Auxiliar 5

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Sea $\mathbf{r} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial posición, y $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Demuestre que se cumple

$$\iint_S \mathbf{u}_0 \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S \text{ es una superficie cerrada} \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial S} (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} & \text{si} \quad \partial S \text{ es una curva cerrada} \end{cases} \tag{1}$$

P2. Sea D una región del plano tal que ∂D se puede parametrizar como una curva cerrada, simple, y regular, en sentido antihorario. Pruebe que el área de la región D, $A(D)$, satisface la siguientes relaciones

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx; \tag{2a}$$

$$A(D) = \int_{\partial D} y \arctan\left(\tfrac{x}{y}\right) dy - x \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) dx; \tag{2b}$$

$$A(D) = \int_{\partial D} xdy. \tag{2c}$$

P3. La curva Folium de Descartes se puede definir como el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 3xy\}$.

(a) Calcule el área que encierra la curva Folium en el primer cuadrante.

(b) Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = (x^3y^4, x^4y^3 - x, 0)$. Calcule el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ en el primer cuadrante de la curva Folium.

Hint: Use la parametrización $y = tx$

P4. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya expresión en coordenadas cartesianas es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{y}}. \tag{3}$$

(a) Encuentre el dominio de $\mathbf{F}$ y calcule $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$

(b) Calcule el trabajo que realiza el campo $\mathbf{F}$ sobre una circunferencia unitaria centrada en el origen ¿Contradice este resultado algún teorema del curso? Explique