P1 | a) Sea B numerable, $\preceq$ relación de orden total definida en B. Pruebe que dado $a \in B$, uno de los siguientes conjuntos es numerable:

- $B_1 = \{ b \in B : b \preceq a \}$
- $B_2 = \{ b \in B : a \preceq b \}$

Vemos que $B_1 \cup B_2 = \{ b \in B : b \preceq a \vee a \preceq b \}$
$$= B$$

Tenemos que $B_1 \subseteq B$
$$\Rightarrow |B_1| \leq |B| = |\mathbb{N}|$$

Análogamente $|B_2| \leq |\mathbb{N}|$

Falta ver $|\mathbb{N}| \leq |B_1| \vee |\mathbb{N}| \leq |B_2|$.
Supongamos por contradicción $|\mathbb{N}| > |B_1| \wedge |\mathbb{N}| > |B_2|$. Luego, B_1, B_2 son finito
$\Rightarrow$ $B_1 \cup B_2$ finito, pero
$B_1 \cup B_2 = B$ es numerable $\times$

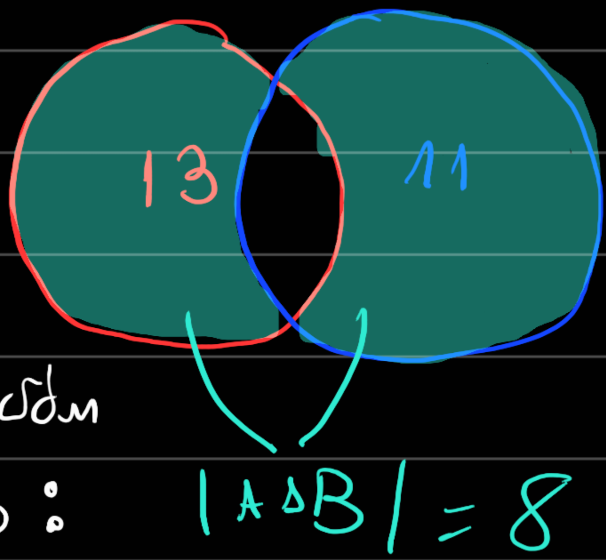
Luego, o bien $|B_1| \geq |\mathbb{N}|$ o bien $|B_2| \geq |\mathbb{N}|$

por lo que se tiene
$$|B_1| = |\mathbb{N}| \quad \vee \quad |B_2| = |\mathbb{N}| \quad \blacksquare$$

b) Sean A, B finitos, con $\begin{cases} |A| = 13 \\ |B| = 11 \\ |A \triangle B| = 8 \end{cases}$

Calcule $|A \setminus B|$

Haciendo un dibujito, podemos conjeturar que:



$\{A \triangle B, A \cap B\}$ es partición de $A \cup B$. Probemoslo:

- No vacía, pues $|A \triangle B| \neq 0$, y si $A \cap B = \emptyset$, entonces A, B serían disjuntos, por lo que

$$|A \triangle B| = |(A \cup B) \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset}| = |A \cup B| = 8 \quad \#$$
$$= |A| + |B| = 13 + 11$$

Luego $A \cap B \neq \emptyset$.

- Disjuntos: en efecto:

$A \Delta B \cap (A \cap B)$

$= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cap (A \cap B)$

$= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cap B)^c \cap (A \cap B)}_{\emptyset} = \emptyset.$

- Cubren $A \cup B$. En efecto:

$(A \Delta B) \cup (A \cap B)$

$= ((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) \cup (A \cap B)$

$= \underbrace{((A \cup B) \cup (A \cap B))}_{A \cap B \subseteq A \cup B} \cap \underbrace{((A \cap B)^c \cup (A \cap B))}_{\mathcal{U}}$ → cjto. referencia.

$= (A \cup B) \cap \mathcal{U} = A \cup B$ ∎

Luego

$|A \cup B| = |A \Delta B| + |A \cap B|$

$= 8 + |A \cap B|$ (1)

Por otro lado:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$= 11 + 13 - |A \cap B|$ (2)

Igualando (1), (2):

$$8 + |A\cap B| = 24 - |A\cap B|$$

$$\Rightarrow |A\cap B| = \frac{1}{2}(16) = 8$$

Finalmente, vemos que

$$A \setminus (A\cap B)$$

$$= A\cap (A\cap B)^c = A\cap(A^c \cup B^c)$$

$$= (A\cap A^c) \cup (A\cap B^c)$$

$$= \emptyset \cup (A\cap B^c)$$

$$= A \setminus B.$$

Luego, $|A\setminus B| = |A\setminus (A\cap B)|$

y como $A\cap B \subseteq A$

$$= |A| - |A\cap B|$$

$$= 13 - 8 = 5 \quad \blacksquare$$

⊗ El enunciado pide $|B\setminus A|$: es análogo y queda propuesto

(ups)

P2 | Consideremos $(A,*)$ una e. a. asociativa en A. Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A \mid a*x = x*a\}$$

Demuestre que:

(a) $(\forall x, y \in B)$ $x*y \in B$.

Sean $x, y \in B$ arbitrarios. Como pertenecen a B, cumplen que

$$\begin{cases} a*x = x*a & (1) \\ a*y = y*a. & (2) \end{cases}$$

Probemos que $x*y \in B$, es decir, que

$$a*(x*y) = (x*y)*a.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} & a*(x*y) && / \ * \text{ asocia} \\ &= (a*x)*y && / \ (1) \\ &= (x*a)*y && / \ * \text{ asoc.} \\ &= x*(a*y) && / \ (2) \\ &= x*(y*a) && / \ * \text{ asoc} \\ &= (x*y)*a \ \blacksquare \end{aligned}$$

(b) Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.

Recordemos que si e es neutro en $(A, *)$, entonces:

$\forall x \in A, \quad x * e = e * x = x$

En particular se cumple para $a \in A$:

Luego, $a * e = a = e * a$

$\Rightarrow e \in B$.

(c) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1}, entonces $x^{-1} \in B$.

Sea $x \in B$, es decir, $a * x = x * a$.

Probemos que $a * x^{-1} = x^{-1} * a$. En efecto

$$
\begin{aligned}
a * x^{-1} &\overset{e \text{ neutro}}{=} e * (a * x^{-1}) \\
&= (x^{-1} * x) * (a * x^{-1}) \\
&= x^{-1} * (x * a) * x^{-1} \\
&= x^{-1} * (a * x) * x^{-1} \\
&= x^{-1} * a * (x * x^{-1}) \\
&= x^{-1} * a * e \\
&= x^{-1} * a
\end{aligned}
$$

$*$ asoc

x, x^{-1} inversos: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

$\Rightarrow x^{-1} \in B$.

P3) Se define para $\mathbb{R}^2$ la l.c.i. $*$ por:

$$(a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$$

(a) Estudie la conmutatividad y asociatividad de $*$:

COMMUTATIVIDAD | $(1,1)*(0,1) = (0,1)$

$(a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$ $(0,1)*(1,1) = (0,2)$

$(c,d)*(a,b) = (ac, ad+b)$ $\Rightarrow$ $*$ no conmuta (¡por contraejemplo!)

ASOCIATIVIDAD | Sean $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$:

$(a,b)*((c,d)*(e,f))$
$= (a,b)*(ce, de+f)$
$= (ace, bce+de+f)$

$((a,b)*(c,d))*(e,f)$
$= (ac, bc+d)*(e,f)$
$= (ace, (bc+d)e + f)$
$= (ace, bce+de+f)$

Luego $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^2$, $x*(y*z) = (x*y)*z$

$\Rightarrow$ $*$ asocia

(b) Determine el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$

Buscamos (e_1, e_2) neutro en $\mathbb{R}^2$. Por la izquierda:

$(a,b)*(e_1,e_2) = (ae_1, be_1+e_2)$

Para que (e_1,e_2) sea neutro: $e_1 = 1$, $e_2 = 0$: Así

$(a,b)*(1,0) = (a, b)$ ✓

Verifiquemos que funciona por la derecha:

$(1,0)*(a,b)=(1\cdot a, 0\cdot a+b)=(a,b)$ ✓✓

Luego, $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(1,0)*(a,b)=(a,b)*(1,0)=(a,b)$
$\Rightarrow (1,0)$ neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

Determine qué elementos son invertibles en $(\mathbb{R}^2, *)$, y calcule sus invertibles

Buscamos los $(a,b), (c,d)\in\mathbb{R}^2$ t.q.
$(a,b)*(c,d)=(c,d)*(a,b)=(1,0)$.

Por un lado:
$(a,b)*(c,d)=(1,0)$
$\Leftrightarrow (ac, bc+d)=(1,0)$
$\Leftrightarrow ac=1, \quad bc+d=0$
por lo que $a,c\neq 0$, $c=a^{-1}$, y luego $d=-bc$
$=-ba^{-1}$

Luego, $a,b\in\mathbb{R}$ determinan los invertibles por un lado, de la forma $(a, \quad b)$ y con inverso $(a^{-1}, -ba^{-1})$
(con $a\neq 0$)

Veamos si funcionan para el otro lado:
$(a^{-1}, -ba^{-1})*(a, b)=(a^{-1}\cdot a, -(\frac{b}{a})\cdot a+b)$
$=(1,0)$

Luego, el conjunto de elementos invertibles es

$I = \{(a,b) : a \neq 0, b \in \mathbb{R}\}$

y tienen de inversa a $(a^{-1}, \frac{-b}{a})$.

(d) Determine los elementos idempotentes en $(\mathbb{R}^2, *)$

Buscamos elementos que cumplan:

$(a,b) * (a,b) = (a,b)$

$\Leftrightarrow (a^2, ab+b) = (a,b)$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a & \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \\ ab+b = b \end{cases}$

Si $a=0$: $\Rightarrow ab+b = 0 \cdot b + b$
$= b$

Luego la segunda ec. siempre se cumple:
Los elementos $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$ son idempotentes.

Si $a = 1 \Rightarrow ab+b = b$
$\Rightarrow 2b = b \Rightarrow b = 0$

Luego, $(1,0)$ es idempotente (y es claro pues es neutro)

P4) f homomorfismo de $(A,*)$ en (B,Δ), con neutros e_A y e_B. Demuestre:

(a) Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$

Si $e_B \in f(A)$, entonces $\exists a \in A : f(a) = e_B$
Sea un $a \in A$ t.q. $f(a) = e_B$; entonces

$$
\begin{aligned}
f(a) &\overset{\text{por } e_A \text{ neutro}}{=} f(a * e_A) && / \ f \text{ morfismo} \\
&= f(a) \Delta f(e_A) && / \ f(a) = e_B \\
&= e_B \Delta f(e_A) && / \ e_B \text{ neutro de } (B, \Delta) \\
&= f(e_A)
\end{aligned}
$$

Pero $f(a) = e_B \Rightarrow f(e_A) = e_B$ ▪

(b) $a \in A$ tiene inverso b para $(A,*)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B,Δ).

En efecto:

$$
\begin{aligned}
f(a) \Delta f(b) &\overset{\text{por } f \text{ morfismo}}{=} f(a * b) && / \ a, b \text{ inversos} \\
&= f(e_A) && / \ \text{parte (a)} \\
&= e_B
\end{aligned}
$$

$f(b) \Delta f(a) \overset{\text{p.d. f morfismo}}{=} f(b * a)$ / a, b inversos

$= f(e_A)$ / parte (a)

$= e_B$

Luego, $f(a), f(b)$ son inversos en (B, Δ)

(c) Supongamos que todos los elementos son invertibles. Un homomorfismo $f: A \to B$ es inyectivo ssi $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$

$\Leftarrow$ | Como $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$,

$\exists!\ a \in A : f(a) = e_B$ (y es $a = e_A$).

Luego, sean $x, y \in A$ t.q.

$f(x) = f(y)$ / $\Delta (f(y))^{-1}$

$\Rightarrow f(x) \Delta f(y)^{-1} = f(y) \Delta f(y)^{-1} = e_B$

$\hookrightarrow$ inversos

Por parte b)

$\Rightarrow f(x) \Delta f(y^{-1}) = e_B$ / f morfismo

$\Rightarrow f(x * y^{-1}) = e_B$

$\Rightarrow x * y^{-1} \in f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$

$\Rightarrow x * y^{-1} = e_A$ / Luego x, y^{-1} son inversos: pero y^{-1} es el inverso de y

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow)$ Suponemos f inyectiva. Sabemos (por parte a) que $f(e_A) = e_B$, luego $e_A \in f^{-1}(\{e_B\})$. Si otro elemento es t. q. $f(x) = e_B$, entonces $f(e_A) = f(x)$

$$\Rightarrow e_A = x$$

Luego e_A es el único elemento con imagen e_B:

$$f^{-1}(\{e_B\}) = e_A.$$

Para usar esto, tenemos que verificar la hipótesis: $e_B \in f(A)$. En este caso, se tiene, pues

$$f(e_A) = f(e_A) \circ f(e_A) \quad / \circ \underline{f(e_A)}^{-1}$$

todos los elementos son invertibles.

$\Rightarrow e_B = f(e_A)$

y como $e_A \in A$

$\Rightarrow e_B \in f(A)$ ✓