**MA2601-6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**
**Profesor:** Alexis Fuentes
**Auxiliares:** Vicente Salinas
**Fecha:** 25 de abril de 2021

# Auxiliar 3

**P1.** [**Curva de persecución**] Un conejo parte del origen y corre por el eje $y > 0$ a velocidad $a$.
Al mismo tiempo parte un perro, que corre a velocidad $b$, del punto $(c, 0)$ persiguiendo al conejo. Queremos encontrar la trayectoria que sigue el perro. En el instante $t = 0$ el conejo parte del $(0, 0)$ y el perro del $(c, 0)$.
En el instante $t$ el conejo estará en el punto $(0, at)$ y el perro en el punto D $(x, y)$. El segmento RD es tangente a la trayectoria (en todo momento el perro corre en dirección al conejo), luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - at}{x} \rightarrow xy' - y = -at$$

Plantee una ecuación de segundo orden para las variables $x$ e $y$ eliminado $t$ y resuelvala.

**P2.** Considere el problema de Cauchy

$$(*)\begin{cases} y' & = \dfrac{\cos(y)}{1 + y^4} \\ \text{y(0)} & = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

*a*) Demuestre que existe una constante positiva K tal que

$$\left| \frac{cos(r)}{1 + r^4} - \frac{cos(s)}{1 + s^4} \right| \leq K|r - s| \qquad\qquad \forall r, s \in R$$

*b*) Encuentre una solución definida en todo R del problema de Cauchy y use la parte anterior para demostrar que esa es la única solución al problema $(*)$.

**P3.** Considere el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' & = \dfrac{\sqrt{1 + y}}{1 + x^2} \\ \text{y(a)} & = \text{b} \end{cases}$$

*a*) Encuentre todos los valores $a, b \in R$ para los cuales el problema no tiene solución

*b*) Encuentre todos los valores $a, b \in R$ para los cuales el problema tiene solución única y determínela.

*c*) Encuentre todos los valores $a, b \in R$ para los cuales el problema tiene más de una solución y determínelas.

**P4.** Determine la existencia y unicidad de las soluciones para las siguientes EDOs:

*a*) $y' = xy \sin(y)$, $y(0) = 2$ para $x \in R$.

*b*) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ en el rectángulo $|x| \leq 1$, $|y| < 1$. ¿Y si se omite estas restricciones?

*c*) $\cos(x)y' \sin(x)y = 3x \cos(x)$, $y(2\pi) = 0$.

*d*) $y' = \sqrt{y} + 1$, $y(0) = 0$ para $x \in [0, 1]$.

*e*) $y' = y^{\frac{1}{3}}$ , $y(1) = 0$. ¿Y si $y(1) = 1$?

# Propuestos

**Prop1** Casos especiales:

*a*) Encuentre una solución implícita para: $\dfrac{y''}{y'^2+1} = y$, con $y(0) = \sqrt{2}$ e $y'(0) = 0$.

*b*) Resuelva $y(x)y''(x)y'(x) + (y'(x))^3 = 0$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

# Resumen de contenidos

**Ecuaciones sin termino independiente:** $F(y'', y', x) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $z'(x) = y''(x)$

**Ecuaciones sin termino dependiente:** $F(y'', y', y) = 0$, hacer el cambio $z(x) = y'(x)$ y $\dfrac{dz}{dy}(x)z(x) = y''(x)$

**Definición:** Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que $f$ es Lipschitz de constante $L > 0$ si:

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

**Teorema (de Existencia y Unicidad Global o Picard-Lindelöf)**. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \times R \to R$ una función continua en su primera variable y globalmente Lipschitz en su segunda variable. Entonces, para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución global $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy.

$$(PC)\begin{cases} y' & = f(\mathrm{t,y}) \\ \mathrm{y(x_0)} & = \mathrm{y_0} \end{cases}$$

**Obs:** Existe la versión local, al probarlo para una vecindad de $(x_0, y_0)$

**Teorema (del Valor Medio)**. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

**Obs:** Se puede usar para probar Lipschitz, en caso de poder acotar la derivada.