Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Guía 2

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2Ax}{L} & \text{si} \quad 0 < x < \frac{L}{2}; \\ \\ A & \text{si} \quad \frac{L}{2} < x < L. \end{cases} \tag{1}$$

Calcule su serie de Fourier

Solución:

Para tener totalmente determinada la serie de Fourier es necesario calcular todos los coeficientes $a_0, a_n, b_n,\ n \in \mathbb{N}_+$. Partimos calculando el coeficiente a_0. Teniendo en cuenta los distintos comportamientos de f dentro del intervalo $[0, L]$, se obtiene

$$a_0 = \frac{4}{L}\int_0^L \frac{f(x)}{2}\,dx = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} \frac{2Ax}{L}dx + \int_{L/2}^{L} Adx\right] = \frac{2}{L}\left[\frac{2A}{L}\frac{L^2}{8} + \frac{AL}{2}\right] = \frac{3A}{2}. \tag{2}$$

Asimismo, podemos calcular los coeficientes a_n mediante la expresión

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\tfrac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\left[\frac{2A}{L}\int_0^{L/2} x\cos\left(\tfrac{2n\pi x}{L}\right)dx + A\int_{L/2}^{L}\cos\left(\tfrac{2n\pi x}{L}\right)dx\right]. \tag{3}$$

Integrando por partes la primera integral, se obtiene

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2A}{L}\left(\frac{L^2\sin(\pi n)}{4\pi n} + \frac{L^2(\cos(n\pi)-1)}{4\pi^2 n^2}\right) + \frac{AL}{2n\pi}(\sin(2n\pi) - \sin(n\pi))\right]. \tag{4}$$

Considerando que $\sin(2n\pi) = \sin(n\pi) = 0$, y que además $\cos(n\pi) = (-1)^n$, se deduce

$$a_n = \frac{A}{\pi^2 n^2}[(-1)^n - 1]. \tag{5}$$

De aquí se observa que $a_n = 0$ si n es par, por lo tanto solamente serán relevantes los términos con n impar. Los términos impares siguen la relación

$$a_{2n-1} = -\frac{2A}{\pi^2(2n-1)^2}. \tag{6}$$

Por último, es necesario calcular los coeficientes b_n. Entonces por definición es posible establecer que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\tfrac{2n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\left[\frac{2A}{L}\int_0^{L/2} x\sin\left(\tfrac{2n\pi x}{L}\right)dx + A\int_{L/2}^{L}\sin\left(\tfrac{2n\pi x}{L}\right)dx\right]. \tag{7}$$

Integrando por partes la primera integral, es posible deducir que

$$b_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2A}{L}\left(\frac{L^2\sin(n\pi)}{4n^2\pi^2} - \frac{L^2\cos(n\pi)}{4n\pi}\right) - \frac{AL}{2\pi n}(\cos(2n\pi) - \cos(n\pi))\right]. \tag{8}$$

Teniendo en cuenta que $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(2n\pi) = 1$, y $\cos(n\pi) = (-1)^n$, se obtiene

$$b_n = \frac{A}{n\pi}[(-1)^n - 1 + (-1)^n] = -\frac{A}{n\pi}. \tag{9}$$

De aquí se obtiene sin ambigüedad que la serie de Fourier, está dada por

$$f(x) = \frac{3A}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\left(\tfrac{2(2n-1)\pi x}{L}\right) + \frac{A}{n\pi}\sin\left(\tfrac{2n\pi x}{L}\right). \tag{10}$$

Se puede observar el comportamiento de la serie en la Fig. **??**

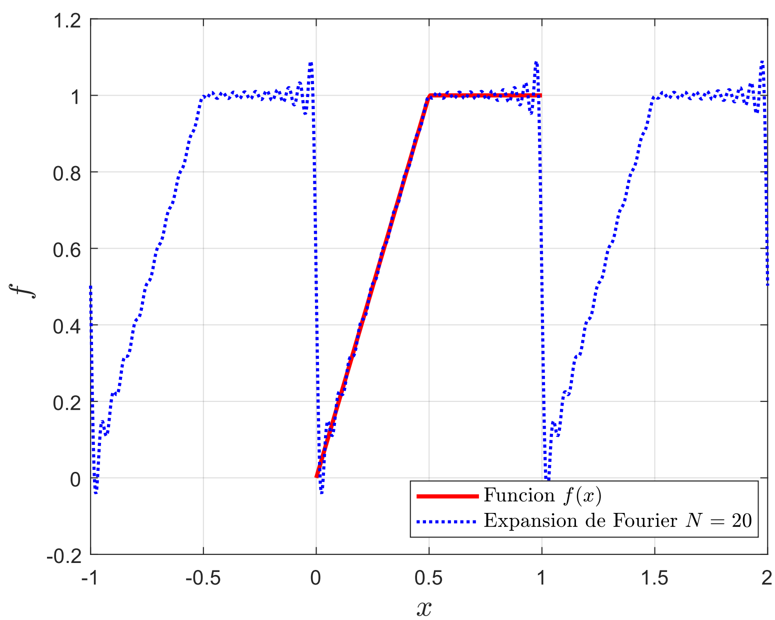

Figure 1: f como función de x en comparación a su expansión de Fourier con $N = 20$ términos de la serie. Parámetros normalizados, i.e., $A = 1$, $L = 1$.

P2. Considere una barra de largo L, cuyo perfil de temperatura inicialmente está dado por

$$T(x,0) = \begin{cases} T_0 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{L}{2}; \\ 0 & \text{si} \quad \frac{L}{2} < x < L. \end{cases} \tag{11}$$

Si la evolución temporal de la barra en cada punto de ella está gobernado por la ecuación del calor, es decir,

$$\partial_t T(x,t) = \kappa \partial_x^2 T(x,t), \tag{12}$$

con κ una constante. Considerando además que los extremos de la barra se ponen en contacto con un material refrigerante que mantiene la temperatura en temperatura nula, encuentre el campo de temperatura $T(x,t)$.

Solución:

Usamos el método de separación de variables, es decir, suponemos que el campo de temperatura $T(x,t)$ puede ser escrito como la multiplicación de funciones que dependen únicamente del tiempo, o del espacio, i.e., $T(x,t) = f(x)h(t)$. Reemplazando dicha suposición en la Ec. (12) se obtiene

$$\frac{1}{\kappa}\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}. \tag{13}$$

La única forma de que el término de la izquierda en la Ec. (**??**), que solo depende del tiempo, sea igual al término de la derecha en la Ec. (**??**), que solamente depende del espacio, es que cada uno sea constante. Llamando $-1/\lambda^2$ a dicha constante, se deduce

$$\frac{1}{\kappa}\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{1}{\lambda^2}. \tag{14}$$

La Ec. (14) conduce a 2 ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, una de orden uno, y otra de orden 2. Allí está el poder del método de separación de variables, pues hace que un problema de ecuaciones en derivadas parciales se transforme en uno de ecuaciones diferenciales ordinarias, dado por

$$h'(t) + \frac{\kappa}{\lambda^2}h(t) = 0, \tag{15a}$$

$$f''(x) + \frac{1}{\lambda^2}f(x) = 0. \tag{15b}$$

Es importante notar que en la Ec. (12) aparece una derivada parcial temporal, que luego se traduce en una EDO de orden 1 en el tiempo. Por otra parte, en la Ec. (12) también aparece una segunda derivada en espacial, que se traduce en una EDO de segundo orden en el espacio. La solución a las EDOs es sencilla, y está dada por

$$h(t) = e^{-\frac{\kappa t}{\lambda^2}}, \tag{16a}$$

$$f(x) = A\cos\left(\tfrac{x}{\lambda}\right) + B\sin\left(\tfrac{x}{\lambda}\right). \tag{16b}$$

Ahora es el momento de imponer las condiciones de borde. Estas son condiciones en el espacio, y se encuentran implícitamente en el texto, en dónde nos dicen que los bordes de la barra ($x = 0$ y $x = L$) se encuentran a temperatura nula. Esto se traduce directamente como $T(0,t) = 0$

y $T(L,0) = 0$. Dada la hipótesis de separación de variable uno puede ir aún mas allá y decir que esto implica que $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$. La primera condición de f al reemplazarla en (16b) implica que $A = 0$. Asimismo, la segunda condición de f implica que $\sin\left(\frac{L}{\lambda}\right) = 0$, por lo tanto

$$\lambda = \frac{L}{n\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Este último hecho es muy importante, pues nos cuenta que los posibles valores de λ que supusimos al hacer variables separables, son discretos. Esto se tiene que ver reflejado tanto en 16a como en 16b, pues ambos incluyen el parámetro λ, y entonces se cumple

$$h_n(t) = e^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{L^2}}, \tag{18a}$$

$$f_n(x) = \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right). \tag{18b}$$

La sorpresa es que ahora tenemos infinitas funciones que cumplen (i) las EDOs y (ii) las condiciones de borde. De hecho, hay tantas funciones como números naturales. Una interpretación posible es que (i) y (ii) nos dan la base de funciones, muchas veces también llamadas auto-funciones. Diremos entonces que existen infinitas auto-funciones dadas por $T_n(x,t) = f_n(x)h_n(t)$. Expresada en esta interpretación, entonces la función que buscamos debe ser una combinación lineal de estas auto-funciones, es decir,

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n(x,t). \tag{19}$$

Conociendo nuestras auto-funciones en la hipótesis de variables separables, es decir, dado (18a) y (18b), podemos expresar esta idea como

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{L^2}} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right) \tag{20}$$

El último paso será usar la condición inicial, que es una condición para el tiempo, al ser inicial, la asumimos en $t = 0$, y está explícita en el enunciado. Al reemplazar $t = 0$ en nuestra combinación lineal de auto-funciones, se cumple

$$T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right). \tag{21}$$

Aquí hay muchas cosas interesantes que notar. Lo primero es que la Ec. (21) se parece demasiado a una serie de Fourier, es mas, corresponde a una seria de Fourier impar. Lo segundo es que, las condiciones de borde estan siempre relacionadas al espacio (en este caso x) y las condiciones iniciales al tiempo t. Dicho esto, podemos calcular los coeficientes b_n tal como lo hemos hecho siempre oara la serie de Fourier, y por lo tanto es cierto que

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L T(x,0)\sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)dx. \tag{22}$$

Reemplazando la función que nos dan en el enunciado, se deduce que

$$b_n = \frac{2}{L}\left[T_0 \int_0^{L/2} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_{L/2}^{L} 0\sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)dx\right] = -\frac{2T_0}{L}\frac{L}{n\pi}[\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) - \cos(0)]. \tag{23}$$

Simplificando algunas cosas, se puede obtener de manera un poco mas compacta que

$$b_n = \frac{2T_0}{n\pi}[1 - \cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right)]. \tag{24}$$

Ya por último, reemplazando en nuestra expresión de combinación lineal de auto-funciones, se deduce

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{n\pi}[\cos\left(\tfrac{n\pi}{2}\right) - 1]e^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{L^2}} \sin\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right). \tag{25}$$

En la Fig. 2 se observa usando los primeros 500 términos de la Ec. (25) la temperatura para 3 tiempos mayores que 0, y la condición inicial, teniendo en cuenta también los primeros 500 términos de la expansión de Fourier.

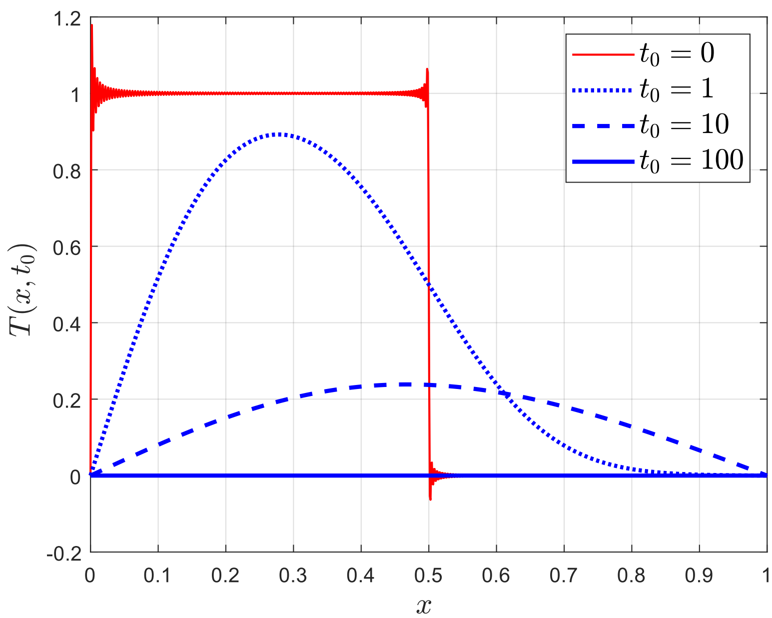

Figure 2: Temperatura T como función del espacio x para $N = 500$ (numero de términos de la serie). Parámetros normalizados, i.e., $L = 1$, $T_0 = 1$.

P3. La función $\mathrm{rect}(x)$ es ampliamente utilizada en ingeniería y ciencias. Es por ejemplo la manera analítica de representar un pozo potencial en mecánica cuántica. Su definición está dada por la expresión

$$\mathrm{rect}(\tfrac{x}{L}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-L/2, L/2]; \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-L/2, L/2]. \end{cases} \tag{26}$$

Calcule su transformada de Fourier.

Solución:

La definición de la transformada de Fourier de una función $f(x)$ es $\hat{f}(s)$, y satisface la relación

$$\mathcal{F}[f(x)](s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} f(x) dx. \tag{27}$$

En nuestro caso $f(x) = \mathrm{rect}(\frac{x}{L})$, entonces se obtiene el desarrollo

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(\tfrac{x}{L})](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \mathrm{rect}(\tfrac{x}{L}) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-is} [e^{-isL/2} - e^{isL/2}]. \tag{28}$$

Recordando que $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, es posible reagrupar términos de modo que se obtenga

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(\tfrac{x}{L})](s) = \frac{L}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{sL}{2}\right)}{\frac{sL}{2}}. \tag{29}$$

En ingeniería y ciencias es bastante común que a la función $\frac{\sin(x)}{x}$ se le llame función $\mathrm{sinc}(x)$, por lo tanto en la literatura típicamente se encuentra que

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(\tfrac{x}{L})](s) = \frac{L}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{sinc}(\tfrac{sL}{2}). \tag{30}$$