MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 7 - Relaciones de Equivalencia y Sumatorias

14 de mayo de 2021

P1. ***Calentando motores***

Considere la relación $\equiv_2$ en $\mathbb{R}$ por $x \equiv_2 y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k$

a) Demuestre que es relación de equivalencia.

b) Encuentre $[0]_{\equiv 2}$.

c) Demuestre que $\mathbb{R}/\equiv_2 = \{[x]_{\equiv 2} \mid x \in [0,2)\}$.

P2. ***Relación diferencia***

Sea $A \in \mathcal{P}(E)$ fijo. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y$$

Demuestre que:

a) $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b) $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]_{\mathcal{R}} \mid X \in \mathcal{P}(A)\}$

c) Para $X, Y \in \mathcal{P}(A), X^c \neq Y^c \Rightarrow [X^c]_{\mathcal{R}} \neq [Y^c]_{\mathcal{R}}$

P3. ***Sumatorias varias***

Calcule las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{j=3}^{n-1}(j+1)(j+2)$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} b_k - b_{k-3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=l}^{n}\left(\frac{2}{l}\right)^k$, con $l \in \mathbb{N}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^{i+1}\frac{i}{(i+1)(i+2)}$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i2^i$

P4. ***Propuesto: Congruencia modular***

Sea $\mathcal{R}$ la siguiente relación en $\mathbb{Z}^2$ definida por:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \iff a + b \equiv_2 c + 3d$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

b) Demuestre que $\{[(0,0)]_{\mathcal{R}}, [(1,0)]_{\mathcal{R}}\}$ es partición de $\mathbb{Z}^2$.

c) ¿Cuántos elementos tiene $\mathbb{Z}^2/\mathcal{R}$?.

Resumen

- **[Clase de equivalencia]**: Dado un elemento $a \in A$ se define:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$

- **[Conjunto cuociente]**: Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación $\mathcal{R}$ se le llama conjunto cuociente, definido por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

- **[Equivalencias relevantes]**: Sea $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en A y $x, y \in A$. Son equivalentes:

  I) $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$

  II) $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$

  III) $x\mathcal{R}y$

  IV) $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

  Obs.: Con esto se deduce que $A/\mathcal{R}$

- **[Congruencia modular]**: Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$ por:

$$a \equiv_n b \Longleftrightarrow n|(a-b)$$

- **[Teorema de División Entera]**: Sean $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q \cdot m + r$ y $0 \leq r < |m|$.

- **[Corolario]**: $\mathbb{Z}_n$ $(:= Z/\equiv_n)$ tiene n elementos:

$$\mathbb{Z}_n = \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\}$$

- **[Sumatoria]**: Sea $(a_i)_{i \geq m}$ secuencia de números. Para $n \geq m$ se define la sumatoria de los términos de $(a_i)_{i \geq m}$ por:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k & \text{si } n > m \end{cases}$$

- **[Propiedades importantes]**: Se tienen las siguientes propiedades:

  I) $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$

  II) $\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$

  III) $\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$

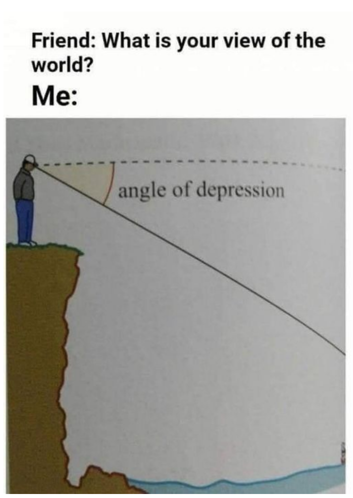
  IV) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s}$ para $s \in \mathbb{Z}$

  V) $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{s} a_k + \sum_{k=s+1}^{n} a_k$

  VI) $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ **(Telescopica)**

- **[Sumas importantes]**: Algunas sumas relevantes:

  - $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
  - $\sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$ con $a \neq 1$



¡Éxito en Cálculo! :)