Final P4 por e)

d) Como $W(x)$ es decreciente y $W(a) > W(b)$ $\times$

Por lo tanto, z_2 no puede ser positiva en (a,b).

e) Si z_2 fuera negativa en $(a,b) \Rightarrow z_3 = -z_2$,

la cual es positiva en (a,b) y si: $z_2'' + P_2(x) z_2 = 0$

$\Rightarrow (-z_2)'' + P_2(-z_2) = 0 \Rightarrow z_3'' + P_2(x) z_3 = 0$, lo que $\times$

Finalmente $\Rightarrow z_2$ se anula en (a,b).

f) De igual manera, si z_1 negativa $\Rightarrow z_4 = -z_1$ positiva en $(a,b) \underset{e)}{\Rightarrow}$ Cualquier solución de (2) se anula.

g) Como entre dos ceros consecutivos, z_1 es positiva o negativa se concluye lo pedido.

Prop 1

a) $z_1 = x^2$, $z_1' = 2x$ y $z_1'' = 2$.

Reemplazando

$x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 2x + 4x^2 = 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0$ ✓

$z_2 = x^2 \ln(x)$, $z_2' = x(2\ln(x) + 1)$, $z_2'' = 2\ln(x) + 3$

$\Rightarrow x^2 \cdot (2\ln(x) + 3) - 3x \cdot (x(2\ln(x) + 1)) + 4x^2 \ln(x)$

$6x^2 \ln(x) - 6x^2 \ln(x) - 3x^2 + 3x^2 = 0$ ✓

Usando Variación de parámetros

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} x^2 & x^2\ln(x) \\ 2x & x(2\ln(x)+1)\end{pmatrix} \qquad b(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ \ln(x)\end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(x)=\frac{1}{x^3}\begin{pmatrix} x(2\ln(x)+1) & -x^2\ln(x) \\ -2x & x^2\end{pmatrix}=\frac{1}{x^2}\begin{pmatrix} 2\ln(x)+1 & -x\ln(x) \\ -2 & x\end{pmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(x)\,b(x)=\begin{pmatrix} -\frac{\ln(x)^2}{x} \\ \frac{\ln(x)}{x}\end{pmatrix} \Rightarrow \int \Phi^{-1}(x)\,b(x)\,dx=\begin{pmatrix} -\frac{\ln(x)^3}{3} \\ \frac{\ln(x)^2}{2}\end{pmatrix}$$

$$\int \Phi^{-1}(x)\,b(x)\,dx= \ln(x)\begin{pmatrix} -\frac{\ln(x)^2}{3} \\ \frac{\ln(x)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_p=\ln(x)\,x^2\left(-\frac{\ln(x)^2}{3}+\frac{\ln(x)^2}{2}\right)=\boxed{x^2\ln(x)^3\left(\frac{1}{6}\right)}$$

<u>Prop 2</u> Hacer C.V del Aux $y(x)=w(u)$ $\Rightarrow$ $x y'(x)=w'(u)$

$x=e^u$ $\quad x^2y''(x)+xy'(x)=w''(u)$

$$w''(u)-3w'(u)+w(u)=0$$

$$\Rightarrow P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+1=0 \Rightarrow \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$w(u)=e^{\left(\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)u}$$

$$\Rightarrow y(x)=\boxed{x^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}}$$