MA2601-6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 11 de junio de 2021

Auxiliar 9: Trasformada de Laplace

P1. Para $a > 1$ considere la función $f(t) = a^{\lfloor t \rfloor}$, con $\lfloor t \rfloor$ el menor entero de un intervalo dado, por ejemplo, para $t \in [1, 2)$, entonces $\lfloor t \rfloor = 1$. Explique por qué f es de orden exponencial y demuestre que $L[f(t)](s) = \dfrac{1 - e^{-s}}{s(1 - ae^{-s})}$, para $s > \ln(a)$.
Ind: Integre en intervalos de $[n, n+1]$, con $n \in N$.

P2. Calcule las transformadas inversas de las siguientes funciones en el dominio de Laplace:

a) $G(s) = \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{2}{s^2 - 7} + \dfrac{4s}{s^2 + 2} + \dfrac{e^{-2s}}{s}$

b) $G(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2 + 2s - 1}$

c) $G(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2 + 1)}$

P3. Use la transformada de Laplace para resolver las siguientes ecuaciones

a) $y' - 5y = 0; y(0) = 2.$

b) $tx'' - tx' + x = 2, x(0) = 2, x'(0) = -1,$ para $t > 0$.

Propuestos

Prop1. Considere f una función periódica de período $T > 0$ continua por pedazos. Demuestre que

$$L[f](s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

Ind: Recuerde que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n$ converge para $|\lambda| < 1$.

Prop2. Resuelva usando transformada de Laplace:

$$y'' - y' - 2y = 4x^2; y(0) = 1, y'(0) = 4$$