MA2601-6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Fecha: 18 de junio de 2021

Auxiliar 10: Trasformada de Laplace II

P1. [**Calentando Motores**] Use transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = \begin{cases} 1 & \text{si } 5 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = y'(0) = 0$.

P2. [**Dominando la Heaviside**] Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

P3. [**Ecuaciones de convolución**] Resolver con transformada de Laplace la siguiente ecuación integral:

$$\int_0^t f(x)\,\text{sen}(x-t)dx = -\frac{1}{2}tf'(t)$$

tal que $f(0) = 1$

P4. Consideremos un resorte elástico que cuelga de un extremo fijo y cuyo otro extremo es libre de oscilar en dirección vertical. La ecuación que modela el movimiento de una masa m sujeta al extremo libre del resorte está dada por

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = h(t)$$

donde $y(t)$ es la posición de la masa en el instante t con respecto a la posición de equilibrio, $k > 0$ es la constante del resorte y $h(t)$ es una fuerza externa arbitraria. En lo que sigue, supondremos que inicialmente el sistema masa-resorte estaba en equilibrio de modo tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

a) Pruebe que $y(t)$ admite la siguiente expresión integral:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{mk}}\int_0^t \sin(\omega(t-\xi))h(\xi)d\xi$$

, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema masa-resorte.

b) Encuentre la solución explícita cuando:
(*i*) $h(t) = h_0$ (constante)
(*ii*) $h(t) = A\sin(\omega t)$. Recuerde que: $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$.

Propuestos

Prop1. Use transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ e^{-2t} & 2 \leq t \end{cases}$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.