MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 9 - Cardinalidad

4 de junio de 2021

P1. ***Biyecciones:***

a) Demuestre que si A, B son conjuntos finitos, entonces $|A \times B| = |B \times A|$.

b) Si I es un conjunto finito, pruebe que el conjunto de sus partes ($\mathcal{P}(I)$) tiene cardinal finito dado por $|\mathcal{P}(I)| = 2^{|I|}$.

P2. ***Numerabilidad***

a) Demuestre que el conjunto $P = \{n \in \mathbb{N} : \text{n es primo}\}$ es numerable.

b) Demuestre que el conjunto $A = \{\pi^k : k \in \mathbb{Q}\}$ es numerable.

c) Sea $B = \{\sqrt[n]{q} : n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q}\}$, demuestre que B es numerable.

d) Demuestre que $L = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ es finito}\}$ es numerable.

e) Demuestre que $O = \{X \subseteq \mathbb{N} : X^c \text{ es finito}\}$ es numerable.

P3. ***Contando infinitos:***

(a) Determine la cardinalidad del conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N},\ x_1 + x_2 + x_3 = n\}$

(b) Demuestre que el conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ x - y \in \mathbb{N}\}$ es no numerable.

P4. ***Contando funciones:***
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) \mid n \in \mathbb{N},\ a \in A\}$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

P5. ***[Propuesto] Contando elementos:***
Sea $m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$. Demuestre que

(a) $|\{2i + 1\ :\ i \in \mathbb{N}, n \in \{1, \ldots, m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\}| = 2^{m-1}$

(b) $\left|\left\{\dfrac{2i+1}{2^n}\ :\ i \in \mathbb{N}, n \in \{1, \ldots, m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\right\}\right| = 2^m - 1$

Resumen

- [**Conjunto finito**]: Un conjunto A se dice finito si posee finitos elementos, es decir si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que existe una función $f : A \to [1..n]$.
- [**Cardinal finito**]: Sea A un conjunto finito. Definimos el cardinal de A - denotado por $|A|$- como el único $n \in \mathbb{N}$ para el que existe una enumeración $a_1, ..., a_n$ de A.
- [**Propiedades varias**]:
  1. $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$
  2. $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ biyectiva.
  3. Si B es finito y $A \subseteq B$, entonces A es finito y $|A| \leq |B|$
  4. Si A, B finitos disjuntos entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$
  5. Si $B \subseteq A$ con A finito, entonces $|A \setminus B| = |A| - |B|$. En particular si $|A| = |B|$ entonces $A = B$
  6. Si A, B finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- [**Equivalencia para funciones**]: Si A, B finitos con $|A| = |B|$ y sea $f : A \longrightarrow B$ función. Son equivalentes:
  - f es inyectiva.
  - f es epiyectiva.
  - f es biyectiva.
- [**Propiedad importante**]: Sean A, B conjuntos con B finito. Se tiene:
  1. A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe $f : A \to B$ inyectiva.
  2. A es finito y $|A| = |B|$ si y solo si existe $f : A \to B$ biyectiva.
- [**Cardinal producto**]: Sean A, B conjuntos finitos, se tiene que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- [**Conjunto de funciones**]: Sean A, B conjuntos, se define:

  $$B^A := \{f : A \to B \mid f \text{ es función}\}$$

  Además, se cumple que $|B|^{|A|}$
- [**Cantidad de inyecciones**]: Sean A, B conjuntos tales que $|A| = k$ y $|B| = n$. Se tiene que:

  $$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= |\{f : A \longrightarrow B | f \text{ es inyectiva }\}| \\ &= \# \text{ de k- tuplas } B^k \text{ sin repeticiones.} \end{aligned}$$

- [**Cardinal de la imagen de un conjunto**]: Si $f : A \longrightarrow B$ función, entonces$|f(A)| \leq |A|$
- [**Conjunto numerable**]: Un conjunto A se dira numerable si $|A| = |\mathbb{N}|$. En particular tenemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.
- [**Propiedades Cardinal infinito**]: Sea A conjunto infinito, entonces:
  - i) Si A infinito y B finito, entonces $|A| = |A \cup B| = |A \setminus B|$
  - ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto B_k tal que $B_k \subseteq A$ y $|B_k| = k$.
  - iii) $|A| \geq |\mathbb{N}|$ es decir el cardinal de los naturales es **el menor cardinal infinito**.

  Obs.: Si $|A| \leq |\mathbb{N}|$ entonces A es numerable.
- [**Álgebra de numerables**]:
  - i) La unión numerable o finita de conjuntos numerables o finitos $(A_i)_{i \in I}$ (con $I \subseteq \mathbb{N}$) es a lo más numerable, es decir:

    $$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

    Cumple que $|A| \leq |\mathbb{N}|$
  - ii) La unión finita de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^n$ es numerable, es decir:

    $$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

    Es numerable.
  - iii) La unión numerable de conjuntos numerables $(A_i)_i^n$ es numerable, es decir:

    $$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

    Es numerable.
  - iv) El producto cartesiano finito de conjuntos numerables $(A_i)_{i=1}^n$ es numerable, es decir:

    $$A := \prod_{i=1}^{n} A_i$$

    Es numerable.

Resumen

- [**Producto numerable de finitos**]: El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos no es numerable.
- [**Cardinal del conjunto potencia**]: El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto, es decir: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- [**Cardinal Real**]: Se tiene que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0,1]|$. Esto implica que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0,1]| = |\mathbb{R}|$