MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 10

Matías Azócar & Camila Zárate

Universidad de Chile

11 de Junio de 2021

Resumen

Estructuras algebraicas

- **Def:** Dado un conjunto A no vacío. Una *ley de composición interna* (o *l.c.i*) en A es una función

$$
\begin{aligned}
*: & A \times A \to A \\
& (x, y) \to x * y
\end{aligned}
$$

  Es decir, una operación que toma dos elementos de un conjunto cuyo resultado es un elemento del conjunto.
- Ejemplos de ello son:
- $+$ en $\mathbb{R}$
- $\cdot$ en $\mathbb{Q}$
- $\cup$ en $\mathcal{P}(A)$, donde A es un conjunto
- entre otros...

Resumen

Estructuras algebraicas

- Si $*$ es una *l.c.i.* sobre A, entonces al par $(A, *)$ lo llamamos estructura algebraica.
- Si tenemos una segunda operación Δ sobre A, entonces denotamos por $(A, *, \Delta)$ la estructura algebraica que considera ambas leyes de composición interna en A.
- Ejemplos de ello son:
- $(\mathbb{N}, +, \cdot), (\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\{V, F\}, \wedge, \vee)$
- entre otros...

Resumen

Estructuras algebraicas

- Recuerdo de la estructura $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$
- $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$
- $[a]_n +_n [b]_n = [a+b]_n$
- $[a]_n \cdot_n [b]_n = [a \cdot b]_n$
- Esto será importante para los próximos contenidos, así que vale la pena mencionarlo (es una estructura algebraica con dos *l.c.i.*)
- En general, en vez de escribir tantas cosas sub n, haremos lo siguiente

  $$a + b = c \ (mod \ \ n)$$

  señalando que todo es trabajo en $\mathbb{Z}_n$

Resumen

Estructuras algebraicas

Las *l.c.i.* tienen las siguientes posibles propiedades:

- Asociatividad $\forall x, y, z\ (x * y) * z = x * (y * z)$
- Elemento neutro (e), $\forall x\ x * e = e * x = x$
- Inverso x de y y viceversa $x * y = y * x = e$
- Conmutatividad $\forall x, y\ x * y = y * x$
- Absorbente (a), $\forall x\ x * a = a$
- Idempotente (a), $a * a = a$
- Cancelable (a),
  $\forall x, y\ a * x = a * y \Rightarrow x = y \wedge x * a = y * a \Rightarrow x = y$
- Δ distribuye respecto a $*$
  $\forall x, y, z\ x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z) \wedge (x*y)\Delta z = (x\Delta z)*(y\Delta z)$

Resumen

$$\overbrace{f(\underbrace{x*y}_{\in A})}^{\in B} \rightsquigarrow \underbrace{f(x)}_{\in B}\Delta \underbrace{f(y)}_{\in B}$$

Homomorfismos

- Una función $f : A \to B$ es un homomorfismo de $(A, *)$ en (B, Δ) si $\forall x, y \in A$, $f(x * y) = f(x)\Delta f(y)$.
- Cuando f es inyectiva, se llama un *monomorfismo*
- Cuando f es epiyectiva se llama un *epimorfismo*
- Cuando f es biyectiva se llama un *isomorfismo*. En este último caso decimos que f es un *isomorfismo* entre $(A, *)$ y (B, Δ).
- Cuando $(A, *) = (B, \Delta)$, los *homomorfismos* se llaman *endomorfismos* y, si son biyectivos, se llaman *automorfismos*. En estos casos decimos que f es un *endomorfismo* o *automorfismo* en $(A, *)$.

Resumen

Homomorfismos

- Si $f : A \to B$ un *epimorfismo* de $(A, *)$ en (B, Δ), entonces se tienen las siguientes propiedades:
- Si $(A, *)$ es asociativa, entonces (B, Δ) también lo es.
- Si $(A, *)$ es conmutativa, entonces (B, Δ) también lo es.
- Si e es neutro de $(A, *)$, entonces $f(e)$ es neutro de (B, Δ).
- Si $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ).

Resumen

Homomorfismos

Tenemos lo siguiente

- Sea f un homomorfismo, no necesariamente epiyectivo, de $(A, *)$ en (B, Δ), con neutros e_A y e_B, respectivamente.
  - Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$
  - Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ).
- Dos estructuras $(A, *)$ y (B, Δ) son *isomorfas*, denotado $(A, *) \cong (B, \Delta)$, si existe una función $f : A \to B$ que es un isomorfismo entre $(A, *)$ y (B, Δ).

Resumen

Homomorfismos

Tenemos lo siguiente

- Sea $(G, *)$ una estructura algebraica. Diremos que $(G, *)$ es grupo si:
  - $*$ es asociativa
  - $*$ admite neutro en G
  - todo elemento $x \in G$ posee inverso $x^{-1} \in G$
  - (Abeliano) si $*$ conmuta

Estructuras Algebraicas

P1.

Dado un conjunto no vacío A, sea $F = \{f : A \to A | f \text{ es biyectiva}\}$. Se define la operación $*$ de la siguiente manera:

$$\forall f, g \in F, f * g = f \circ g$$

- Pruebe que $*$ es una ley de composición interna.
- Estudie la asociatividad de $*$
- Estudie la conmutatividad de $*$
- Encuentre el elemento neutro de $*$
- Estudie la existencia de elementos inversos en F.

Estructuras Algebraicas

Demostración

i) $*$ es l.c.i. $\rightarrow \forall f, g \in F$, $f * g \in F$

$f * g = f \circ g \rightarrow f, g$ son biyectivas (de A en A)

entonces $f \circ g$ también es biyectiva (de A en A)

luego, $f * g = f \circ g \in F$. $*$ es l.c.i.

ii) La composición de funciones es asociativa (ya lo vimos anteriormente)

iii) $f * g = g * f$? $\rightarrow$ no, contraejemplo:

$f(x) = 3x \longrightarrow f \circ g(x) = f(x+1) = 3x+3$

$g(x) = x+1 \qquad g \circ f(x) = g(3x) = 3x+1$

$3x+3 \neq 3x+1$ no conmuta

Estructuras Algebraicas

Demostración f, g son bijectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ así que $*$ no necesariamente conmuta.

(iv) $f * e = e * f = f$

¿id_A? $\rightarrow f * e = f \circ e = f \circ id_A(x) = f(x)$

$\rightarrow e * f = e \circ f = id_A \circ \underbrace{f(x)}_{\in A} = id_A(f(x)) = f(x)$

id_A es el neutro en $(F, *)$.

Estructuras Algebraicas

Demostración $v)$ elementos inversos:

$$¿g: \; f * g = id_A \wedge g * f = id_A \; ?$$

como $f \in F \Leftrightarrow f: A \to A \wedge f$ es biyectiva, f tiene inversa (f^{-1}), biyectiva y va de A en A.

$$f * f^{-1} = f \circ f^{-1} = id_A$$

$$f^{-1} * f = f^{-1} \circ f = id_A$$

$\Rightarrow$ todo elemento de F tiene inverso en F (para $*$).

Estructuras Algebraicas

P2.

Sea $S = \{a, b, c\}$ (donde a, b y c son todos distintos) y $*$ la ley de composición interna dada por la siguiente tabla

*	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Determine si $*$ es asociativa en S. Identifique el elemento neutro de S, encuentre los inversos para $*$ y determine si son únicos.

EL elemento neutro es c, notamos de la tabla que su fila y columna deja inalterados todos los elementos de S.

Estructuras Algebraicas

*	a	b	c
a	c	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Demostración

"a^{-1}"?

$$a * b = c \rightarrow a^{-1} = b$$
$$b * a = c \rightarrow b^{-1} = a$$
$$a * a = c \rightarrow a^{-1} = a$$
$$c * c = c \rightarrow c^{-1} = c \quad \text{neutro.}$$

no inverso único (a se tiene a sí mismo y a b)

$$a * b * b \rightarrow (a*b)*b = c*b = b$$
$$\neq$$
$$\rightarrow a*(b*b) = a*a = c$$

$*$ no asocia !!

Estructuras Algebraicas

Demostración

$$x = n\cdot p + a \rightarrow x \in [a]_n$$

$$y = n\cdot q + b \rightarrow y \in [b]_n$$

$0 \leq a, b < n$

$$x + y = n\cdot p + n\cdot q + a + b$$

$$= n(p+q) + a + b$$

$$x+y \in [a+b]_n \rightarrow x+y \equiv a+b \pmod n$$

$$x\cdot y = (n\cdot p + a)(n\cdot q + b)$$

$$npnq + anq + bnp + ab$$

$$= n(npq + aq + bp) + ab \rightarrow x\cdot y \in [ab]_n$$

$$x\cdot y \equiv a\cdot b \pmod n$$

Estructuras Algebraicas

P3.

Considere la estructura algebraica $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

- Construya la tabla para la operación $\cdot_5$ en $\mathbb{Z}_5$.
- ¿Es $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$ un grupo? no
- Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.
- ¿Es $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{[0]\}, \cdot_4))$ un grupo?

→ asocia ✓ hereda de ·
→ tiene neutro ✓ 1
→ $\forall x \in G$, x es invertible (en G)
0 no es invertible
→ es grupo? NO

$\cdot_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$	$[0]_5$
$[1]_5$	$[0]_5$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$[0]_5$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$[0]_5$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$[0]_5$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Estructuras Algebraicas

Demostración

$\cdot_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$
$[1]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Asocia? : $(x \cdot_5 y) \cdot_5 z$

$$[x\cdot y]_5 \cdot_5 [z]_5 = [(x\cdot y)\cdot z]_5$$
$$= [x\cdot(y\cdot z)]_5$$
$$= [x]_5 \cdot_5 [y\cdot z]_5$$

Sí, asocia

Estructuras Algebraicas

$\cdot_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$	$\cancel{[0]_5}$
$[1]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[1]_5$	$[2]_5$	$[3]_5$	$[4]_5$
$[2]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[2]_5$	$[4]_5$	$[1]_5$	$[3]_5$
$[3]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[3]_5$	$[1]_5$	$[4]_5$	$[2]_5$
$[4]_5$	$\cancel{[0]_5}$	$[4]_5$	$[3]_5$	$[2]_5$	$[1]_5$

Demostración neutro? : $[1]_5$ ✓

inversos? : todos nuestros elementos son invertibles

- $[1]_5 \cdot_5 [1]_5 = [1]_5$
- $[2]_5 \cdot_5 [3]_5 = [3]_5 \cdot_5 [2]_5 = [1]_5$
- $[4]_5 \cdot_5 [4]_5 = [1]_5$

$(\mathbb{Z}_5 \setminus [0]_5, \cdot_5)$ es un grupo

$[x]_5 \cdot_5 [y]_5 = [xy]_5 = [yx]_5 = [y]_5 \cdot_5 [x]_5$ ✓

$\cdot_5$ conmuta $\Rightarrow (\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_5\}, \cdot_5)$ es grupo abeliano ✓

Estructuras Algebraicas

Demostración

$\cdot_4$	$[1]_4$	$[2]_4$	$[3]_4$
$[1]_4$	1	2	3
$[2]_4$	2	0	2
$[3]_4$	3	2	1

$\cdot_4$ no es l.c.i. para $\mathbb{Z}_4 \setminus \{[0]_4\}$

Homomorfismos

P4.

Se define en $\mathbb{R}$ la ley de composición interna $*$ por:

$$x * y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Muestre que la función $f(x) = x^5$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$ y que también es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$, donde las operaciones $+$ y $\cdot$ denotan la suma y producto usuales en $\mathbb{R}$.

Homomorfismos

Demostración $f(\underbrace{x * y}) = f(x) + f(y)$

$$f\left(\sqrt[5]{x^5 + y^5}\right)$$

$$= \cancel{\left(\sqrt[5]{x^5 + y^5}\right)^5} \longrightarrow \left(\left(x^5 + y^5\right)^{1/5}\right)^5$$

$$= x^5 + y^5 = f(x) + f(y)$$

homomorfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$

Homomorfismos

Demostración

$f(x) = x^5 \rightarrow f$ es epiyectiva

dado $y \in \mathbb{R}$, $x : f(x) = y \Rightarrow x = \sqrt[5]{y}$

$f(x)$ es inyectiva:

$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow x^5 - y^5 = 0$.

$$\underbrace{(x-y)}_{0}\underbrace{(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)}_{\cancel{0}} = 0$$

iny ✓

veamos que esto NO puede ser 0

Homomorfismos

Demostración

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$(x^4 + x^2y^2 + y^4) + \underbrace{(x^3y + xy^3)}_{xy(x^2+y^2)}$$

$$\left[\ (x-y)^2 \geq 0 \qquad x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad x^2 + y^2 \geq 2xy\ \right]$$

1er caso $(xy \geq 0)$

$$\geq x^4 + x^2y^2 + y^4 + xy(2xy)$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 \geq 0$$

$x = y = 0 \Rightarrow x = y$ ~~ing~~ $\rightarrow$ en otro caso > 0

Homomorfismos

Demostración $(x^4+x^2y^2+y^4)+xy(x^2+y^2)$

2° caso $(xy<0)$

$$=x(x^3+y^3)+y(x^3+y^3)+x^2y^2$$

$$=(x^3+y^3)(x+y)+x^2y^2$$

$$=\underbrace{(x+y)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x^2-xy+y^2)}_{>0}+\underbrace{x^2y^2}_{\geq 0}\geq 0$$

Homomorfismos

Demostración

$f(x)$ morfismo entre $(\mathbb{R}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, \cdot)$

$\to f(x \cdot y) = (x \cdot y)^5 = xyxyxyxyxy$

$= x^5 y^5 = x^5 \cdot y^5 = f(x) \cdot f(y)$

Estructuras Algebraicas

(Propuesto) P5.

Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ de la siguiente manera

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) * (c,d) = (ac, bc + d)$$

¿Es esta una operación conmutativa? ¿asociativa? ¿tiene elemento neutro? Determine aquellos elementos que tienen inverso y calcule sus inversos.