación de Subtours

$$\sum_{\{(i,j)\in A | i\in S, j\notin S\}} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subseteq N : \emptyset \subsetneq S \subsetneq N$$

Se toma cada subconjunto de vértices S, pero que no sea vacío ($S = \emptyset$), ni que sea el conjunto de todos los vértices ($S = N$) y se suma sobre todos los arcos donde el primer nodo pertenece a S ($i \in S$) y el segundo ($j \notin S$), entonces para un subconjunto S particular obliga que al menos desde uno de los nodos (variable de decisión mayor o igual a 1), se vaya fuera del subconjunto S, lo que evitaría que se genere un subtour Daniel Irriarte.

Solución:

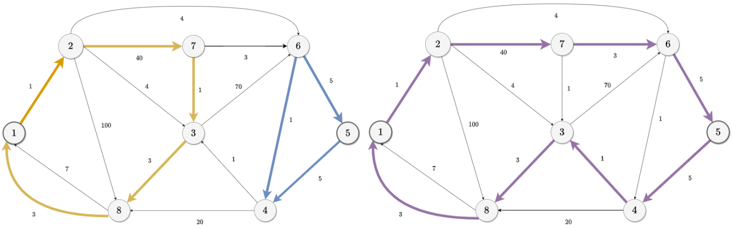
Restricciones:



(a) Subtour generado $= 58$.

Solución:

Restricciones:



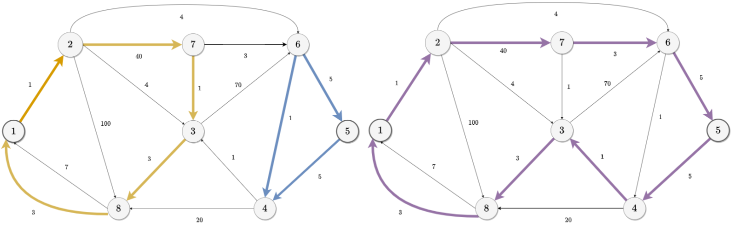
(a) Subtour generado $= 58$.

(b) Solución óptima $= 61$.

Figure: Restriccion asociada a la eliminación de subtours.

Solución:

Restricciones:



(a) Subtour generado = 58. (b) Solución óptima = 61.

Figure: Restriccion asociada a la eliminación de subtours.

- Naturaleza de variables

$$x_{i,j} \in \{0,1\} \quad \forall \quad (i,j) \in A$$

Table of Contents

Problema

Las observaciones que realiza un telescopio son seleccionadas de diversos estudios propuestos al telescopio. Cada propuesta de observación tiene una prioridad p_i (que refleja la calidad de la propuesta de investigación y el tiempo que ha esperado la propuesta) y demora un tiempo t_i en ajustar los distintos sensores y realizar la observación. Cada propuesta de observación se realiza a lo más una vez. Sea d_{ij} el tiempo que se demora posicionar el telescopio para realizar la observación j después de la observación i (el tiempo es d_{0j} si j es la primera observación).

Problema

Las observaciones que realiza un telescopio son seleccionadas de diversos estudios propuestos al telescopio. Cada propuesta de observación tiene una prioridad p_i (que refleja la calidad de la propuesta de investigación y el tiempo que ha esperado la propuesta) y demora un tiempo t_i en ajustar los distintos sensores y realizar la observación. Cada propuesta de observación se realiza a lo más una vez. Sea d_{ij} el tiempo que se demora posicionar el telescopio para realizar la observación j después de la observación i (el tiempo es d_{0j} si j es la primera observación).

(a). Escriba un problema de optimización que maximice la prioridad de las observaciones realizadas en un plazo de tiempo T de un conjunto de observaciones

Problema

Las observaciones que realiza un telescopio son seleccionadas de diversos estudios propuestos al telescopio. Cada propuesta de observación tiene una prioridad p_i (que refleja la calidad de la propuesta de investigación y el tiempo que ha esperado la propuesta) y demora un tiempo t_i en ajustar los distintos sensores y realizar la observación. Cada propuesta de observación se realiza a lo más una vez. Sea d_{ij} el tiempo que se demora posicionar el telescopio para realizar la observación j después de la observación i (el tiempo es d_{0j} si j es la primera observación).

(a). Escriba un problema de optimización que maximice la prioridad de las observaciones realizadas en un plazo de tiempo T de un conjunto de observaciones

¿Como abordamos el problema ?:

Problema

Las observaciones que realiza un telescopio son seleccionadas de diversos estudios propuestos al telescopio. Cada propuesta de observación tiene una prioridad p_i (que refleja la calidad de la propuesta de investigación y el tiempo que ha esperado la propuesta) y demora un tiempo t_i en ajustar los distintos sensores y realizar la observación. Cada propuesta de observación se realiza a lo más una vez. Sea d_{ij} el tiempo que se demora posicionar el telescopio para realizar la observación j después de la observación i (el tiempo es d_{0j} si j es la primera observación).

(a). Escriba un problema de optimización que maximice la prioridad de las observaciones realizadas en un plazo de tiempo T de un conjunto de observaciones

¿Como abordamos el problema ?:
Identificamos: Parámetros, Variables de decisión, Función Objetivo y Restricciones.

Solución

Se considera el nodo 0 como el punto de partida, esto dado que si resulta relevante situarnos el inicio de nuestro problema, por lo que se tiene:

$$\hat{I} = I \cup \{0\}$$

- Variables de decisión:

Solución

Se considera el nodo 0 como el punto de partida, esto dado que si resulta relevante situarnos el inicio de nuestro problema, por lo que se tiene:

$$\hat{I} = I \cup \{0\}$$

- Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta i} \\ 0, & \sim \end{cases} \qquad \forall i \in \hat{I}$$

Solución

Se considera el nodo 0 como el punto de partida, esto dado que si resulta relevante situarnos el inicio de nuestro problema, por lo que se tiene:

$$\hat{I} = I \cup \{0\}$$

- Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta i} \\ 0, & \sim \end{cases} \qquad \forall i \in \hat{I}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la j inmediatamente después de observar i} \\ 0, & \sim \end{cases}$$

- Función objetivo:

Solución

Se considera el nodo 0 como el punto de partida, esto dado que si resulta relevante situarnos el inicio de nuestro problema, por lo que se tiene:

$$\hat{I} = I \cup \{0\}$$

- Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta i} \\ 0, & \sim \end{cases} \qquad \forall i \in \hat{I}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la j inmediatamente después de observar i} \\ 0, & \sim \end{cases}$$

- Función objetivo:

$$max \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i$$

Solución

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i

Solución

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i

$$y_{ij} \leq x_i \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I} \quad \forall i \neq j$$

Solución

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i

$$y_{ij} \leq x_i \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I} \quad \forall i \neq j$$

2. Se debe respetar el máximo de tiempo T: Sumamos el tiempo que me demoro por cada propuesta observada y el tiempo de ajuste del telescopio para las siguientes.

Solución

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i

$$y_{ij} \leq x_i \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I} \quad \forall i \neq j$$

2. Se debe respetar el máximo de tiempo T: Sumamos el tiempo que me demoro por cada propuesta observada y el tiempo de ajuste del telescopio para las siguientes.

$$\sum_{i \in I} x_i \cdot t_i + \sum_{i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j} y_{ij} \cdot d_{ij} \leq T$$

Solución

Restricciones:

3. Flujo de salida nodo inicial: Debemos salir del nodo 0

Solución

Restricciones:

3. Flujo de salida nodo inicial: Debemos salir del nodo 0

$$\sum_{j \in I} y_{0j} = 1$$

Solución

Restricciones:

3. Flujo de salida nodo inicial: Debemos salir del nodo 0

$$\sum_{j \in I} y_{0j} = 1$$

4. Flujo de entrada nodo inicial. Se puede considerar como $d_{i0} = 0$ $\forall i \in I$, lo que le da consistencia al problema.

$$\sum_{i \in I} y_{i0} = 1$$

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} - \sum_{i \in I} y_{ji} = 0 \quad \forall j \in I$$

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} - \sum_{i \in I} y_{ji} = 0 \quad \forall j \in I$$

6. Eliminación de los Sub Tours. Otra formulación

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} - \sum_{i \in I} y_{ji} = 0 \quad \forall j \in I$$

6. Eliminación de los Sub Tours. Otra formulación

$$\sum_{(i,j) \in S} y_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S, \emptyset \subset S \subset \{1, ..., n\}$$

Solución

Restricciones:

6. Eliminación de Subtours.

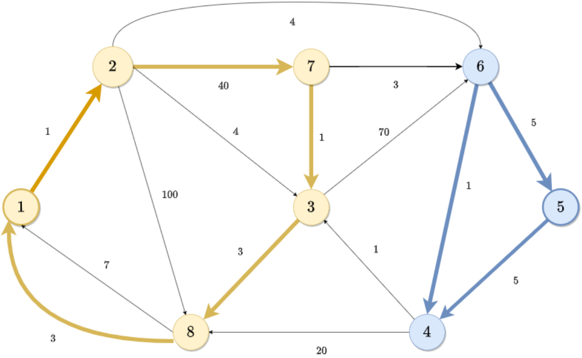


Figure: Ejemplo eliminación de subtours.

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: Esta restricción nos ayuda a movernos de un nodo que pueda que tenga una buena prioridad (Calidad) de propuesta, por lo que si nos quedaremos infinitamente aquí máximizaríamos la prioridad en el tiempo T, dado que el tiempo de configuración de $d_i i = 0$

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: Esta restricción nos ayuda a movernos de un nodo que pueda que tenga una buena prioridad (Calidad) de propuesta, por lo que si nos quedaremos infinitamente aquí máximizaríamos la prioridad en el tiempo T, dado que el tiempo de configuración de $d_i i = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in I$$

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: Esta restricción nos ayuda a movernos de un nodo que pueda que tenga una buena prioridad (Calidad) de propuesta, por lo que si nos quedaremos infinitamente aquí máximizaríamos la prioridad en el tiempo T, dado que el tiempo de configuración de $d_i i = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in I$$

8. Naturaleza de la variable:

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: Esta restricción nos ayuda a movernos de un nodo que pueda que tenga una buena prioridad (Calidad) de propuesta, por lo que si nos quedaremos infinitamente aquí máximizaríamos la prioridad en el tiempo T, dado que el tiempo de configuración de $d_i i = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in I$$

8. Naturaleza de la variable:

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \hat{I}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j$$

Problema

Las observaciones que realiza un telescopio son seleccionadas de diversos estudios propuestos al telescopio. Cada propuesta de observación tiene una prioridad p_i (que refleja la calidad de la propuesta de investigación y el tiempo que ha esperado la propuesta) y demora un tiempo t_i en ajustar los distintos sensores y realizar la observación. Cada propuesta de observación se realiza a lo más una vez. Sea d_{ij} el tiempo que se demora posicionar el telescopio para realizar la observación j después de la observación i (el tiempo es d_{0j} si j es la primera observación).

(a). Escriba un problema de optimización que maximice la prioridad de las observaciones realizadas en un plazo de tiempo T de un conjunto de observaciones I.

Problema

Las observaciones que realiza un telescopio son seleccionadas de diversos estudios propuestos al telescopio. Cada propuesta de observación tiene una prioridad p_i (que refleja la calidad de la propuesta de investigación y el tiempo que ha esperado la propuesta) y demora un tiempo t_i en ajustar los distintos sensores y realizar la observación. Cada propuesta de observación se realiza a lo más una vez. Sea d_{ij} el tiempo que se demora posicionar el telescopio para realizar la observación j después de la observación i (el tiempo es d_{0j} si j es la primera observación).

(a). Escriba un problema de optimización que maximice la prioridad de las observaciones realizadas en un plazo de tiempo T de un conjunto de observaciones I.

(b). Considere ahora que se planifica la observación durante K días. Dado que lo que es visible en el cielo cambia cada día suponga ahora que el tiempo disponible para observaciones en el día k es T_k y que la prioridad p_{ik} refleja que tan bien se puede realizar la observación i en el día k. Modifique el problema de la parte (a) para considerar estos cambios.

Solución

Se considera $\hat{K} = 1...K$

- Variables de decisión:

Solución

Se considera $\hat{K} = 1...K$

- Variables de decisión:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta i en el día k} \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\forall i \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

Solución

Se considera $\hat{K} = 1...K$

- Variables de decisión:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta i en el día k} \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\forall i \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{Si observo j inmediatamente después de observar i en el} \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\forall i \in \hat{I}, \forall j \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

Solución

Se considera $\hat{K} = 1 \ldots K$

- Variables de decisión:

$$x_i^k = \begin{cases} 1, & \text{Si observo la propuesta i en el día k} \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\forall i \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{Si observo j inmediatamente después de observar i en el} \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\forall i \in \hat{I}, \forall j \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

Solución

Función objetivo:

Solución

Función objetivo:

$$max \sum_{i \in I, k \in K} x_i^k \cdot p_i^k$$

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j el día k inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i el día k

Solución

Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in I, k \in K} x_i^k \cdot p_i^k$$

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j el día k inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i el día k

$$y_{ij}^k \leq x_i^k \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, k \in \hat{K} \quad \forall i \neq j$$

Solución

Función objetivo:

$$max \sum_{i \in I, k \in K} x_i^k \cdot p_i^k$$

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j el día k inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i el día k

$$y_{ij}^k \leq x_i^k \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, k \in \hat{K} \quad \forall i \neq j$$

2. Se debe respetar el máximo de tiempo T_k para un día k $\in \hat{K}$

Solución

Función objetivo:

$$\max \sum_{i \in I, k \in K} x_i^k \cdot p_i^k$$

Restricciones:

1. Relación entre variables: No puedo ver la propuesta j el día k inmediatamente después de la i si nunca observe la propuesta i el día k

$$y_{ij}^k \leq x_i^k \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, k \in \hat{K} \quad \forall i \neq j$$

2. Se debe respetar el máximo de tiempo T_k para un día k $\in \hat{K}$

$$\sum_{i \in I} x_i^k \cdot t_i + \sum_{i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j} y_{ij}^k \cdot d_{ij} \leq T_k \qquad \forall k \in \hat{K}$$

Solución

Restricciones:

3. Flujo de salida nodo inicial: Debemos salir del nodo 0 el día k

Solución

Restricciones:

3. Flujo de salida nodo inicial: Debemos salir del nodo 0 el día k

$$\sum_{j \in I} y_{0j}^{k} = 1 \qquad \forall k \in \hat{K}$$

Solución

Restricciones:

3. Flujo de salida nodo inicial: Debemos salir del nodo 0 el día k

$$\sum_{j \in I} y_{0j}^{k} = 1 \qquad \forall k \in \hat{K}$$

4. Flujo de entrada nodo inicial el día k. Se puede considerar como $d_{i0} = 0 \ \forall i \in I$, lo que le da consistencia al problema.

$$\sum_{i \in I} y_{i0}^{k} = 1 \qquad \forall k \in \hat{K}$$

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo para el día k, todos los días. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo para el día k, todos los días. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij}^k - \sum_{i \in I} y_{ji}^k = 0 \quad \forall j \in I, k \in \hat{K}$$

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo para el día k, todos los días. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij}^k - \sum_{i \in I} y_{ji}^k = 0 \quad \forall j \in I, k \in \hat{K}$$

6. Eliminación de los Sub Tours. para el día k, todos los días

Solución

Restricciones:

5. Conservación de flujo para el día k, todos los días. Todo lo que entra igual a lo que sale, definimos como $d_{i,0} = 0$

$$\sum_{i \in I} y_{ij}^{k} - \sum_{i \in I} y_{ji}^{k} = 0 \quad \forall j \in I, k \in \hat{K}$$

6. Eliminación de los Sub Tours. para el día k, todos los días

$$\sum_{(i,j) \in S} y_{ij}^{k} \leq |S| - 1 \quad \forall k \in K, \forall S, \emptyset \subset S \subset \{1, ..., n\}$$

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: para el día k, todos los días

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: para el día k, todos los días

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in I, k \in \hat{K}$$

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: para el día k, todos los días

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in I, k \in \hat{K}$$

8. Naturaleza de la variable:

Solución

Restricciones:

7. Solo se observa cada propuesta a lo mas una vez: para el día k, todos los días

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall j \in I, k \in \hat{K}$$

8. Naturaleza de la variable:

$$x_i^k \in \{0,1\} \qquad \forall i \in \hat{I}, k \in \hat{K}$$

$$y_{ij}^k \in \{0,1\} \qquad \forall i \in \hat{I}, j \in \hat{I}, i \neq j, k \in \hat{K}$$

Table of Contents

Propuesto

Usted es el gerente de una empresa Europea que vende muebles que son baratos pero también bonitos. Su meta es de entrar en el mercado Chileno. Para esto, quiere abrir sus primeras tiendas en Chile y quiere abrirlas en Santiago. Conoce los barrios B de Santiago. Para cada barrio $b \in B$ sabe una estimación de c_b CLP de cuanto dinero a la gente del barrio b le gustaría gastar en sus tiendas. Además hay un conjunto L de lugares posibles para abrir tiendas. Para cada lugar $\ell \in L$ hay un precio p_ℓ que tiene que pagar si abre una tienda en lugar ℓ. También, para cada pareja de un barrio $b \in B$ y un lugar $\ell \in L$ sabe la distancia $d_{b,\ell} > 0$ entre b y ℓ.

1. Escriba un programa lineal o un programa lineal entero que decida en que lugares abre una tienda. Tiene un presupuesto P para abrir las tiendas. La meta es de maximizar el numero de tiendas que abre.

2. Imagine que piensa mas sobre su visión de dar muebles fantásticos a la gente y que se le ocurre que seria mejor si la gente tuviera que caminar una distancia muy corta a sus tiendas. Por eso, es necesario que cada barrio $b \in B$ sea asignado a una de las tiendas en un lugar ℓ tal que la distancia entre b y ℓ es a lo mas D, para un $D > 0$ dado. Cambie su modelo de la parte anterior.

3. Asuma ahora que para cada barrio $b \in B$ puede definir una tienda abierta en que la gente viviendo en b va a comprar. Si define que la gente de un barrio b compra en una tienda en un lugar ℓ es necesario que la distancia entre b y ℓ sea a lo mas D', para un D' dado. Si no asigna una tienda a un barrio b, la gente en b no va a comprar. Hágalo tal que a cada tienda hay a lo mas 10 barrios asignados. La meta ahora es de maximizar el dinero total que la gente gasta en sus tiendas. Escriba un programa lineal o un programa lineal entero para esto.

4. Asuma ahora que automáticamente la gente de cada barrio $b \in B$ va a comprar en la tienda abierta mas cercana a b. Cambie su modelo de la parte anterior tal que para cada tienda abierta en un lugar ℓ, hay a lo mas 10 barrios b tal que la gente del barrio b va a comprar en la tienda en ℓ.

Despedida

Dudas o consultas al :

d.palacios.meneses@gmail.com
sofia.montano@ug.uchile.cl