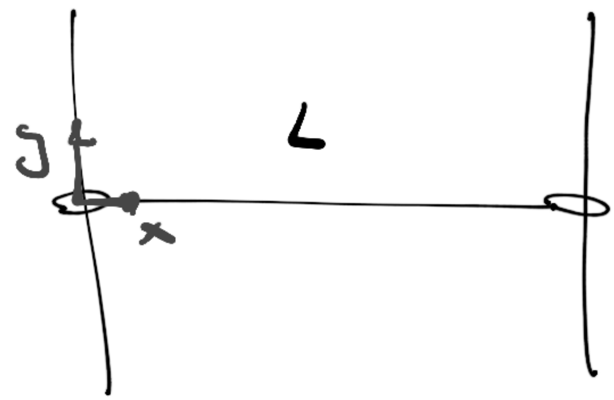
Pauta Aux 5

P1)

Bordes libres



a) Imponer cond. de borde:

Tenemos bordes libres en $x=0$ y $x=L$

$$\longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial y(x=0,t)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial y(x=L,t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{cond. de borde.}$$

b) Debemos demostrar que los modos normales de oscilación vienen dados por $y_n = B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(n\omega_1 t$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Para ello buscamos soluciones de esta cuerda

Digamos de forma general $y(x,t) = A\,\text{sen}(kx-\omega t) + B\,\text{sen}(kx+\omega t)$

(onda que va hacia la derecha

+ onda que va hacia la izq)

Luego si

Si $y(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + B\cos(kx+\omega t)$

derivemos respecto a x para luego imponer cond. de borde

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A\cdot(-\text{Sen}(kx-\omega t))\cdot k + B(-\text{Sen}(kx+\omega t))k$$

$$= -k(A\,\text{Sen}(kx-\omega t) + B\,\text{Sen}(kx+\omega t))$$

·Ahora, esto cuando $x=0$ y cuando $x=L$ es 0.

Imponiendo:

$x=0$)

$$0 = -k\left(A\,\underbrace{\mathrm{sen}(-wt)}_{=-\mathrm{sen}(wt)\ (\text{seno es impar})} + B\,\mathrm{sen}(wt)\right)$$

$$0 = -k(-A\,\mathrm{sen}(wt) + B\,\mathrm{sen}(wt))$$

$$0 = -k\,\mathrm{sen}(wt)(B-A)$$

$$\Longrightarrow B-A=0 \Longrightarrow \boxed{A=B}$$

Ahora $x=L$

$$0 = -k(A\,\mathrm{sen}(Lk-wt) + B\,\mathrm{sen}(Lk+wt))$$

tomando $A=B$

$$= -kA(\mathrm{sen}(Lk-wt) + \mathrm{sen}(Lk+wt))$$

Recordemos $\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$

$$0 = -kA(\mathrm{sen}(Lk)\cos(wt) - \cos(Lk)\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$+ \mathrm{sen}(Lk)\cos(wt) + \cos(Lk)\,\mathrm{sen}(wt))$$

$$0 = -2KA\,\text{sen}(LK)\cos(\omega t)$$

$\Rightarrow$ como es $\forall t$ $\quad \text{sen}(LK) = 0$

$$LK = n\pi$$

$$K = \frac{n\pi}{L}$$

$$\boxed{K_n = \frac{n\pi}{L}}$$ K solo tiene estos valores.

Luego usando $K_n = \frac{n\pi}{L}$ y $A = B$

$$y(x,t) = A\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \omega t\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \omega t\right)\right)$$

Usando $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

$$y(x,t) = A\Big(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) - \cancel{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}(\omega t)} +$$
$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) + \cancel{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\text{sen}(\omega t)}$$

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

Donde recordemos $K \cdot c = \omega$

$$K_n c = \omega_n$$

$$\frac{\pi n}{L} \cdot c = \omega_n$$

$$\frac{\pi c}{L} \cdot n = \omega_n$$

$$\boxed{\omega_1 \cdot n = \omega_n}$$

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t)}$$

Solución!

Además $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, $c = \text{velocidad} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

c) Dibujemos los modos normales:

$$y(x,t) = 2A\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega_1 n t)$$

n=1) primer modo :

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega_1 \cdot t)$$

notemos que cuando $\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)=0$ serán nodos

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$x = L\left(\frac{1}{2} + m\right)$$

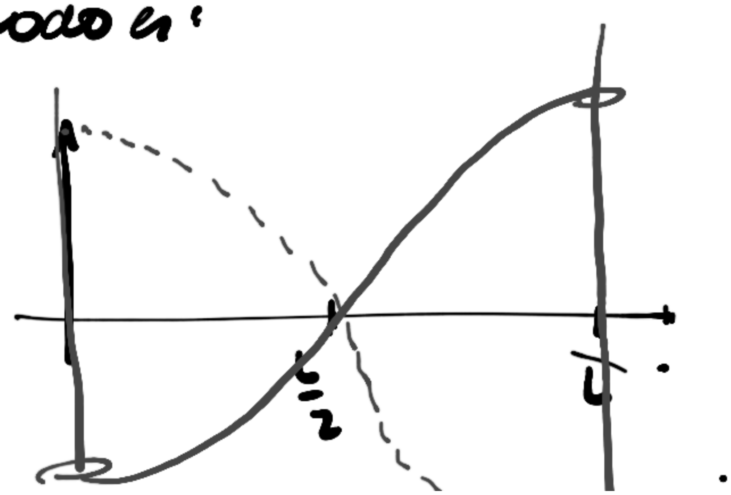
pero si $m > 1$

$x > L$,

luego solo nos quedamos con $x = \frac{L}{2}$ = nodo

punto que no se mueve

luego el nodo es:



n=2):

$$y(x,t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos(\omega_1 \cdot 2t)$$

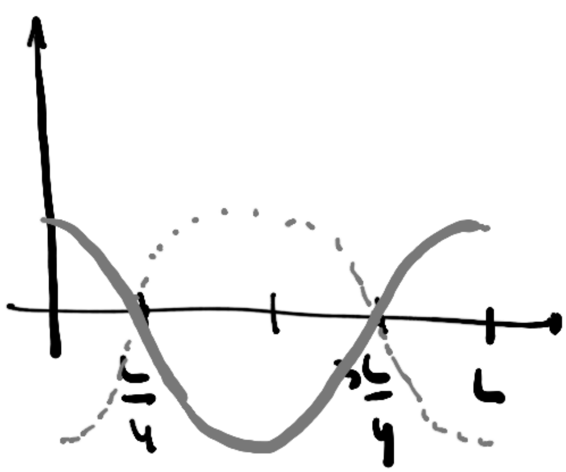
buscamos sus nodos: $\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = 0$

$$\frac{2\pi x}{L} = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$x = L\left(\frac{1}{4} + \frac{m}{2}\right)$$

cuando $m = 0, 1$

$x < L$



nodos en $x = \frac{L}{4}, \frac{3L}{4}$

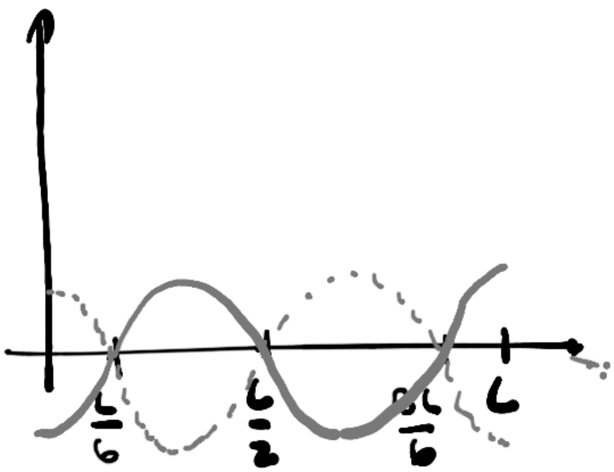
y n=3)

nodos en $\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) = 0$

$$x = L\left(\frac{1}{6} + \frac{m}{3}\right).$$

cuando $m = 0, 1, 2$

$x < L$

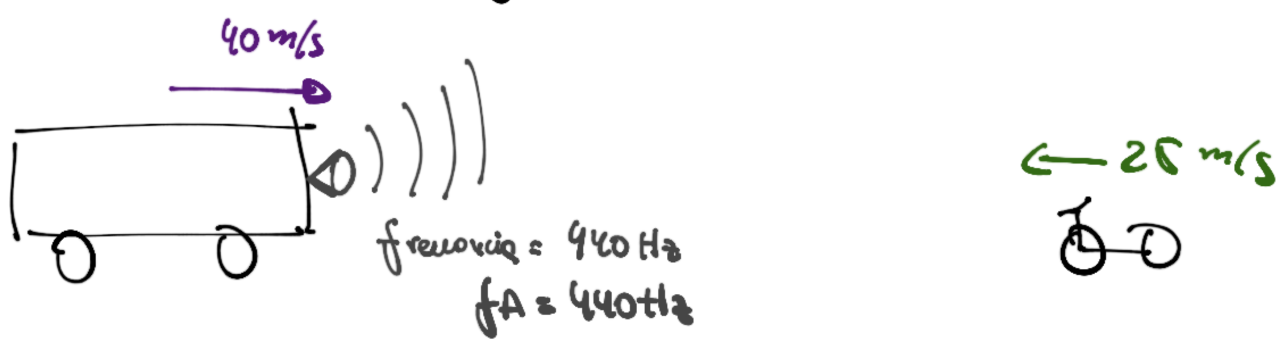


luego tenemos nodos en

$x = \frac{L}{6}, \frac{L}{2}, \frac{5L}{6}$

P2)

Tenemos un auto y un ciclista



dato: Velocidad del sonido = 340 m/s

a) Antes de cruzarse, con que frecuencia escucha el ciclista la bocina?

→ El ciclista recibe un sonido de frecuencia f,

y como $v = f \cdot \lambda$, podemos decir que $f = \frac{v}{\lambda}$

¿Qué velocidad es v? ¿¿Qué λ es?

es la velocidad del sonido relativa al ciclista

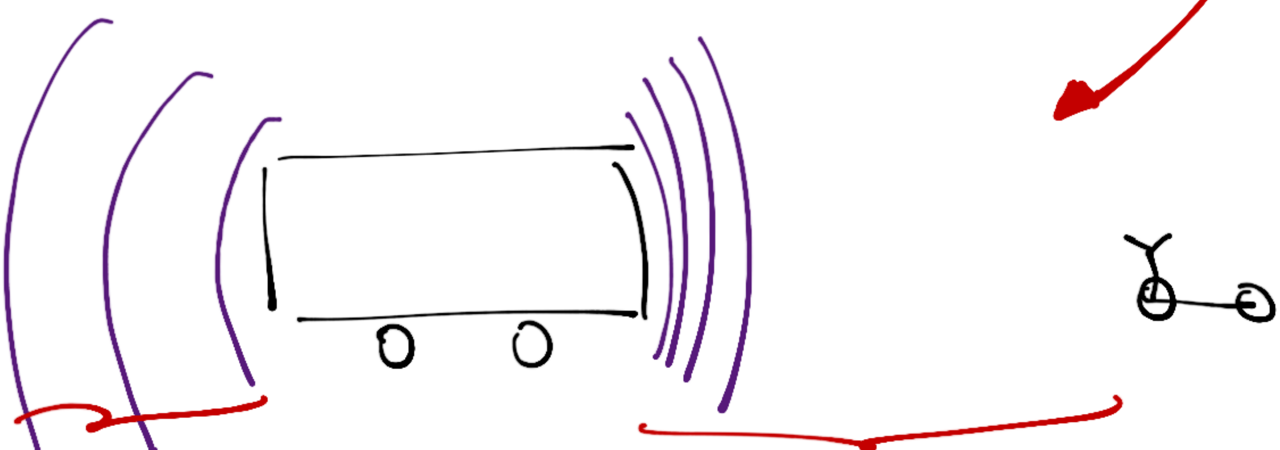
es la longitud de onda que recibe el ciclista

$$V = V_{sonido} + V_{ciclista} = 340\,m/s + 25\,\frac{m}{s} = 365\,m/s$$

ya que el ciclista se acerca a la fuente de sonido.

cuando se aleja será (parte b))

$$V = V_{sonido} - V_{ciclista}$$



Se agranda λ

Aquí la λ se acorta

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{V_{sonido} - V_{auto}}{f_A}$$

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{V_{sonido} + V_{auto}}{f_A}$$

Nos interesa cuando se acerca

$$\longrightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{V_{sonido} + V_{ciclista}}{\left(\frac{V_{sonido} - V_{auto}}{f_A}\right)}$$

{ velocidad del sonido relativa al ciclista cuando se acerca.

{ λ que siente el ciclista cuando se acerca

cuando se acerca $\boxed{f = f_A \cdot \frac{V_{sonido} + V_{ciclista}}{V_{sonido} - V_{auto}}}$

cuando se aleja $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{V_{sonido} - V_{ciclista}}{\left(\frac{V_{sonido} + V_{auto}}{f_A}\right)}$

cuando se aleja. $\boxed{f = f_A \left(\frac{V_{sonido} - V_{ciclista}}{V_{sonido} + V_{auto}}\right)}$

c) Si estuvieran quietos: no hay doppler.

La bocina le llega al ciclista como una onda de presión que viaja: Digamos

$$P(x,t) = P_0 \operatorname{sen}(\kappa x - \omega t)$$

donde $\omega = \frac{2\pi}{f_A}$ y $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ con $V_{sonico} = \lambda f_A$

$$\lambda = \frac{V_{sonico}}{f_A}$$

$$\boxed{P_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi f_A}{V_{sonico}} x - \frac{2\pi}{f_A} t\right) = P(x,t)}$$

cte

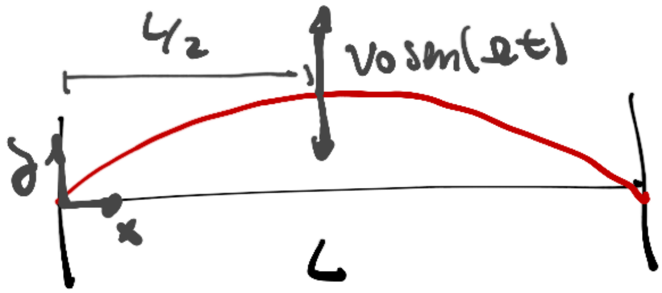
onda sonora que le llega al circuito, donde

$f_A = 440$ Hz

$V_{sonico} = 340$ m/s

P3)

Tenemos:



a) Impongamos cond. de borde y restricciones

Tenemos bordes fijos en $x=0$ y $x=L$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} y(x=0,t) &= 0 \\ y(x=L,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{cond. de borde}$$

y tenemos una restricción de que la velocidad en $x=\frac{L}{2}$ debe ser $V_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$

$$\longrightarrow \frac{\partial y\left(x=\frac{L}{2},t\right)}{\partial t} = V_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$$

b) suponemos como dice el enunciado que

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx-\omega t) + B\,\mathrm{sen}(kx+\omega t)$$

y queremos encontrar λ para cada modo de oscilación

Imponemos cond. de borde:

<u>x=0)</u>

$$y(x=0,t) = 0 = A\,\underbrace{\mathrm{sen}(-\omega t)}_{=-\mathrm{sen}(\omega t)} + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$0 = -A\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$0 = (B-A)\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\Longrightarrow B - A = 0$$

$$\boxed{B = A}$$

Luego imponemos la otra cond. de borde

$\underline{x = L)}$

$$y(x=L,t)=0 = A\,\mathrm{sen}(Lk-\omega t) + \overset{A}{\cancel{B}}\,\mathrm{sen}(Lk+\omega t)$$

$$0 = A(\mathrm{Sen}(kL-\omega t) + \mathrm{sen}(kL+\omega t))$$

Recordamos $\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta$

$$0 = A(\mathrm{sen}(kL)\cos(\omega t) - \cancel{\cos(kL)\,\mathrm{sen}(\omega t)}$$
$$+ \mathrm{sen}(kL)\cos(\omega t) + \cancel{\cos(kL)\,\mathrm{sen}(\omega t)})$$

$$0 = 2A\,\mathrm{Sen}(kL)\cos(\omega t)$$

$\Rightarrow$ como esto debe valer $\forall t$

$$\mathrm{sen}(kL) = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$\boxed{k = \frac{n\pi}{L}}$$

$n = 1, 2, 3, 4, ..$

Luego tenemos que

$$y(x,t) = A\big(\underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L} - \omega t\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L} + \omega t\right)}_{}\big)$$

usando nuevamente

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \ldots$

$$\boxed{y(x,t) = 2A \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)}$$

Por ultimo imponemos la restricción:

$$\frac{\partial y(x = L/2, t)}{\partial t} = V_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2A \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)\left(-\operatorname{sen}(\omega t)\cdot \omega\right)$$

$$= -2A\omega \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}(\omega t)$$

evaluamos en $x = \frac{L}{2}$:

$$\frac{\partial y}{\partial t}\left(x = \tfrac{L}{2}, t\right) = V_0 \operatorname{sen}(\Omega t) = -2A\omega \operatorname{sen}\left(\tfrac{n\pi}{L}\cdot\tfrac{L}{2}\right)\operatorname{sen}(\omega t)$$

$$V_0 \, sen(\Omega t) = -2A\omega \, sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) sen(\omega t)$$

¡Igualamos parte temporal con temporal y constantes con constantes:

$$\boxed{V_0 = -2A\omega \, sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$\boxed{sen(\omega t) = sen(\Omega t)} \Rightarrow \boxed{\omega = \Omega}$$

$$V_0 \neq 0 \Rightarrow sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \neq 0$$

solo sucede para $n \in$ impar!

luego volviendo atrás

$$K = \frac{n\pi}{L} \quad \text{con } n \text{ impar!}$$

$$\boxed{K_m = \frac{(2m-1)\pi}{L}}$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

Ademas

$$v_0 = -2A\omega \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$v_0 = -2A\Omega \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow A = \frac{-v_0}{2\Omega} \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right)}}_{=(-1)^{m+1}}$$

$$\boxed{A = \frac{(-1)^m v_0}{2\Omega}}$$

Con esto tenemos que

$$y(x,t) = 2A \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{L}x\right)\cos(\Omega t)$$

parte c)

$$\boxed{y(x,t) = \frac{(-1)^m v_0}{2\Omega} \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{L}x\right)\cos(\Omega t)}$$

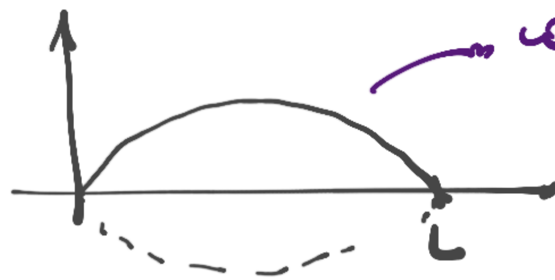
y para ver los modos $K_m = \frac{(2m-1)\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_m}$

$$\boxed{\lambda_m = \frac{2L}{2m-1}}$$

Veamos ahora los 3 primeros modos:

$m=1)$

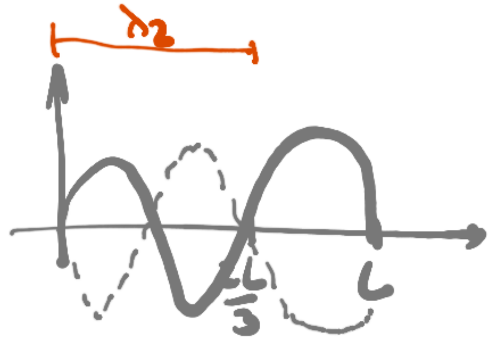
$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{2L}{2\cdot 1 - 1} = \frac{2L}{1} = 2L$$

$\rightarrow$ 

como $\lambda = 2L$, no alcanza a formarse toda una λ.

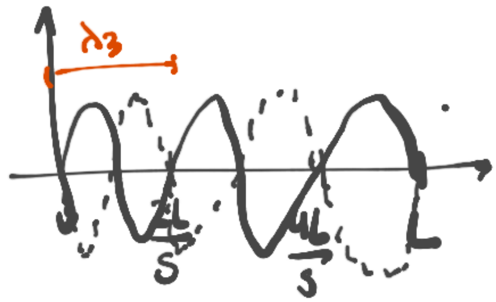
$m=2)$

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2\cdot 2 - 1} = \frac{2L}{3}$$



$m=3)$

$$\lambda_3 = \frac{2L}{2\cdot 3 - 1} = \frac{2L}{5}$$



λ3
4L
5
4L
5
L