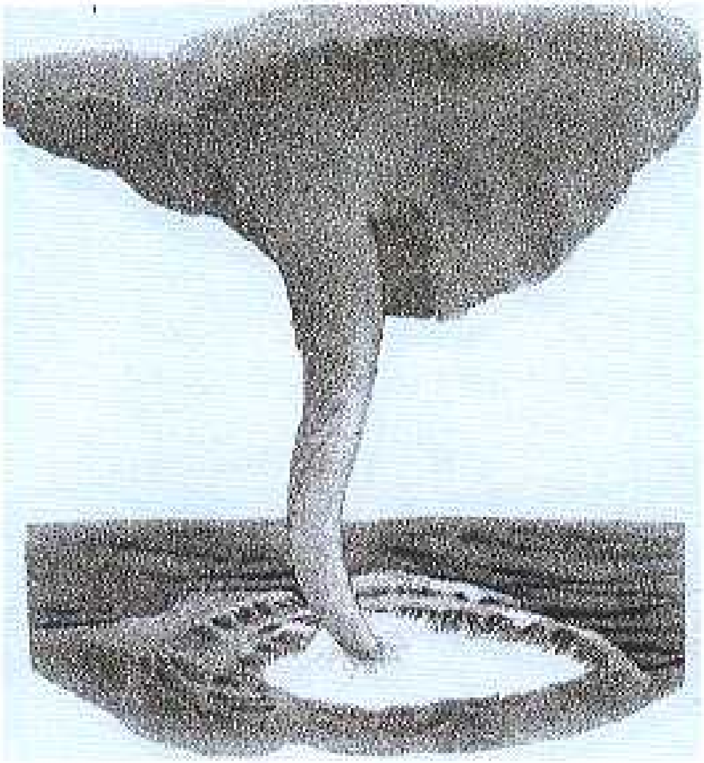
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA

Curso: Mecánica (FI-21A)

APUNTES



Patricio Aceituno y Francisco Brieva

RE-IMPRESION DE VERSION ORIGINAL PUBLICADA EN 1989

marzo 2001

INTRODUCCION

La Mecánica estudia el movimiento y equilibrio de los cuerpos. Sin embargo, las complejidades del mundo físico conducen a formulaciones complementarias de la Mecánica cuando ésta se refiere al mundo microscópico (Mecánica Cuántica) o al mundo macroscópico (Mecánica Clásica). Más aún, podemos diferenciar el modelamiento de fenómenos de acuerdo a la magnitud de las velocidades involucradas. En efecto, los movimientos caracterizados por velocidades relativamente pequeñas con respecto a la velocidad de la luz se representan por las leyes de la Mecánica no-relativista, en tanto que los movimientos con velocidades cercanas a la velocidad de la luz se modelan de acuerdo a los principios de la Mecánica relativista. En este curso se estudia la llamada Mecánica Clásica no-relativista, la cual constituye la primera rama de la Física que se desarrolló como una ciencia exacta (siglos XVI y XVII). Suele dividirse en:

- **Cinemática**, que estudia los aspectos geométricos del movimiento.

- **Dinámica**, que estudia las causas físicas del movimiento.

- **Estática**, que estudia las condiciones bajo las cuales no existe movimiento aparente.

De las disciplinas mencionadas, estos apuntes se refieren a las dos primeras. Es importante señalar que la Mecánica Clásica no-relativista es la base sobre la cual se ha construido la Física Moderna. Además, sus leyes ayudan a comprender la gran mayoría de las aplicaciones prácticas a varias ramas de la ingeniería.

• Concepto de partícula

Al analizar el movimiento de un cuerpo hay que considerar su dimensión y las deformaciones que experimenta. Esto dificulta la descripción detallada del movimiento de cada una de las componentes del cuerpo. Como una primera aproximación en el estudio del movimiento de un cuerpo definimos el concepto de **partícula** o **masa puntual** como una entidad que tiene masa pero que carece de dimensión espacial. Esto permite concentrarnos en el análisis de los conceptos fundamentales asociados al movimiento. En cursos posterio- res se levantará esta restricción simplificatoria para acercarse a la realidad física.

• Suposiciones básicas sobre espacio y tiempo

Asociados a la idea de movimiento hay dos conceptos básicos: espacio y tiempo. Al respecto haremos las siguientes suposiciones:

a) el espacio físico que nos rodea está descrito adecuadamente por la geometría euclidiana.

b) una secuencia ordenada de eventos puede medirse en una escala de tiempo absoluta y uniforme.

c) espacio y tiempo son entidades distintas e independientes.

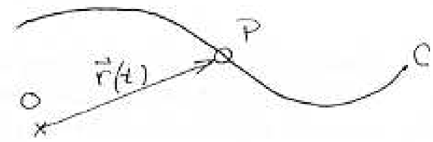
En resumen, en estos apuntes se analizan algunos aspectos de la mecánica clásica no-relativista, en el contexto de las suposiciones anteriores. Las secciones I a V se refieren al movimiento de una partícula. En la sección I se describen los conceptos geométricos del movimiento. Las leyes fundamen-tales de la Dinámica se presentan en la sección II. La sección III introduce los conceptos de trabajo y energía. Las características particulares del movimiento de una partícula bajo la acción de fuerzas centrales y en sistemas de referencia no inerciales se discuten en la secciones IV y V, respectivamente. Para terminar se incluye en la sección VI una descripción del movimiento de un sistema de partículas.

I. CINEMATICA DE LA PARTICULA

Se describen los aspectos geométricos del movimiento de una partícula, sin considerar las causas del mismo. Referimos la posición de la partícula a un sistema de referencia definido en el espacio fijo euclidiano cuyo origen es un punto O.

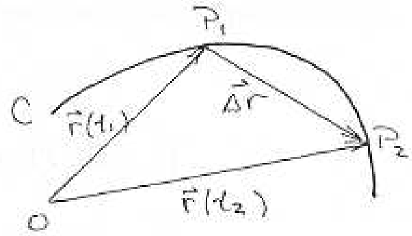
I.1 Conceptos básicos

Vector posición: determina la posición de la partícula P en el espacio con respecto a un sistema de coordenadas con origen en O.



Función itinerario: función vectorial $\vec{\mathbf{r}}(t)$ que describe la posición de la partícula en función del tiempo.

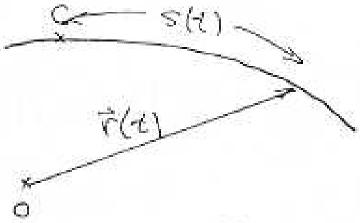
Trayectoria: curva descrita por el vector posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$ al cambiar la partícula P su posición en el tiempo (curva C C')



Vector desplazamiento: vector que describe el desplazamiento en línea recta de la partícula desde una posición inicial $\vec{\mathbf{r}}(t_1)$ a una posición final $\vec{\mathbf{r}}(t_2)$, $t_2 > t_1$

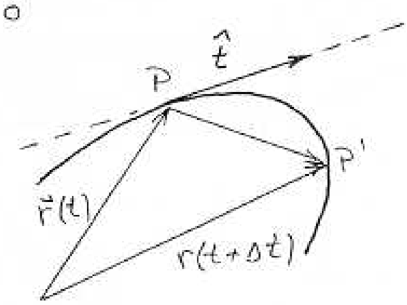
$$\vec{\Delta \mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(t_2) - \vec{\mathbf{r}}(t_1)$$

Observar que el vector desplazamiento $\vec{\Delta \mathbf{r}}$ no depende de la trayectoria entre las posiciones $\vec{\mathbf{r}}(t_1)$ y $\vec{\mathbf{r}}(t_2)$.



Distancia sobre la trayectoria: distancia **s** a la cual se encuentra el punto P, medida a lo largo de la trayectoria, a partir del origen C elegido arbitrariamente sobre la trayectoria.

Velocidad instantánea (velocidad): Se define como la variación del vector desplazamiento por unidad infinitesimal de tiempo:



$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t + \Delta t) - \vec{\mathbf{r}}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\,\vec{\mathbf{r}}(t)}{d\,t} = \dot{\mathbf{r}}$$

La velocidad es un vector que corresponde a la derivada temporal del vector posición **r**(t) de la partícula. En la figura se observa que a medida que Δt tiende a cero, la cuerda PP' tiende a confundirse con el arco de trayectoria PP'. Esto indica que la velocidad es **tangente** a la trayectoria en cada punto. Por lo tanto, si $\hat{\mathbf{t}}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria,

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v(t)\,\hat{\mathbf{t}}$$

donde v(t) es la magnitud (o módulo) del vector velocidad y se denomina rapidez de la partícula. Alternativamente, la rapidez puede expresarse en términos de la variación por unidad de tiempo de la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria:

$$v(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{d\ s(t)}{dt} = s(t)$$

se puede justificar que ambas definiciones de rapidez coinciden aplicando la regla de la cadena. En efecto,

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{ds}\frac{ds}{dt} = v(t)\,\hat{\mathbf{t}}$$

en que hemos identificado el vector $d\vec{\mathbf{r}}/dt$ con $\hat{\mathbf{t}}$ pues el vector $d\vec{\mathbf{r}}/ds$ es tangente a la trayectoria y es de largo unitario, ya que cuando $\Delta s \to 0$ el largo del vector desplazamiento tiende a coincidir con Δs (el largo de la cuerda tiende a coincidir con el largo del elemento de arco). El lugar geométrico descrito por el vector velocidad se llama la *curva hodógrafa*.

Velocidad media: Corresponde al cuociente entre variación temporal del vector posición en un intervalo finito de tiempo entre t_o y $t_o + T$.

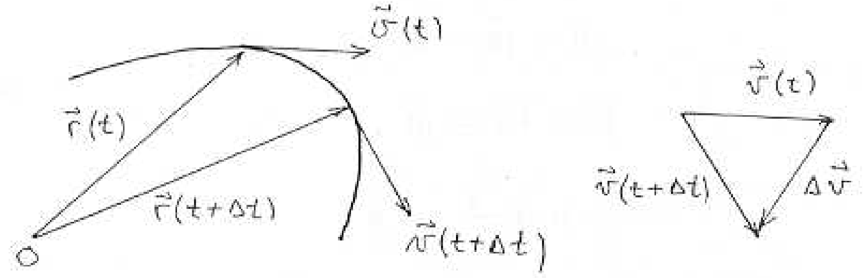
$$\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \vec{\mathbf{v}}(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\vec{\mathbf{r}}(t_o + T) - \vec{\mathbf{r}}(t_o)\right]$$

Rapidez media: Corresponde al cuociente entre el camino total recorrido a lo largo de la trayectoria en un intervalo finito de tiempo entre t_o y $t_o + T$.

$$\langle v\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} v(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[s(t_o + T) - s(t_o)\right]$$

Aceleración instantánea (aceleración): mide la tasa de variación temporal del vector velocidad:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathbf{v}}(t + \Delta t) - \vec{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\,\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt^2} \equiv \dot{\mathbf{v}} \equiv \ddot{\mathbf{r}}$$



Notar que la aceleración tiene la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{v}}$, es decir, apunta hacia la concavidad de la trayectoria. Una expresión explícita para la aceleración se obtiene de la forma siguiente:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d}{dt}\left(v\,\hat{\mathbf{t}}\right) = \dot{v}\,\hat{\mathbf{t}} + v\,\frac{d\,\hat{\mathbf{t}}}{dt}$$

La determinación de la derivada del vector unitario tangente **t** requiere de algunas consideraciones: Como

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}}\right) = 0$$

luego

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \mathbf{0}$$

lo anterior indica que la derivada de $\hat{\mathbf{t}}$ es un vector perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$ y por lo tanto perpendicular a la trayectoria. De este modo, es posible expresar la derivada como:

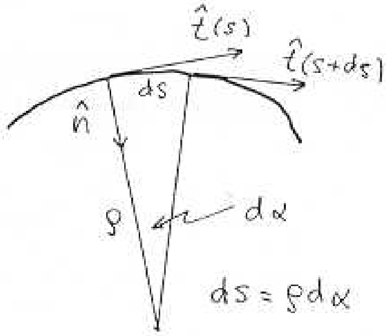
$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \lambda\,\hat{\mathbf{n}}$$

en que λ es un escalar y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario perpendicular a la dirección tangente $\hat{\mathbf{t}}$, que apunta hacia el centro de curvatura O'. Considerando que

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\,\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds}$$

se concluye que la derivada de $\hat{\mathbf{t}}$ con respecto a s también apunta en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$.

Si se define ρ como el radio de curvatura de la trayectoria en un cierto punto, se puede deducir de la figura adjunta que



$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} =: \frac{1}{\rho}\,\hat{\mathbf{n}}$$

Por lo tanto

$$\lambda = \frac{v}{\rho}$$

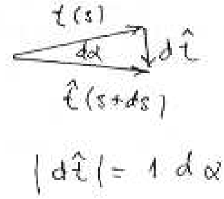
El vector aceleración se puede entonces expresar en términos de una componente tangencial a la trayectoria y una componente normal a la dirección tangente (aceleración centrípeta)

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_t + \vec{\mathbf{a}}_n$$

en que:

$$\vec{\mathbf{a}}_t = \dot{v}\,\hat{\mathbf{t}} = \ddot{s}\,\hat{\mathbf{t}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_n = \frac{v^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{n}} \equiv \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{n}}$$



La magnitud de la aceleración es:

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

• **Radio de curvatura**

El radio de curvatura de la trayectoria se puede determinar si se conoce la velocidad y la aceleración en cada punto, a partir de la expresión:

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = |(\dot{v}\hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{n}}) \times v\hat{\mathbf{t}}| \equiv \frac{v^3}{\rho}$$

De esta expresión se deduce que

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$$

• **Aceleración media**

La aceleración media se define como el cuociente entre la variación temporal de la velocidad en un intervalo finito de tiempo entre t_o y $t_o + T$.

$$<\vec{a}>_T = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} \vec{a}(t)\, dt = \frac{1}{T}\left[\vec{v}(t_o + T) - \vec{v}(t_o)\right]$$

es decir, depende sólo de la velocidad inicial y final en el intervalo de tiempo.

I.2 Problema inverso

El problema inverso se refiere a la determinación de la función itinerario $\mathbf{r}(t)$ a partir del conocimiento de la aceleración (o la velocidad) y de las condiciones iniciales del movimiento en un instante de tiempo que arbitrariamente se considerá como referencia. En efecto tenemos que:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Integrando esta ecuación podemos determinar la función velocidad,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(\tau)\, d\tau$$

en que $\vec{v}(t_o)$ es la velocidad en un instante inicial t_o. El vector posición se obtiene en forma análoga a partir de la velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(T_o) + \int_{T_o}^{t} \vec{v}(\tau)\, d\tau$$

combinando ambos resultados se obtiene

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(T_o) + \vec{v}(t_o)\,(t - T_o) + \int_{T_o}^{t} \left(\int_{t_o}^{\tau} \vec{a}(\tau')\, d\tau' \right) d\tau$$

en la mayoría de las aplicaciones, $t_o = T_o = t_i$, con lo cual:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_i) + \vec{v}(t_i)\,(t - t_i) + \int_{t_i}^{t} \int_{t_i}^{\tau} \vec{a}(\tau')\, d\tau'\, d\tau$$

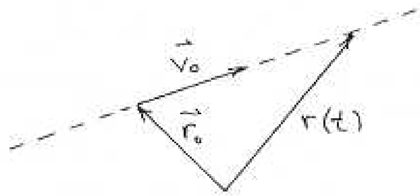
lo cual resuelve el problema planteado.

I.3 Análisis de algunos casos particulares

En esta sección analizaremos algunas aplicaciones a situaciones de interés físico. Supondremos que las condiciones se dan en $t_o = 0$ y corresponden a $\vec{r}(t_o) = \vec{r}_o$ y $\vec{v}(t_o) = \vec{v}_o$

• **Movimiento uniforme**

Está caracterizado por una aceleración nula ($\mathbf{a} = 0$). La solución del problema inverso (ver I.2) corresponde a:

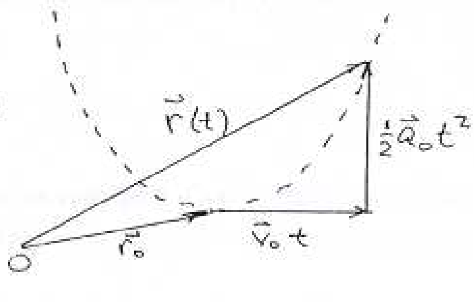


$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o t$$

Conclusión: el movimiento uniforme es rectilíneo.

• **Movimiento uniformemente acelerado**

Está caracterizado por una aceleración constante: $\vec{a}(t) = \vec{a}_o$. La solución del problema inverso (ver I.2) corresponde a:



$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}_o\, t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}_o\, t^2$$

Conclusiones:

a) la trayectoria de la partícula corresponde a una parábola, excepto en el caso cuando $\vec{v}_o$ es paralelo a $\vec{a}_o$, situación en la cual el movimiento es rectilíneo. La figura muestra el caso cuando $\vec{v}_o \cdot \vec{a}_o = 0$.

b) el movimiento es plano: el vector ~~posición~~ desplazamiento está siempre contenido en el plano definido por los vectores $\vec{v}_o$ y $\vec{a}_o$.

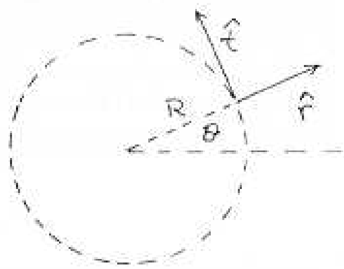
c) la curva hodógrafa es una línea recta.

En el contexto de una amplia gama de movimientos uniformemente acelerados están los que ocurren cerca de la superficie de la Tierra bajo la acción de la fuerza gravitacional terrestre, cuando no se considera el efecto de roce viscoso del aire: $\vec{a}_o = \vec{g}$, $|\vec{g}| = 9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$

Las aplicaciones más comunes en este caso son el análisis de movimientos de caída libre y de trayectoria de proyectiles.

- **Movimiento circular**

En este tipo de movimiento la magnitud del vector posición permanece constante, entendiendo que el origen del sistema de coordenadas coincide con el centro de la circunferencia:



$|\vec{r}(t)| = \text{constante} = R$

El vector posición se expresa como: $\vec{r} = R\,\hat{r}$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección radial. La trayectoria es un círculo de radio R.

La velocidad se obtiene de $\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{t}$, donde

$$v(t) = \frac{d\ s(t)}{dt} = \dot{s}$$

El camino recorrido sobre la curva, s(t), a partir de un cierto punto sobre ella es:

$$s(t) = R\,\theta(t)$$

Por lo tanto

$$v(t) = R\,\omega(t)$$

donde $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ es la velocidad angular de la partícula.

La aceleración se puede expresar en términos de sus componentes tangencial ($\vec{a}_t$) y normal ($\vec{a}_n$) a la trayectoria: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$,

donde $\vec{a}_t = R\,\alpha(t)\,\hat{t}$; $\vec{a}_n = -R\,\omega^2(t)\,\hat{r}$

$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t)$ es la aceleración angular, y $\vec{a}_n$ es la aceleración centrípeta. Observar que ésta existe siempre en el movimiento circular y su origen reside en el cambio de dirección de la velocidad. La magnitud de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = R\,(\alpha^2 + \omega^4)^{1/2}$$

Casos especiales de movimiento circular:

a) movimiento circular uniforme: $\dot{\theta} = \omega_o$ (constante). En este caso:

$$\theta(t) = \theta_o + \omega_o t$$

b) movimiento circular uniformemente acelerado, $\ddot{\theta} = \alpha_o$ (constante). En este caso:

$$\dot{\theta}(t) = \omega_o + \alpha_o t$$

$$\theta(t) = \theta_o + \omega_o t + 1/2\,\alpha_o t^2$$

I.4 Sistemas de coordenadas

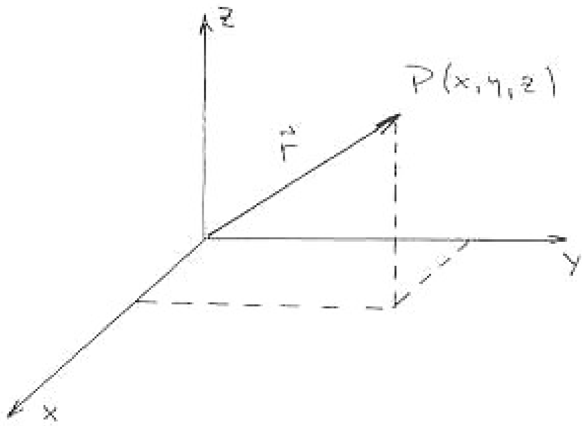
La resolución de muchos problemas cinemáticos requiere de un sistema de coordenadas explícito respecto al cual se refiere el movimiento. Uno de los sistemas posibles, descrito en la Sección I.1, corresponde a las coordenadas intrínsecas, en término de las cuales se determinaron expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula. Existen otros sistemas de coordenadas que son de gran utilidad para el análisis de problemas mecánicos. En esta sección estudiaremos en particular las coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas.

• Coordenadas cartesianas

En este caso el vector posición $\vec{r}$, que describe la trayectoria de una partícula, se refiere a una base tri-ortogonal, unitaria, $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, fija en el espacio,

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

en que: $x(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{\imath}$
$y(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{\jmath}$
$z(t) = \vec{r}(t) \cdot \hat{k}$



La velocidad se expresa como:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{\imath} + v_y(t)\,\hat{\jmath} + v_z(t)\,\hat{k}$$

en que: $v_x(t) = \dot{x}$; $v_y(t) = \dot{y}$; $v_z(t) = \dot{z}$.

De igual forma, la aceleración se expresa como:

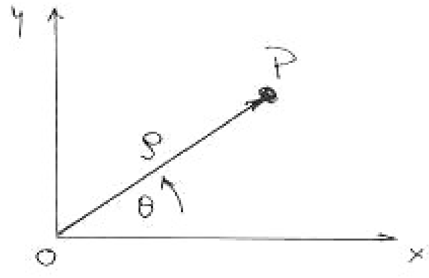
$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{\imath} + a_y(t)\,\hat{\jmath} + a_z(t)\,\hat{k}$$

en que: $a_x(t) = \ddot{x}$; $a_y(t) = \ddot{y}$; $a_z(t) = \ddot{z}$.

Al expresar el movimiento en coordenadas cartesianas se obtienen componentes independientes para la posición, velocidad y aceleración según cada uno de los ejes tri-ortogonales. De este modo, estas componentes pueden ser analizadas en forma independiente, con sus correspondientes condiciones de borde.

• Coordenadas polares

Este tipo de coordenadas es útil en ciertos casos para describir el movimiento de una partícula en un plano. En efecto, la ubicación del punto P asociado a una partícula puede determinarse, con respecto a un origen O, en términos de la distancia ρ del punto P al origen O (radio polar) y del ángulo θ que forma el radio polar con un eje arbitrario de referencia OX (ángulo polar).



Si el eje de referencia OX coincide con el eje X de un sistema cartesiano centrado en O, se tiene que:

$$x = \rho \cos\theta \qquad \rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

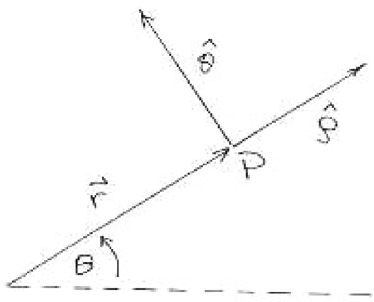
$$y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \theta = \mathrm{tg}^{-1}(y/x)$$

El vector posición queda determinado por: $\vec{r}(t) = \rho(t)\,\hat{\rho}(t)$

en que $\hat{\rho}(t)$ es un vector unitario en la dirección radial. Las variables del movimiento $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ se expresan en este sistema en función de sus componentes a lo largo de los vectores unitarios y ortogonales $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$, este último definido en la dirección de crecimiento de θ.

La velocidad queda determinada por:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$



Analizamos ahora la derivada temporal del vector unitario $\hat{\rho}$

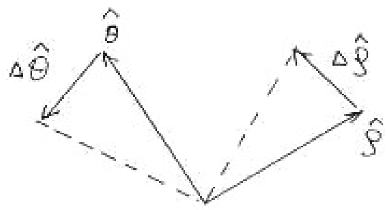
$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}\frac{d\hat{\rho}}{d\theta}$$

por otra parte como

$$\frac{d(\hat{\rho}\bullet\hat{\rho})}{dt} = 0 = 2\hat{\rho}\bullet\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

se deduce que la derivada de $\hat{\rho}$ es perpendicular a $\hat{\rho}$. Del análisis geométrico de la figura adjunta concluye que

$$\frac{|d\hat{\rho}|}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{|\Delta\hat{\rho}|}{\Delta\theta} = 1$$



y que

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

Reemplazando en la expresión para la velocidad, resulta finalmente: $\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$

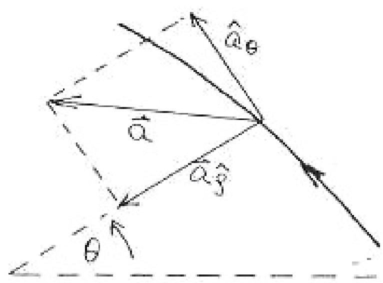
En el cálculo de la aceleración en coordenadas polares, se requiere de una expresión para $d\hat{\theta}/dt$. De la figura anterior se observa que:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\rho}$$

Luego,

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

es decir, la aceleración puede expresarse en términos de una componente radial $\vec{a}_\rho$ y una transversal $\vec{a}_\theta$.



Observación: El cálculo de la velocidad y aceleración pueden hacerse, alternativamente, en una base cartesiana, refiriendo luego los resultados a la base polar (ρ, θ). En efecto, si expresamos el vector posición $\vec{r}$ en coordenadas cartesianas tenemos:

$$\vec{r}(t) = x\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} = \rho\cos\theta\,\hat{\imath} + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} = \rho\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) = \rho\,\hat{\rho}$$

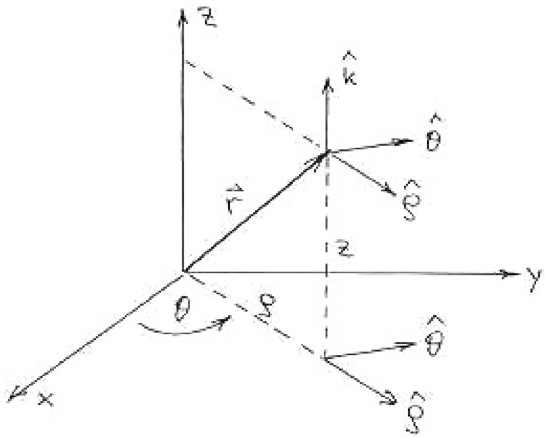
$$\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt = \dot{\rho}\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}) + \rho\,\dot{\theta}\,(-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

La aceleración se obtiene en forma análoga.

• Coordenadas cilíndricas

En el caso de un movimiento tri-dimensional, la posición de una partícula puede describirse en términos de las coordenadas cilíndricas ρ, θ, z, que corresponde a una mezcla entre un sistema de coordenadas polares (que describe el movimiento en un plano) y un sistema cartesiano para representar el movimiento en la dirección perpendicular al plano.



El vector posición es: $\vec{r}(t) = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{k}$

En el extremo del vector posición se asocia una tríada tri-ortogonal unitaria $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k})$ de modo tal que:

$$\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k}; \qquad \hat{\theta} \times \hat{k} = \hat{\rho}; \qquad \hat{k} \times \hat{\rho} = \hat{\theta}$$

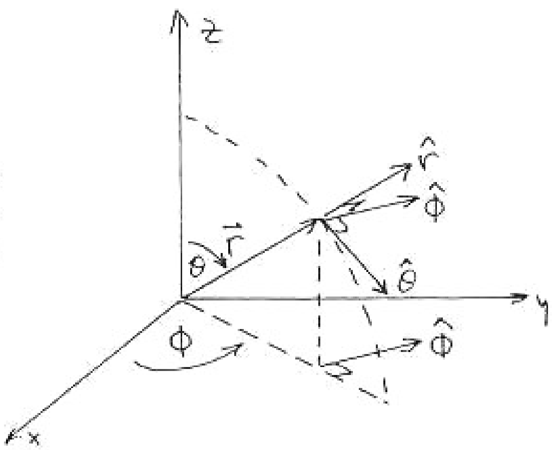
Recordando las expresiones para la velocidad y aceleración en coordenadas polares y teniendo en cuenta que $\hat{k}$ es un vector constante resultan las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\,\hat{\theta} + \ddot{z}\,\hat{k}$$

• Coordenadas esféricas

En una forma alternativa el movimiento tri-dimensional se puede describir mediante coordenadas esféricas. En este caso la posición de la partícula queda determinada por las coordenadas r, θ y ϕ, donde:



r : distancia del punto P al origen del sistema de coordenadas.

θ : ángulo medido con respecto al eje Z y que varía entre 0 y π.

ϕ : ángulo que forma el eje X con la proyección del vector $\vec{r}$ sobre el plano definido por los ejes X e Y. Varía entre 0 y 2π.

Como estrategia para encontrar expresiones para la velocidad y la aceleración utilizamos la relación entre las coordenadas esféricas y cartesianas.

$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$
$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$
$z = r \cos\theta$

De estas relaciones se pueden deducir las expresiones inversas:

$$r = \left[x^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2} \qquad \theta = \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}\right] \qquad \phi = \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{y}{x}\right]$$

Asociamos una tríada tri-ortogonal y unitaria $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ al vector posición $\vec{\mathbf{r}}(t)$ tal que:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}; \qquad \hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{\mathbf{r}}; \qquad \hat{\phi} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\theta}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario en la dirección radial creciente, mientras que $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ corresponden a vectores unitarios en la dirección creciente de θ y ϕ, respectivamente. En consecuencia, el vector posición queda definido por $\vec{\mathbf{r}}(t) = r(t)\,\hat{\mathbf{r}}(t)$

En el cálculo de la velocidad y aceleración se requiere obtener expresiones para las derivadas temporales de los vectores base $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$. Para esto expresamos estos vectores con respecto a una base cartesiana centrada en el origen O. Las derivadas temporales calculadas en este sistema son posteriormente expresadas en el sistema de coordenadas esféricas. Analizando la figura anterior es posible concluir que:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \operatorname{sen}\theta \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}} \\
\hat{\theta} &= \cos\theta \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{k}} \\
\hat{\phi} &= -\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Al derivar estas expresiones con respecto al tiempo se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathbf{r}}} &= \dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi} \\
\dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{\phi} \cos\theta\,\hat{\phi} \\
\dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \dot{\phi} \cos\theta\,\hat{\theta}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad se expresa por: $\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\hat{\mathbf{r}}}$ y finalmente,

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta\,\hat{\phi}$$

y la aceleración $\vec{\mathbf{a}}(t) = \dot{\vec{\mathbf{v}}}(t)$, como :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}}(t) = {} & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} + \\
& + (2\dot{r}\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta + r\ddot{\phi} \operatorname{sen}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos\theta)\,\hat{\phi}
\end{aligned}$$

II. DINAMICA DE LA PARTICULA

La Dinámica es la rama de la mecánica que trata las leyes físicas que gobiernan el movimiento de los cuerpos materiales. Una de sus tareas fundamentales es predecir, entre todos los modos posibles como un sistema material puede moverse, que movimiento particular ocurrirá en una situación dada. Históricamente, las leyes del movimiento fueron formuladas por Newton (1642-1727).

II.1 Leyes de Newton

LEY I: Todo cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que actúe sobre él una acción que lo oblige a cambiar de dicho estado. Originalmente esta ley fue enunciada por Galileo (1564-1642).

Comentarios:

a) esta ley se conoce también como **Principio de Inercia**, ya que describe una propiedad común a toda la materia: la inercia.

b) sistema de referencia inercial: es aquel sistema de referencia donde la Ley I se cumple.

Cantidad de movimiento o momentum lineal ($\vec{p}$)
Se define el momentum lineal de una partícula de masa m como: $\vec{p} = m\vec{v}$

LEY II: La tasa de variación temporal de la cantidad de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta (o resultante de las fuerzas) que actúan sobre él.

Por lo tanto, la ley II se expresa como:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \propto \vec{F}$$

donde $\vec{F}$ es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula,

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

Es siempre posible definir un sistema de unidades de modo tal que el coeficiente de proporcionalidad sea igual a 1. En este caso:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

que constituye la ecuación de movimiento del cuerpo sometido a la fuerza resultante $\vec{F}$. Consistente con la ley I, la expresión analítica para la ley II es válida **sólo** en un sistema de referencia inercial.

Suponiendo que la masa del cuerpo es constante, se obtiene la siguiente expresión para la ley II:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Comentarios

• Concepto de masa e inercia
El concepto de inercia, asociado a los cuerpos materiales, se utiliza para representar la resistencia que estos oponen a un cambio en el estado de movimiento. Empíricamente, resulta más fácil mover un cuerpo de

menor inercia que uno de mayor inercia. La medida cuantitativa de la inercia se denomina **masa**.

Para explicitar las ideas, consideremos dos partículas A y B aisladas que se atraen debido a una mutua interacción. En un sistema de referencia inercial se puede observar que las aceleraciones que experimentan las partículas satisfacen:

$$\vec{a}_A = - m_{BA}\,\vec{a}_B$$

donde m_{BA} es una constante positiva, característica del par interactuante A, B.

Si la partícula A se acelera más que la partícula B, se dice que A tiene menor inercia, o en forma alternativa, menor masa. Por lo tanto, m_{BA} es una medida de la **inercia relativa** entre A y B.

Eligiendo una partícula patrón P y asignándole a su inercia una masa m_P, se puede definir la masa de cualquiera otra partícula. En efecto, para la partícula B se tiene que

$$m_B = m_{BP}\, m_P$$

con lo cual podemos expresar la aceleración $\vec{a}_B$ en término de la aceleración de la partícula patrón $\vec{a}_P$,

$$\mu_{BP}\,\vec{a}_B = \frac{m_B}{m_P}\,\vec{a}_B = -\,\vec{a}_P$$

Así, podemos escribir que la magnitud de la aceleración de la partícula A con respecto a la de la masa patrón es:

$$|\vec{a}_A| = \mu_{BA}\,\frac{m_P}{m_B}\,|\vec{a}_P|$$

Haciendo el experimento directamente con las partículas A y P se tiene que:

$$|\vec{a}_A| = \frac{m_P}{m_A}\,|\vec{a}_P|$$

La evaluación de las razones entre las aceleraciones de los cuerpos A y P, basada en mediciones cuidadosas de las aceleraciones, indica que:

$$\frac{|\vec{a}_A|}{|\vec{a}_P|} = \frac{|\vec{a}\,'_A|}{|\vec{a}\,'_P|}$$

resultado que implica que:

$$\mu_{BA} = \frac{m_B}{m_A}$$

es decir, el cuociente entre las masas A y B así determinado no depende del patrón escogido ni del valor numérico asignado a m_P.

Finalmente, hay que destacar que a partir de las propiedades de la inercia se define el concepto de **masa inercial**. En la práctica, sin embargo, las razones entre masas se determinan pesándolas en una balanza, donde el peso de los cuerpos es proporcional a lo que podemos llamar su **masa gravitacional**. Afortunadamente, todos los experimentos indican que la masa inercial y gravitacional son estrictamente proporcionales entre si, razón por la cual para nuestros propósitos, no necesitamos distinguir entre las dos clases de masas.

• **Unidades** (ver Apéndice 1)
Como unidad de masa en el Sistema Internacional (SI) se considera, en forma arbitraria, un cuerpo patrón al que se le asigna una masa: $m_P = 1$ kg.

En el sistema SI, la unidad de fuerza se denomina Newton y corresponde a la fuerza que se debe ejercer sobre una masa de 1 kg para que adquiera una aceleración de 1 m s^{-2}. La unidad de fuerza tiene dimensiones: $[F] = M\,L\,T^{-2}$.

$$[F] = 1 \text{ newton} = 1 \frac{\text{kg m}}{s^2}$$

La unidad práctica de fuerza es el kilógramo-peso (kg-p), que corresponde a la fuerza con que la Tierra atrae un cuerpo de 1 kg de masa, cuando se encuentra a nivel del mar.

$$1 \text{ kg p} = 1 \text{ kg} \times 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$= 9.81 \text{ newton}$$

LEY III: Las fuerzas actúan siempre en pares: si un cuerpo A actúa sobre otro cuerpo B con una fuerza $\vec{F}_{BA}$, el cuerpo B reacciona sobre el A con una fuerza $\vec{F}_{AB}$ de modo que las magnitudes de las fuerzas son iguales y tienen la misma dirección (a lo largo de la recta que une los dos cuerpos) y sentidos opuestos.

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Observar que el par de fuerzas actúa sobre cuerpos cuyas masas son en general diferentes.

• **Principio de conservación del momentum lineal**.
Consideremos dos partículas A y B que interactúan mutuamente sin fuerzas externas actuando sobre ellas. Por el principio de acción y reacción se tiene que:

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, si $\vec{p}_A$ y $\vec{p}_B$ son los momenta respectivos, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0$$

con lo cual:

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_o \text{ (constante)}$$

es decir, en un sistema aislado, el momentum lineal total de los dos cuerpos que interactúan permanece constante en el tiempo.

II.2 Momentum angular y torque

Consideremos una partícula que se mueve con un momentum lineal $\vec{p}$, bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$.

Definición: **Momentum angular** ($\vec{l}$) de la partícula con respecto al origen O es el vector definido como:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Definición: **Torque** ($\vec{\tau}$), con respecto al origen O, que ejerce la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula se define como el vector:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

En un sistema de referencia inercial podemos entonces escribir la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

• **Relación entre $\vec{\tau}$ y $\vec{l}$**

Derivando $\vec{l}$ con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$ y recordando que en un sistema inercial se cumple que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

resulta finalmente,

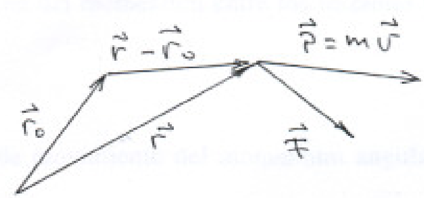
$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau}$$

la expresión anterior indica que la tasa de variación temporal del momentum angular de una partícula con respecto al origen O es igual al momento de la fuerza (torque) que se ejerce sobre ella con respecto a al origen O.

• **Comentarios**

a) el momentum angular $\vec{l}'$ y el torque $\vec{\tau}'$, relativos a un punto cualquiera O' representado por el vector $\vec{r}_0$, se definen como:

$$\vec{l}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}$$
$$\vec{\tau}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$



b) el momentum angular apunta en la dirección perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

c) el torque apunta en la dirección perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

d) la magnitud del momentum angular es: $\|\vec{l}\| = m\, v\, r \operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo entre los vectores $\vec{p}$ y $\vec{r}$.

e) en el caso de **fuerzas centrales** es decir, de fuerzas que actúan en la dirección del radio vector $\vec{r}$ ($\vec{F} = f(r)\,\vec{r}$), se tiene que:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0$$

Esto implica que el momentum angular de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas centrales permanece constante. En consecuencia, el movimiento es plano.

II.3 Integrales de la ecuación de movimiento

Es conveniente analizar la forma que toma la primera integral de la ecuación de movimiento de una partícula sometida a una fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$. En esta sección analizaremos algunos casos de interés.

• Impulso lineal

El concepto de impulso lineal está asociado a una expresión de la ley II de Newton integrada en el tiempo. En efecto:

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$$

Integrando la ecuación de movimiento en el tiempo, entre los instantes t_1 y t_2, se obtiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{\mathbf{p}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

lo que implica que:

$$\vec{\mathbf{p}}(t_2) - \vec{\mathbf{p}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

o también:

$$\vec{\mathbf{p}}(t_2) - \vec{\mathbf{p}}(t_1) = \langle\vec{\mathbf{F}}\rangle_{t_2 - t_1}(t_2 - t_1)$$

en que $\langle\vec{\mathbf{F}}\rangle_{t_2-t_1}$ es el valor medio de la fuerza aplicada en el intervalo de tiempo $(t_2 - t_1)$. El término integral se denomina **impulso lineal** y corresponde a la variación del momentum entre los instantes t_1 y t_2.

• Impulso angular

El concepto de impulso angular está asociado a la ecuación de movimiento del momentum angular, integrada en el tiempo. En efecto

$$\frac{d\,\vec{\mathbf{l}}}{dt} = \vec{\tau}$$

Integrando entre los instantes t_1 y t_2

$$\vec{\mathbf{l}}(t_2) - \vec{\mathbf{l}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\, dt$$

o también:

$$\vec{l}(t_2) - \vec{l}(t_1) = <\vec{\tau}>_{t_2-t_1}(t_2 - t_1)$$

en que $<\vec{\tau}>_{t2-t1}$ es el valor medio del torque aplicado sobre la partícula en el intervalo respectivo. El término integral se denomina **impulso angular** y corresponde a la variación del momentum entre los instantes t_1 y t_2.

• Integral de la energía

Consideremos el movimiento de una partícula de masa m constante bajo la acción de una fuerza neta **F**. La ecuación de movimiento es: $m\,\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}}$

Multiplicando (producto escalar) por la velocidad tenemos que:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

donde $v^2 = \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$. Integrando en el tiempo entre los instantes t_1 y t_2 se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2(t_2) - \frac{1}{2}\,m\,v^2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\,dt = \int_{\vec{\mathbf{r}}_1(t_1)}^{\vec{\mathbf{r}}_2(t_2)}\vec{\mathbf{F}}\cdot d\mathbf{r}$$

Esta expresión corresponde a una forma explícita de obtener la magnitud de la velocidad a partir del conocimiento de las condiciones iniciales de movimiento, de la fuerza neta sobre la partícula y de la trayectoria por ella seguida. Esta ecuación sirve además como base para introducir los conceptos de energía y de trabajo que serán discutidos en detalle en el capítulo III. En este punto basta con considerar el resultado obtenido como una herramienta de cálculo de gran utilidad para la resolución de problemas específicos.

II.4 Movimiento y sistema de coordenadas

La ecuación de movimiento es una ecuación vectorial equivalente a tres ecuaciones escalares correspondientes a su proyección sobre tres ejes de coordenadas. Supondremos en esta ocasión que la masa es constante y que existe una fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$ actuando sobre el cuerpo o partícula.

• Coordenadas cartesianas

El movimiento se proyecta sobre los tres ejes cartesianos X, Y, Z. La fuerza se expresa como:

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\,\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\hat{\mathbf{j}} + F_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

y las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$m\,\ddot{x} = F_x$$
$$m\,\ddot{y} = F_y$$
$$m\,\ddot{z} = F_z$$

• Coordenadas intrínsecas

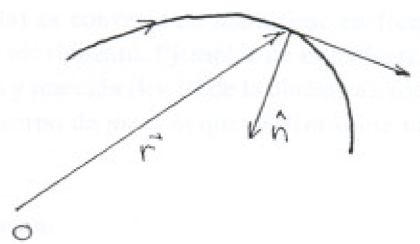
En este caso, el movimiento se proyecta sobre la dirección tangente a la trayectoria y sobre la dirección normal correspondiente:

$$\vec{\mathbf{F}} = F_t\,\hat{\mathbf{t}} + F_n\,\hat{\mathbf{n}}$$

Por consiguiente,

$$m\ddot{s} = F_t$$

$$m\,\dot{s}^2/\rho = F_n$$



• **Coordenadas cilíndricas**

En este caso,

$$\vec{F} = F_\rho\,\hat{\rho} + F_\theta\,\hat{\theta} + F_z\,\hat{k}$$

y las ecuaciones de movimiento correspondientes son:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2) = F_\rho$$

$$m(\rho\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta}) = F_\theta$$

$$m\ddot{z} = F_z$$

• **Coordenadas esféricas**

En este caso,

$$\vec{F} = F_r\,\hat{r} + F_\theta\,\hat{\theta} + F_\phi\,\hat{\phi}$$

y las ecuaciones correspondientes son:

$$m(\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2\,\text{sen}^2\theta - r\,\dot{\theta}^2) = F_r$$

$$m(r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}) = F_\theta$$

$$m(r\,\ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\cos\theta) = F_\phi$$

II.5 Elementos para el análisis del movimiento

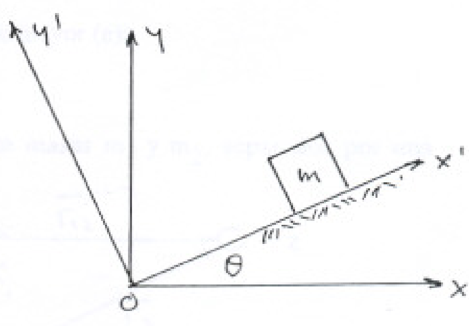
El problema central en el estudio del movimiento de un cuerpo es identificar los elementos físicos que originan el movimiento, lo cual permite escribir correctamente las ecuaciones que lo gobiernan.

• **Elección del sistema de coordenadas**

Al identificar un problema, el primer paso es elegir el sistema de coordenadas con respecto al cual se describe el movimiento. Una elección adecuada, que se adapte a la geometría del movimiento permite en la mayoría de los casos, simplificar notablemente las ecuaciones que lo describen. Por ejemplo considere el movimiento de un bloque que desliza sobre un plano inclinado, como se indica en la figura. Uno puede elegir el sistema ortogonal X-Y y escribir las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{x} = F_x$$

$$m\ddot{y} = F_y$$



más la restricción: $y/x = \text{tg}\,\theta$. Alternativamente, como el movimiento es sobre el plano, se puede elegir el eje OX' para describirlo:

$$m\ddot{x}' = F_{x'}$$

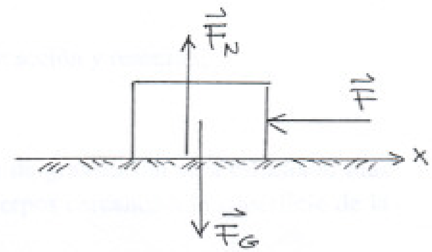
No puede haber aceleración en el eje OY' porque el bloque abandonaría el plano inclinado.

• Diagrama de fuerzas de cuerpo libre

En el análisis del movimiento de un cuerpo (o de una partícula) es conveniente identificar en forma vectorial **todas** las fuerzas que actúan sobre él y que definen su movimiento. Ejemplos de estas fuerzas son: gravitacionales (u otras de origen fundamental), las de acción y reacción (ley III de la dinámica), roce, tensiones, empuje, etc. Para ilustrar la idea, consideremos un cuerpo de masa m que desliza sobre una superficie horizontal sin roce y tirado por una cuerda.

En el diagrama adjunto se han identificado todas las fuerzas que actúan:

$\vec{F}$: fuerza de tracción ejercida por la cuerda.
$\vec{F}_G$: fuerza gravitacional con que la Tierra atrae al cuerpo.
$\vec{F}_N$: fuerza de reacción que la superficie ejerce sobre el cuerpo de masa m.



Las ecuaciones del movimiento son:

$$m\ddot{x} = F$$
$$0 = -F_G + F_N$$

• Cuerdas ideales

Se llama cuerda ideal a una cuerda inextensible, de masa despreciable, flexible y que no admite fuerzas transversales. Esto es una idealización de lo que sucede con una cuerda sometida a una fuerza $\vec{F}$. Debido a la condición de masa despreciable, la fuerza aplicada en el extremo de la cuerda se transmite hasta el otro extremo sin atenuarse. Esta solicitación recibe el nombre de **tensión de la cuerda**.

II.6 Ley de gravitación

Actualmente se conoce la existencia de cuatro interacciones (fuerzas) fundamentales en la naturaleza: gravitacionales, electromagnéticas, fuertes y débiles. Por su importancia histórica y su relación con las aplicaciones más intuitivas de la mecánica, se analizan a continuación las fuerzas gravitacionales entre dos cuerpos de masa m_1 y m_2.

La ley de la gravitación universal fue establecida por Newton, quien a su vez se basó en las leyes de Kepler que definen los aspectos fundamentales del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Estas son:

i) los planetas describen órbitas elípticas en torno al Sol, que ocupa uno de sus focos.

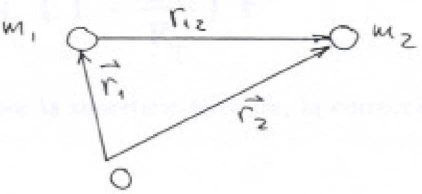
ii) el radio vector (con origen en el Sol) barre áreas iguales en tiempos iguales.

iii) el período de la órbita de un planeta se relaciona con el semi-eje mayor (a):

$$T^2 \text{ a } \langle a \rangle^3$$

Newton estableció la siguiente ley general para dos cuerpos de masas m_1 y m_2, separados por una distancia r_{12} :

$$|\vec{F}| \propto \frac{m_1 \; m_2}{|r_{12}|^2}$$



donde: $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

La fuerza $\vec{F}$ actúa en la dirección de la recta que une las masas.

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 \; m_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}$$

$G = (6.673 \pm 0.003) \times 10^{-11}$ n-m^2 kg^{-2}

Es evidente que la ley de fuerzas gravitacionales satisface el principio de acción y reacción,

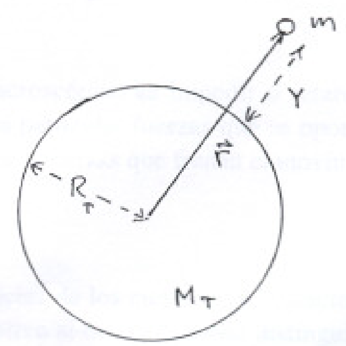
$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$

El movimiento general de cuerpos o partículas gobernados por la ley de gravitación será estudiado más adelante. Por ahora analicemos como caso especial la situación de cuerpos cercanos a la superficie de la Tierra.

• Movimiento cerca de la superficie de la tierra.

Constituye ésta una aplicación particular de la ley gravitacional en que uno de los cuerpos con masa M_T es la Tierra y el otro un cuerpo con masa m. Supondremos que la Tierra tiene simetría esférica. Se puede demostrar (teorema de Gauss) que el campo gravitacional alrededor de ella es equivalente al campo producido por una partícula de masa M_T colocada en el centro de la Tierra. Por lo tanto, haciendo coincidir el origen con ese punto se tiene que la fuerza que se ejerce sobre el cuerpo de masa m es:

$$\vec{F}_m = - G \frac{m \; M_T}{r^2} \hat{r} \qquad (r \geq R_T)$$



El primer resultado importante es que todo cuerpo es atraído en dirección radial hacia el centro de la Tierra. Veamos qué sucede si el cuerpo se encuentra a una altura "y" sobre la superficie:

$$\vec{F}_m = - G \frac{m \; M_T}{(R_T + y)^2} \hat{r}$$

Expandiendo esta expresión en torno a y = 0 (teorema de Taylor) resulta:

$$\frac{1}{(R_T + y)^2} = \frac{1}{R_T^2} \left[1 - \frac{2\,y}{R_T} \pm \ldots \right]$$

Para alturas relativamente pequeñas sobre la superficie las correcciones de orden mayor se pueden despreciar porque $y << R_T$,

$$\vec{F}_m = - m \left\{ \frac{G\,M_T}{R_T^2} \right\} \left(1 - \frac{2\,y}{R_T} \right) \hat{r}$$

Observar que hasta alturas del orden de 100 km sobre la superficie terrestre, la corrección al valor correspondiente en la superficie es a lo más de 1%.

Definición: aceleración de gravedad sobre la superficie de la Tierra

$$\vec{g}_o = -\frac{G M_T}{R_T^2}\hat{r}$$

de las expresiones anteriores se deduce que la aceleración de gravedad disminuye con la altura de acuerdo a la expresión:

$$\vec{g}(y) = \vec{g}_o\left[1 - \frac{2y}{R_T}\right]$$

Por lo tanto la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m puede expresarse como:

$$\vec{F} = m\,\vec{g}$$

Si el cuerpo se encuentra a nivel del mar: $\vec{F} = m\,\vec{g}_0$

$|\vec{g}_0| = 9.81\ m\ s^{-2}$ (en Santiago este valor es $9.79\ m\ s^{-2}$)

En general, a menos que se explicite, supondremos que la aceleración de gravedad es constante e igual a $\vec{g}_0$

La magnitud escalar de la fuerza gravitacional sobre un cierto cuerpo se denomina **peso** y corresponde a la magnitud F = mg de la fuerza con que la Tierra atrae a un cuerpo de masa m.

II.7 Fuerzas de roce o de fricción

En esta sección estudiaremos fuerzas de contacto cuyo efecto macroscópico es impedir o retardar el movimiento relativo entre dos cuerpos. Entre otras, analizaremos en particular fuerzas que se oponen al deslizamiento relativo de las superficies de contacto entre dos cuerpos y fuerzas que frenan el movimiento de un cuerpo que se desplaza en el interior de un fluido.

• Fuerzas de roce entre dos cuerpos en contacto

Su origen se debe a las irregularidades (rugosidades) en las superficies de los cuerpos en contacto y su efecto es producir una resistencia al deslizamiento de un cuerpo relativo al otro. Podemos distinguir dos situaciones:

a) Fuerzas de roce estático

Experimentalmente se observa que para poner en movimiento un cuerpo que está en contacto con otro, es necesario aplicar sobre él una fuerza mínima paralela a la superficie de contacto. Esta fuerza mínima externa corresponde a la máxima fuerza de roce estático que impide el movimiento del cuerpo.

La fuerza de roce estático es un fuerza <u>variable</u> que impide que dos cuerpos en contacto empiecen a desplazarse uno con respecto al otro. Su magnitud máxima es proporcional a la magnitud de la fuerza ($\vec{N}$) de interacción entre los cuerpos en contacto, en dirección perpendicular a la superficie de contacto.

$$|\vec{F}_{RE}| \leq \mu_e |\vec{N}| = |\vec{F}_{RE\ máx}|$$

donde μ_e es el coeficiente de roce estático. Es conveniente destacar que la fuerza de roce estático es independiente del área de la superficie de contacto y que μ_e depende del estado de ella y de la naturaleza del material de los cuerpos en contacto.

b) **Fuerza de roce cinético** (o dinámico, o deslizante)
La experiencia muestra que una vez iniciado el movimiento relativo entre los cuerpos en contacto se requiere, para mantenerlo, una fuerza externa menor (fuerza de roce cinético) que la necesaria para iniciarlo,

$$\vec{F}_{RC} < \vec{F}_{RE\,\text{máx}}$$

La dirección de esta fuerza es **siempre** opuesta a la dirección del movimiento relativo de los dos cuerpos en contacto y empíricamente se determina que su magnitud es proporcional a la magnitud de la fuerza de interacción normal ($\vec{N}$) entre ambos:

$$|\vec{F}_{RC}| = \mu_c |\vec{N}|$$

donde μ_c es el coeficiente de roce cinético (o dinámico). Si la velocidad relativa es pequeña y si las superficies no son deformadas por efecto del roce, la fuerza de fricción es independiente del área de contacto y de la velocidad relativa entre los cuerpos.

• **Fuerza de roce viscoso**
Corresponde a la fuerza de resistencia que actúa sobre un cuerpo que se desplaza en el interior de un fluido. En general esta fuerza depende de las características del fluido, del tamaño y geometría del cuerpo y de la velocidad del mismo. Con respecto a esta última variable la fuerza de roce viscoso se puede modelar según la expresión:

$$\vec{F}_{RV} = -k\,|\vec{v}|^n\,\hat{v}$$

donde n es un parámetro que depende de las condiciones particulares del movimiento. Así, en el caso particular de una esfera moviéndose con una velocidad moderada en el interior de un líquido o de un gas, la fuerza viscosa de fricción puede expresarse como:

$$\vec{F}_{RV} = -k\,\vec{v} \quad \text{(ley de Stokes)}$$

donde el coeficiente de fricción k está dado por: $k = 6\,\pi\,R\,\eta$

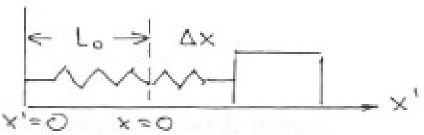
η es el coeficiente de viscosidad del fluido y R el radio de la esfera. Valores típicos de η para el agua (expresados en n s m^{-2}) varían entre 0.656×10^{-2} y 1.792×10^{-2}, mientras que para el aire η varía entre 1.71×10^{-3} (T = 0 °C) y 1.90×10^{-3} (T = 40 °C).

II.8 Fuerzas de restitución. Movimiento armónico simple

Uno de los casos más comunes en Física, desde el punto de vista teórico y práctico, se refiere a la acción de una fuerza lineal de restitución, esto es, que tiende siempre a llevar al cuerpo hacia una posición de equilibrio. En particular analizaremos aquí el movimiento bajo la acción de una fuerza de restitución cuya magnitud es proporcional al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio. Ejemplos típicos de este tipo de movimiento son el caso del péndulo sometido a pequeñas oscilaciones y la vibración de un resorte. En el primer caso, la fuerza de gravedad actúa como una fuerza de restitución, mientras que en el segundo ejemplo es la fuerza elástica de restitución del resorte la que condiciona el movimiento.

• **Resorte. Ley de Hooke**
El resorte, en su régimen elástico, constituye un mecanismo físico que produce fuerzas de restitución lineales como las mencionadas anteriormente. Para su estudio suponemos que un resorte tiene un largo natural L_o y una masa despreciable.

Consideremos un cuerpo de masa m atada al extremo del resorte, como se indica en la figura adjunta. Interesa estudiar el movimiento del cuerpo sometido a esta fuerza de restitución, cuando se lo saca de su posición de equilibrio.



Se ha determinado experimentalmente que en el límite elástico del resorte, la fuerza que actúa sobre un cuerpo atado a él es proporcional al desplazamiento del cuerpo con respecto a la posición de equilibrio estable $x' = L_o$,

$$\vec{F} = -k\,(x' - L_o)\,\hat{x}' \qquad \text{(Ley de Hooke)}$$

Esta es la fuerza que actúa cuando se ha sacado al resorte del equilibrio, ya sea por alargamiento o compresión. Si medimos el desplazamiento con respecto al eje **x** y considerando que la dirección del eje **x'** coincide con la del eje **x**, se tiene que

$$x = x' - L_o$$

con lo cual:

$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{x}$$

donde k es el coeficiente de elasticidad o constante del resorte. Por lo tanto, la ecuación de movimiento para el cuerpo de masa m expresada con respecto a la posición de equilibrio del resorte es:

$$m\ddot{x} = -k\,x$$

que se conoce como la ecuación del **oscilador armónico**.

Definiendo la frecuencia angular ω_o como:

$$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

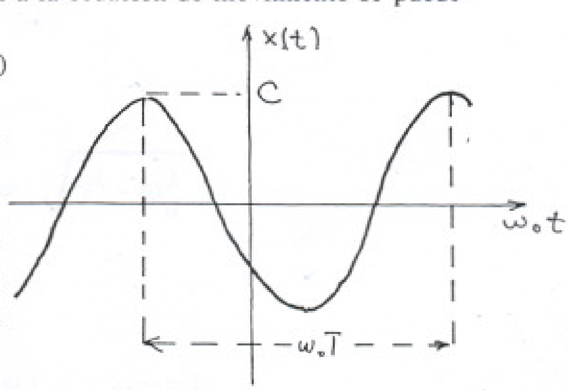
se tiene que la solución general de la ecuación general es (ver Apéndice 2):

$$x(t) = A\cos\omega_o t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_o t$$

donde A y B son constantes de integración que se determinan una vez conocidas las condiciones iniciales del movimiento ($x(t_o)$ y $x(t_o)$). Alternativamente, la solución a la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$x(t) = C\cos(\omega_o t + \phi)$$

siendo en este caso, C y ϕ las correspondientes constantes de integración.



La figura muestra la variación temporal de la posición del cuerpo. El valor máximo de x(t) se denomina amplitud de la oscilación y corresponde a la constante C mientras que a f se denomina la fase de la oscilación.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad\qquad \phi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)$$

El periodo de la oscilación corresponde al tiempo requerido para que el movimiento realice un ciclo completo: $T\,\omega_o = 2\pi$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La frecuencia lineal o natural del oscilador se define como el número de ciclos por unidad de tiempo,

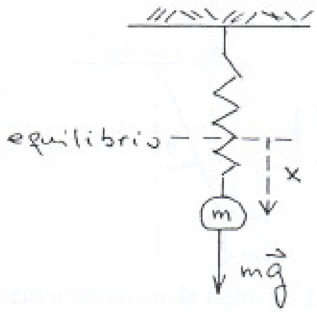
$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

la que en función del periodo T del oscilador se expresa como: $f_o = 1/T$

• Movimiento armónico amortiguado

En el análisis del oscilador armónico ideal (resorte) no hemos tomado en cuenta las fuerzas de roce que pueden afectar el movimiento del cuerpo. Para ilustrar este efecto, consideremos que el cuerpo de masa m atado a un resorte se encuentra además sometido a una fuerza de roce viscosa que varía linealmente con la velocidad. Por ejemplo, la situación podría corresponder al movimiento de un cuerpo colgado de un resorte con amortiguamiento debido al roce viscoso con el aire. La ecuación de movimiento con respecto a la posición de equilibrio del cuerpo es:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$



La resolución de esta ecuación diferencial homogénea de segundo orden implica (ver Apéndice 2) encontrar la ecuación característica:

$$m s^2 + c s + k = 0$$

cuya solución es:

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Hay tres casos que estudiar:

a) $c^2 > 4mk$ (sobre amortiguamiento). En este caso,

$$s = -\gamma \pm \omega_1$$

donde

$$\gamma = \frac{c}{2m} \qquad \omega_1 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

siendo ω_o la frecuencia natural de vibración del resorte.

La solución general en este caso es:

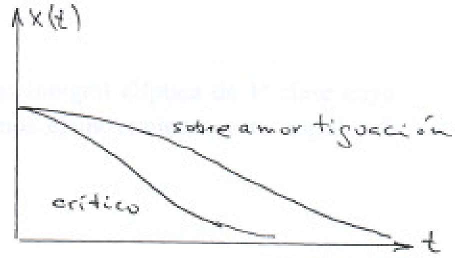
$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{\omega_1 t} + B e^{-\omega_1 t}\right)$$

la que tiene la dependencia temporal indicada cualitativamente en la figura adjunta.

b) $c^2 = 4mk$ (amortiguamiento crítico). La solución de la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\,(A + Bt)$$

y la amplitud decrece más rapidamente que en el caso anterior sin que el cuerpo alcance a oscilar (ver figura).



c) $c^2 < 4\,m\,k$. En este caso,

$$s = -\gamma \pm i\,\omega_2$$

donde

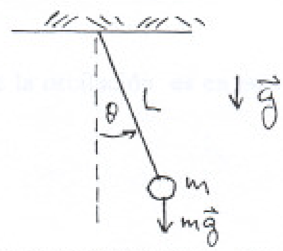
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

La solución correspondiente es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(a \text{ sen } \omega_2 t + b \cos \omega_2 t)$$

solución que corresponde a un movimiento armónico amortiguado de frecuencia $\omega_2 < \omega_o$ (ver figura).

• Movimiento del péndulo



Consideremos el movimiento de un péndulo de masa m suspendido por una cuerda ideal de largo L, luego de separarlo un ángulo θ con respecto a la vertical. En ausencia de otras fuerzas, es la fuerza gravitacional la que actúa para restituir la masa a su posición de equilibrio (θ =0).

En todo momento el péndulo se mueve en la dirección tangencial al arco de circunferencia de radio L. La componente de la fuerza gravitacional (mg) en la dirección de la cuerda (mg cos θ) queda compensada por la tensión ejercida por la cuerda. La ecuación del movimiento en la dirección tangencial es:

$$-mg \text{ sen } \theta = m\,a_t$$

donde a_t es la aceleración tangencial. Como $a_t = \ddot{s}$ y $\theta = s/L$ ($\ddot{s} = L\ddot{\theta}$), la ecuación de movimiento resultante es:

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \text{ sen } \theta = 0$$

con

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

La ecuación diferencial de segundo orden que describe el movimiento tiene una estructura diferente de las analizadas anteriormente. Para buscar una solución, se multiplica la ecuación anterior por θ obteniendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) - \omega_o^2 \frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0$$

Esto implica que:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_o^2 \cos\theta = K$$

donde K es una constante de integración. Despejando θ e integrando se obtiene:

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{d\,\theta}{\sqrt{2K + \omega_o^2\ \cos\ \theta}} = \int_{t_i}^{t_f} dt$$

El término de la izquierda en la ecuación anterior corresponde a una integral elíptica de 1ª clase cuya discusión va mas allá del objetivo de este curso. Aquí estudiaremos el movimiento para ángulos θ pequeños. En este caso podemos aproximar

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta$$

y la ecuación diferencial aproximada que describe el movimiento es:

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2\,\theta = 0$$

Esta ecuación corresponde a la del oscilador armónico. Su solución es:

$$\theta(t) = \theta_o \cos(\omega_o t + \phi)$$

donde θ_o y ϕ son las constantes de integración correspondientes. El periodo de la oscilación es en este caso:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

III. TRABAJO Y ENERGIA

En el caso de una partícula sometida a una fuerza arbitraria F, no existe un método lo suficientemente general para resolver la ecuación de movimiento,

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

y encontrar, en todos los casos, las soluciones correspondientes en forma analítica. Sin embargo, hay muchas situaciones en las cuales por métodos simples se puede obtener información importante acerca del movimiento. Uno de ellos es el método del trabajo y la energía que está basado en el análisis de la primera integral de la ecuación de movimiento (sección II.3). En efecto, suponiendo que la masa es constante, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

ecuación que alternativamente se puede escribir como

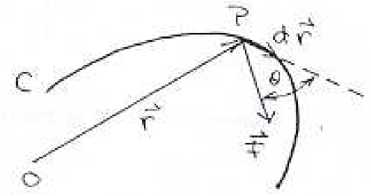
$$d\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Asociados a las ecuaciones previas existen los conceptos de trabajo, energía cinética y potencia, cuyo desarrollo será la parte central de este capítulo.

III.1 Conceptos básicos

• Trabajo

Consideremos una partícula que describe la trayectoria (c) al moverse bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$. La partícula de masa m en el punto P de la trayectoria experimenta un cambio de posición $d\vec{r}$ debido a la acción de la fuerza $\vec{F}$. Se dice que la fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre la partícula realiza un trabajo infinitesimal dW



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

llamando θ el ángulo entre la fuerza y la dirección del desplazamiento, podemos expresar dW como:

$$dW = |\vec{F}|\,|d\vec{r}|\,\cos\theta$$

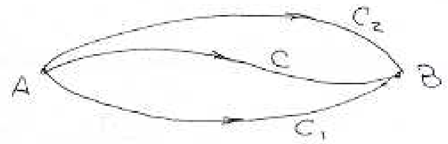
esto es, el trabajo infinitesimal realizado por la fuerza sobre la partícula es igual al producto entre el desplazamiento de ésta y la magnitud de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. En particular, si la fuerza es perpendicular al desplazamiento ésta no realiza trabajo. Ejemplos de esta situación son la fuerza de gravedad en la superficie de la tierra para desplazamientos horizontales, la fuerza normal de reacción de una superficie sobre un cuerpo, la tensión de una cuerda que sujeta una masa describiendo un movimiento circular, etc.

En general el trabajo puede ser positivo o negativo dependiendo de la dirección relativa de la fuerza con respecto a la dirección del desplazamiento. El trabajo total realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula cuando ésta se desplaza a lo largo de la trayectoria (c) del movimiento desde un punto A a un punto B es:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

El término de la derecha en la ecuación anterior corresponde a una integral de línea y muestra que en general el trabajo realizado para ir de A a B **depende de la trayectoria** elegida,

$W_{AB}(C) \neq W_{AB}(C_1) \neq W_{AB}(C_2)$



Esto se debe a la geometría de la trayectoria elegida y al hecho que la fuerza **F** es, en general, una función de posición.

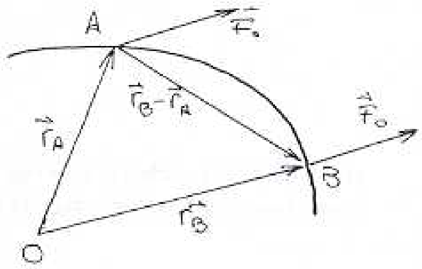
Unidades: la unidad del trabajo corresponde, por definición, al producto de una unidad de fuerza por una unidad de longitud. En el sistema SI, la unidad de trabajo se denomina **joule**, y se define como:

$$[W] = \text{joule} = \text{newton-m}$$

y corresponde al trabajo realizado por la fuerza de 1 newton para desplazar la partícula en 1 metro, en la dirección de acción de la fuerza.

Ejemplo: trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}_o$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}_o \bullet d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{F}}_o \bullet (\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A)$$



En este caso particular, el trabajo depende sólo de la posición inicial y final de la partícula, siendo independiente de la trayectoria seguida.

- **Potencia**

Se define como la tasa de variación temporal del trabajo realizado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la partícula,

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Recordando que $dW = \vec{\mathbf{F}} \bullet d\vec{\mathbf{r}}$

se tiene que $P = \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{\mathbf{v}}$

También interesa definir la potencia media en un intervalo de tiempo T,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, dt$$

$$\langle P \rangle = \frac{W(t)}{T}$$

es decir, corresponde al trabajo total realizado en el periodo T dividido por el tiempo que se tardó en realizarlo.

Unidades: la unidad del potencia corresponde, por definición, al cuociente entre una unidad de trabajo y una unidad de tiempo. En el sistema SI, la unidad de potencia se denomina **watt**, y se define como:

$$[P] = \text{Watt} = \frac{\text{Joule}}{\text{seg}}$$

y corresponde al trabajo de 1 joule realizado en un tiempo de 1 segundo. Una unidad práctica de potencia es el HP (1 HP = 746 watt). Otra unidad práctica de trabajo es el kw-hora que equivale a $3.6\ 10^6$ j

• **Energía cinética (K)**

Definición: la energía cinética (K) de una partícula de masa m que se mueve con velocidad **v** es:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

en que $\vec{p}$ es el momentum lineal de la partícula. Es simple comprobar que la unidad en que se mide la energía cinética corresponde a la unidad de trabajo.

III.2 Teorema de las fuerzas vivas

Podemos ahora interpretar la integral de la ecuación de movimiento discutida en la introducción de este capítulo. En efecto, se había obtenido que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

ecuación que en términos de la energía cinética y de la potencia se expresa como:

$$\frac{dK}{dt} = P$$

Esta es la llamada ecuación de la potencia y expresa que la potencia asociada al trabajo realizado por la fuerza F sobre la partícula es igual a la tasa de variación temporal de su energía cinética. Recordando que:

$$P\,dt = dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e integrando desde un punto A a un punto B a lo largo de una trayectoria (c), se tiene que

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

resultado conocido como el **teorema de las fuerzas vivas** y que expresa que el trabajo realizado por la fuerza resultante $\vec{F}$ sobre una partícula para ir desde el punto A al punto B a lo largo de una trayectoria (c) es igual a la variación de su energía cinética entre los puntos A y B, respectivamente.

III.3 Fuerzas conservativas. Energía potencial

Las fuerzas conservativas se caracterizan por ser estáticas (es decir, independientes del tiempo) y porque la integral de trabajo es **independiente** de la trayectoria de integración, es decir

$$\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

no depende de la trayectoria seguida por la partícula al desplazarse entre las posiciones A y B. Para que esta integral sea independiente de la trayectoria es necesario que $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ sea un diferencial exacto,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\,dV$$

en que V = V(**r**) es una función escalar. Como V = V(x,y,z), podemos expresar el diferencial dV como

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Además $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz$. Entonces exigiendo que $\vec{F} \cdot d\vec{r} = - dV$, y como dx, dy y dz son independientes, concluimos que si F es conservativa

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

La función V(x,y,z) se denomina función energía potencial. Observar que la función V queda determinada salvo una constante. Introduciendo el operador diferencial gradiente,

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

se puede expresar la fuerza como

$$\mathbf{F} = - \nabla V$$

El cálculo de la función energía potencial V se obtiene a partir del trabajo infinitesimal dW

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla V \cdot \mathbf{dr}$$

$$dW = - \left[\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial x} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right] = - dV$$

Integrando a lo largo de una trayectoria desde un punto A a un punto B se obtiene que

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Es interesante hacer notar que la función energía potencial queda determinada en forma relativa al punto con respecto al cual se calcula el trabajo (A). Se puede escoger arbitrariamente el valor de la energía potencial en ese punto, con lo cual V en cualquier otro punto (B, por ejemplo) queda medido con respecto al valor de referencia.

• **Teorema de conservación de la energía mecánica**

Este teorema corresponde a una forma particular del teorema de las fuerzas vivas cuando el trabajo es realizado sólo por fuerzas conservativas. En efecto, teníamos que

$$dK = dW = - dV$$

Por tanto

$$d(K + V) = 0$$

es decir, la suma de las variacione de energía cinética y energía potencial es nula. En consecuencia, si llamamos energía mecánica total a:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V$$

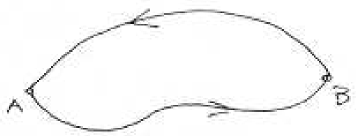
se concluye que ésta se conserva cuando sólo acúan fuerzas conservativas

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x,y,z) = E_o \text{ (constante)}$$

• **Propiedades de las fuerzas conservativas.**

a) Si la trayectoria es cerrada, el trabajo realizado por la fuerza conservativa es nulo. En efecto,

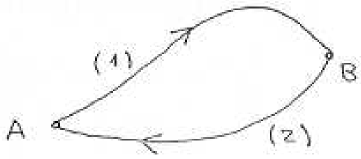
$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} + \int_B^A \vec{F} \bullet d\vec{r}$$



$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = V(A) - V(B) + V(B) - V(A) = 0$$

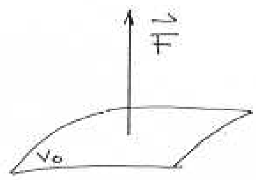
Este resultado implica que

$$\int_{A_{(1)}}^{B} \vec{F} \bullet d\vec{r} = - \int_{B_{(2)}}^{A} \vec{F} \bullet d\vec{r}$$



b) En cada punto de una superficie equipotencial, la fuerza conservativa es perpendicular a la superficie.

Se entiende por superficie equipotencial aquella formada por todos los puntos en que la función energía potencial tiene el mismo valor. Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza conservativa sobre una partícula, al desplazarse ésta en dr sobre la superficie equipotencial es



$$dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -dV = 0$$

por tratarse de una superficie equipotencial. Luego, $\vec{\mathbf{F}}$ es perpendicular a cualquier desplazamiento sobre la superficie equipotencial y, por consiguiente a ésta.

c) Una fuerza conservativa es irrotacional: $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$

es decir, el operador diferencial rotor (∇ **x**) actuando sobre una fuerza conservativa produce un vector nulo. Explícitamente se satisface que:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{\imath}\left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] + \hat{\jmath}\left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]$$

Recordando que $F_x = -\partial V/\partial x$, es fácil comprobar que $\nabla \times \vec{F} = 0$

III.4 Casos particulares de fuerzas conservativas

a) Fuerza unidireccional: $\vec{F} = f(z)\,\hat{k}$. Es fácil comprobar que $\nabla \times \vec{F} = 0$

Ejemplo: campo gravitacional cercano a la superficie terrestre: $\vec{F} = -mg\,\hat{k}$

La función energía potencial queda determinada a partir de

$$V(z) = V(0) - \int_0^z (-mg\,\hat{k}) \bullet (dz\,\hat{k}) = V(0) + mgz$$

Si se considera un potencial nulo para el nivel de referencia z=0 se tiene que la energía potencial referida a la superficie de la tierra es:

$$V(z) = mg\,z$$

Este resultado indica que la energía potencial varía linealmente con la altura sobre la superficie.

b) Fuerza central: $\vec{F} = f(r)\,\hat{r}$. En este caso $\hat{r}$ corresponde a la dirección del radio vector. Para examinar el carácter de una fuerza central calculamos

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{fx}{r} & \dfrac{fy}{r} & \dfrac{fz}{r} \end{bmatrix}$$

en que

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Se puede verificar que $\nabla \times \vec{F} = 0$, con lo cual se demuestra que toda fuerza central es conservativa.

Ejemplo : fuerza gravitacional (caso general)

Consideremos dos partículas de masas M y m tal que el origen de coordenadas coincidan con la partícula de masa M, que está fija. La fuerza gravitacional gravitacional que actúa sobre la masa m es:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$$

La energía potencial se determina a partir del trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para mover una partícula desde una posición inicial r_o hasta el punto de coordenada r:

$$V(r) - V(r_o) = -\int_{r_o}^{r} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{r_o}^{r} G \frac{Mm}{r'^2} dr'$$

$$V(r) - V(r_o) = -G\,Mm\,(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o})$$

Es usual elegir un potencial de referencia nulo en un punto infinitamente alejado: $V(r_o \to \infty) = 0$

con lo cual la función energía potencial, referida a un punto en el infinito, se expresa por

$$V(r) = -G \frac{M\,m}{r}$$

Si $M = M_T$ (masa de la Tierra), la expresión obtenida corresponde a la energía potencial de una partícula de masa m en una posición $r > R_T$ (radio de la tierra)

En el caso de movimientos cercanos a la superficie de la tierra, es costumbre tomar un punto de referencia distinto para medir la energía potencial. En efecto, si elegimos como referencia un potencial nulo en la superficie ($V(R_T) = 0$) entonces el potencial gravitacional toma la forma,

$$V(r) = -G\,M_T\,m\,(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T}) \qquad (r \geq R_T)$$

Es fácil verificar que en este caso V coincide con la expresión para el potencial gravitatorio cerca de la superficie terrestre discutido anteriormente. Así, si llamamos $r = R_T + z$, tenemos que

$$V(z) = -G\,M_T\,m\,(\frac{1}{R_T + z} - \frac{1}{R_T})$$

$$V(z) = \frac{G\,M_T\,m}{R_T^2}\,z = mg\,z$$

donde se ha utilizado el teorema de Taylor para expandir V(z) a primer orden en torno a $z = R_T$..

c) Fuerza lineal de restitución: $\vec{F} = -k\vec{r}$

Corresponde a un caso especial de fuerza central, y por lo tanto es conservativa. La función energía potencial en un punto r, medida con respecto a un punto de referencia r_o, es:

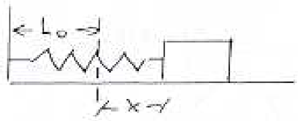
$$V(r) = V(r_o) + \frac{1}{2} k\,(r^2 - r_o^2)$$

La posición $r = r_o$ corresponde a la posición de equilibrio. Si $r_o = 0$ y se elige $V(r_o) = 0$, tenemos que

$$V(r) = \frac{1}{2} k r^2$$

es la función energía potencial con respecto a la posición de equilibrio $r_o = 0$.

Ejemplo: Resorte en régimen elástico



En este caso, la fuerza de restitución sigue la ley de Hooke, $\vec{F} = -k x \hat{x}$

Por lo tanto, la energía potencial de un resorte, medida con respecto a la posición de equilibrio, es

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \text{si } V(0) = 0$$

III.5 Fuerzas no conservativas

La situación física más común corresponde a la coexistencia de fuerzas conservativas y no conservativas. Ejemplos de estas últimas son las fuerzas de roce viscoso y deslizante, siendo ambos tipos fuerzas disipativas que realizan un trabajo negativo, $W < 0$. En general las fuerzas no conservativas son aquellas en que el trabajo realizado **depende** de la trayectoria seguida.

Es conveniente expresar el trabajo W_R realizado por la fuerza resultante sobre una partícula como la suma del trabajo realizado por las fuerzas conservativas W_C más el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas W_{NC}

$$W_R = W_C + W_{NC}$$

Recordando que el trabajo realizado por las fuerzas conservativas para ir desde un punto A a un punto B es igual a la diferencia de energía potencial entre A y B se tiene que: $W_C = V(A) - V(B)$

Asi, el teorema de las fuerzas vivas se puede expresar como:

$$K(B) - K(A) = V(A) - V(B) + W_{NC}$$

o en forma alternativa,

$$\{ K(B) + V(B) \} - \{ K(A) + V(A) \} = W_{NC}$$

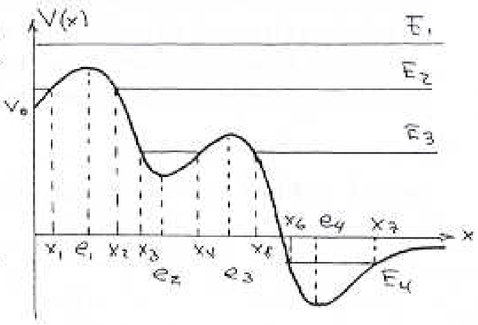
es decir, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual a la variación de la energía mecánica total.

III.6 Energía potencial y movimiento. Equilibrio

Al estudiar el movimiento de una partícula se puede obtener una cantidad importante de información a partir de la función energía potencial. Para simplificar la discusión, analizaremos el caso de un movimiento unidireccional. Considerando que sólo actúan fuerzas conservativas, es posible expresar la magnitud de la velocidad v de la partícula como:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Este resultado se deriva del teorema de conservación de la energía mecánica total E. Se observa que el movimiento sólo es posible cuando $E > V(x)$. Dependiendo de la función V(x) y del valor de E, el movimiento queda restringido a un rango de valores de x.



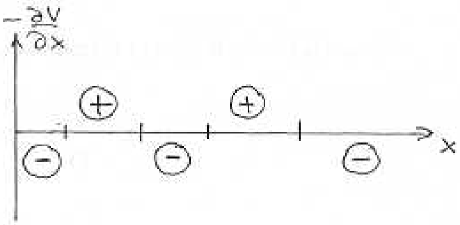
Para ilustrar las diferentes situaciones físicas que pueden producirse, supongamos una función de energía potencial como se muestra en la figura.

$V(x = 0) = V_0$

$V(x \to \infty) = 0$

Además, se ha graficado la magnitud de la fuerza que actúa en la dirección **x** utilizando la expresión:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathbf{x}$$



A lo largo del eje x se muestra la dirección de la fuerza que se ejerce sobre la partícula.

Hay dos aspectos interesantes que analizar. El primero está relacionado con la región de la variable x donde el movimiento es posible para un nivel dado de energía mecánica E_0

Así, por ejemplo, observamos en el gráfico que para $E_0 = E_1$ el movimiento es posible para todo x ya que siempre $E_1 > V(x)$. Para $E_0 = E_2$, el movimiento es posible en el intervalo $[0, x_1]$ o en el intervalo $[x_2, \infty]$. Desde el punto de vista de la Mecánica clásica, nunca una partícula podría estar en el intervalo $[x_1, x_2]$, ya que la magnitud de la velocidad sería un número imaginario, lo cual no tiene sentido físico. Para $E_0 = E_3$, el movimiento es posible en el intervalo $[x_3, x_4]$ o en el intervalo $[x_5, \infty]$. Finalmente, también es posible el movimiento para $E_0 = E_4 < 0$ en el intervalo $[x_6, x_7]$.

Consideremos con mayor detalle el caso de una partícula que se desplaza desde el infinito hacia el origen x=0, con una energía cinética inicial igual a $E = E_3$ (en el infinito la energía potencial es nula). La partícula es acelerada (ver dirección de la fuerza) hasta el punto donde se alcanza el mínimo de energía potencial V_{min} en $x = e_4$. Una vez traspasado ese punto, donde la rapidez es máxima, la partícula empieza a desacelerar hasta que se detiene en el punto $x = x_5$. En ese punto, la fuerza que se ejerce sobre la partícula tiene la dirección de **x** creciente, razón por la cual la partícula es nuevamente acelerada hacia la derecha, alejándose indefinidamente.

El segundo aspecto a considerar tiene que ver con el tipo de movimiento que se produce en el intervalo $[x_3, x_4]$ y $[x_6, x_7]$. En ambos casos, la fuerza que se ejerce sobre la partícula apunta hacia el punto definido por la coordenada $x = e_2$ y $x = e_4$ respectivamente. Se puede concluir que si la partícula queda confinada a un pozo de potencial, su movimiento será **oscilatorio** en torno al punto en que la fuerza se anula.

• **Estabilidad**

La discusión y el ejemplo previo sugieren una situación nueva para aquellos puntos en que la fuerza se anula. En el gráfico anterior se observa que hay cuatro puntos ($x = e_1, e_2, e_3$ y e_4) donde la fuerza es nula y corresponde a la situación en que:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

En general, se dice que una partícula está en equilibrio si la fuerza neta que actúa sobre ella es nula. En este caso tenemos que $dV = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, es decir, la variación infinitesimal de la energía potencial es nula en el punto de equilibrio. Por lo tanto, se puede concluir que la energía potencial es mínima, máxima, o constante en la coordenada respectiva (ver figura). Estas tres situaciones se pueden definir en terminos de tipos de equilibrio:

a) posición de **equilibrio estable** es aquella donde la función energía potencial es **mínima**. Esto se expresa mediante la condición

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{\text{punto de equilibrio}} > 0$$

b) posición de **equilibrio inestable** es aquella donde la función energía potencial es **máxima**. En este caso,

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{\text{punto de equilibrio}} < 0$$

c) posición de equilibrio **indiferente** es aquella donde la energía potencial es constante en la vecindad del punto de equilibrio.

III.7 Oscilaciones pequeñas

Analizamos aquí el movimiento oscilatorio de una partícula en torno a una posición de equilibrio estable. Supongamos que en el caso unidimensional se tiene una función energía potencial arbitraria y que $x = x_o$ corresponde a la posición de equilibrio estable. Por lo tanto

$$\left[\frac{dV}{dx}\right]_{x_o} = 0$$

por ser la posición de equilibrio y

$$\left[\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x_o} > 0$$

por ser el equilibrio estable.

Interesa estudiar que sucede con $V(x)$ en puntos cercanos a x_o. Desarrollando en serie de Taylor tenemos que

$$V(x) = V(x_o) + \left[\frac{dV}{dx} \right]_{x_o} (x - x_o) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2V}{dx^2} \right]_{x_o} (x - x_o)^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{d^3V}{dx^3} \right]_{x_o} (x - x_o)^3 + \ldots$$

esto es, podemos expresar la función energía potencial como una serie de potencias alrededor de $x = x_o$ con la precisión que queramos.

En puntos suficientemente cercanos al punto de equilibrio x_o se puede aproximar el potencial V(x) por la expresión:

$$V(x) = V(x_o) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2V}{dx^2} \right]_{x_o} (x - x_o)^2$$

y la fuerza que se ejerce sobre la partícula es

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dx}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\vec{F} = -\left[\frac{d^2V}{dx^2} \right]_{x_o} (x - x_o)\,\hat{\mathbf{x}}$$

que es equivalente a la fuerza de restitución elástica de un resorte con una constante equivalente igual a ,

$$k = \left[\frac{d^2V}{dx^2} \right]_{x_o}$$

y un largo natural equivalente a x_o. Se concluye así que para oscilaciones pequeñas en torno a la posición de equilibrio estable, el movimiento es **armónico simple** con una frecuencia angular igual a:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{d^2V}{dx^2} \right]_{x_o}}$$

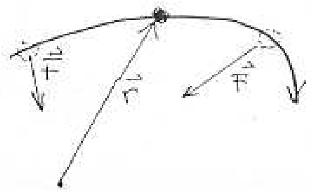
y el periodo de la oscilación queda dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

Si la amplitud de la oscilación crece, los términos en $(x - x_o)^3$ y potencias superiores cobran importancia, y por lo tanto la expresión utilizada para V(x) ya no es válida. En ese caso la oscilación sigue siendo periódica pero el movimiento no es armónico.

IV FUERZAS CENTRALES

En este capítulo estudiaremos con detalle el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central. Ejemplos típicos son las fuerzas gravitacionales y las fuerzas electrostáticas.



Llamamos fuerza central a aquella que actúa en una línea de acción siempre dirigida hacia un punto fijo con respecto a un sistema de referencia (que suponemos inercial). Si el punto fijo coincide con el origen del sistema de referencia, la fuerza central que actúa sobre una partícula en la posición **r**, se expresa genéricamente por:

$$\vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{f(r)}{r}\,\vec{\mathbf{r}}$$

donde f(r) es la función que da cuenta de la variación de la magnitud de la fuerza central con la distancia al origen. Si f(r) es positiva se dice que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es repulsiva, mientras que si es negativa se dice que $\vec{\mathbf{F}}$ es atractiva.

IV.1 Propiedades generales

Consideremos una partícula de masa m sometida a la fuerza central $\vec{\mathbf{F}}$. Se puede deducir que:

a) el **torque** con respecto al centro de fuerzas O es nulo

$$\vec{\tau} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{r}} = 0$$

b) el **momentum angular** ($\vec{\mathbf{l}}$) con respecto al centro de fuerzas O se conserva. En efecto, en la sección II.2 demostramos que la tasa de variación temporal del momentum angular de una partícula con respecto al origen O es igual al torque que se ejerce sobre ella con respecto al mismo punto O:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$$

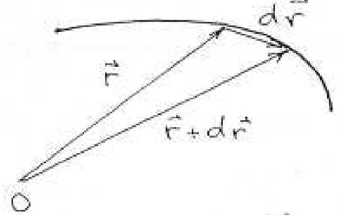
pero como el torque es nulo, se concluye que

$$\vec{\mathbf{l}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{l}}_o \text{ (constante)}$$

donde $\vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{v}}$ es el momentum lineal de la partícula.

Se concluye que el movimiento es plano, es decir, ocurre sólo en el plano definido por el vector posición y el momentum $\vec{\mathbf{p}}$.

c) **Ley de las áreas** (segunda ley de Kepler)



Consideremos el area barrida por el vector posición de una partícula sometida a una fuerza central en el intervalo Δt (recordar que el movimiento es plano)

$$\Delta\vec{s} = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{r}} \times \Delta\vec{\mathbf{r}}$$

dividiendo por el intervalo Δt,

$$\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{r}} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

En el límite, cuando Δt tiende a 0 se define la **velocidad areolar** ($\vec{c}$) como la velocidad de barrido del vector posición $\vec{r}$,

$$\vec{c} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2m}\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \equiv \frac{\vec{l}_o}{2\ m}$$

Recordando que el momentum angular es constante para el caso de fuerzas centrales, se tiene entonces que la velocidad areolar tambien es constante. Por lo tanto, el vector posición de una partícula bajo la acción de una fuerza central barre áreas iguales en tiempos iguales.

d) **Ecuaciones de movimiento**

Utilizando un sistema de coordenadas polares para describir el movimiento en un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de fuerza tenemos que

$$m\,(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2) = f(\rho)$$

por existir sólo la componente radial de la fuerza. Además la condición de momentum angular constante implica que:

$$\rho^2\,\dot{\theta} = \frac{l_o}{m}$$

donde l_o es la magnitud constante del momentum angular y m la masa de la partícula. Si se conoce la ley de fuerza $f(\rho)$ se puede determinar completamente el movimiento, a partir de las dos ecuaciones anteriores. En efecto, la ecuación para la componente radial es:

$$m\,\ddot{\rho} = f(\rho) + \frac{l_o^2}{m\ \rho^3}$$

ecuación que se puede integrar. Esta se puede interpretar como el movimiento unidimensional de una partícula de masa m sometida a una fuerza efectiva $f^*(r)$

$$f^*(\rho) = f(\rho) + \frac{l_o^2}{m\ \rho^3}$$

y

$$m\,\ddot{\rho} = f^*(\rho)$$

Conocido el movimiento según la coordenada radial podemos determinar el movimiento según el ángulo θ integrando la siguiente ecuación:

$$\rho^2\,\dot{\theta} = \frac{l_o}{m}$$

e) Trayectoria. Ecuación de Binet

La ecuación de la trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central se puede determinar eliminando la variable tiempo (t) de las ecuaciones de movimiento. Haciendo el reemplazo siguiente

$$\rho = \frac{1}{\xi}$$

Llamando h al momentum angular por unidad de masa tenemos que:

$$\rho^2 \overset{\circ}{\theta} = \frac{1}{\xi^2} \overset{\circ}{\theta} = \frac{l_o}{m} \equiv h$$

Además

$$\overset{\circ}{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \overset{\circ}{\theta} = -\frac{1}{\xi^2} \overset{\circ}{\theta} \frac{d\xi}{d\theta} = -h \frac{d\xi}{d\theta}$$

$$\overset{\circ\circ}{\rho} = \frac{d\overset{\circ}{\rho}}{d\theta} \overset{\circ}{\theta} = -h \frac{d^2\xi}{d\theta^2} \overset{\circ}{\theta} = -h^2 \xi^2 \frac{d^2\xi}{d\theta^2}$$

Por lo tanto

$$-m h^2 \xi^2 \left[\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi \right] = f(\xi)$$

corresponde a la ecuación diferencial que determina la trayectoria en coordenadas polares (ecuación de Binet)

f) Conservación de la energía.

Como hemos demostrado en el capítulo anterior, toda fuerza central es conservativa. En consecuencia, podemos definir una función energía potencial V tal que la fuerza central derive del potencial: $\vec{\mathbf{F}} = -\nabla V$

Suponiendo que V es conocido, podemos escribir la ecuación de conservación de la energía mecánica total como

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V = \text{constante}$$

La magnitud de la velocidad en coordenadas polares se expresa por:

$$\mathbf{v}^2 = \overset{\circ}{\rho}{}^2 + (\rho \overset{\circ}{\theta})^2 = \overset{\circ}{\rho}{}^2 + \frac{h^2}{\rho^2}$$

con lo cual

$$E = \frac{1}{2} m \overset{\circ}{\rho}{}^2 + \frac{m h^2}{2 \rho^2} + V(\rho)$$

Esta ecuación se puede reinterpretar como la conservación de la energía mecánica de una partícula con movimiento unidimensional al definir un potencial efectivo V*

$$V^*(\rho) = V(\rho) + \frac{m\ h^2}{2\ \rho^2}$$

Así la energía mecánica total queda expresada como:

$$E = \frac{1}{2}\ m\ \dot{\rho}^2 + V^*(\rho)$$

Observar que la fuerza efectiva f* correspondiente al potencial V* es

$$f^*(\rho) = -\frac{dV^*}{d\rho} = -\frac{dV}{d\rho} + \frac{m\ h^2}{\rho^3} = f(\rho) + \frac{m\ h^2}{\rho^3}$$

que corresponde a la expresión indicada previamente

Alternativamente, podemos expresar la conservación de la energía mecánica en términos de coordenadas (ξ, θ). En efecto:

$$\mathbf{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{h^2}{\rho^2}$$

$$\mathbf{v}^2 = h^2 \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + h^2\ \xi^2$$

con lo cual

$$E = \frac{1}{2}\ m\ h^2 \left[\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \xi^2\right] + V(\xi)$$

expresión que se denomina la ecuación de la energía de la órbita.

IV.2 Fuerza gravitacional

Un ejemplo de fuerza central, de singular importancia en Física, lo constituye la ley de atracción gravitacional entre partículas. En el caso que una de las masas esté fija en el origen del sistema de referencia inercial, esta ley se expresa de la siguiente manera (ver sección II.6):

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{M\ m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

donde M y m son las masas de las partículas que interactúan y r es la distancia de separación entre las partículas. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ corresponde a la fuerza que actúa sobre la masa m. G es la constante de gravitación universal. La función energía potencial gravitacional para la masa m está dada por

$$V(r) = -G\frac{M\ m}{r}$$

cuando se considera como referencia $V(r = \infty) = 0$ (ver sección III.4).

• Trayectoria

Aplicando la ecuación de Binet al caso gravitacional se obtiene:

$$m\ h^2\ \zeta^2 \left[\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta \right] = G\ M\ m\ \zeta^2$$

Recordar que h es el momentum angular por unidad de masa. Simplificando la expresión anterior se obtiene la siguiente ecuación de trayectoria:

$$\left[\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi \right] = \frac{G\ M}{h^2}$$

Esta es una ecuación inhomogénea de 2° orden con coeficientes constantes. Su solución es:

$$\xi(\theta) = \frac{G\ M}{h^2} + A\ \cos\ (\theta - \delta)$$

donde A y δ son constantes de integración cuyos valores están determinados por las condiciones iniciales del problema considerado. En consecuencia, la relación entre el radio polar con el ángulo θ queda dada por:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\dfrac{G M}{h^2} + A\ \cos(\theta - \delta)}$$

ecuación que corresponde a una **sección cónica** expresada en coordenadas polares (ver Apéndice 3). En términos generales una sección cónica se puede expresar como:

$$\rho(\theta) = \rho_o \frac{1 + e}{1 + e\ \cos\ (\theta - \delta)}$$

donde r_o es el radio para $\theta = \delta$ y "e" es la excentricidad de la sección cónica. Para el caso particular que analizamos se tiene que:

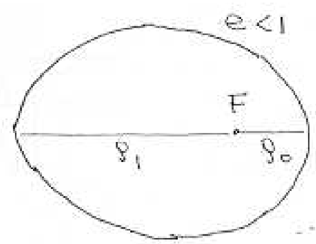
$$e = \frac{A\ h^2}{GM}$$

y

$$\rho_o = \frac{h^2}{G\ M} \frac{1}{1 + e}$$

El ángulo δ determina la orientación de la órbita. Entonces, sin perder generalidad, podemos elegir $\delta = 0$. Los diferentes tipos de trayectoria dependen del valor de la excentricidad:

$e = 0$ (círculo)
$e < 1$ (elipse)
$e = 1$ (parábola)
$e > 1$ (hipérbola)



Las variables ρ_o y ρ_1 que aparecen en la figura anterior se definen como:

$$\rho_o = \rho(\theta = 0)$$

$$\rho_1 = \rho(\theta = \pi) = \rho_o \frac{1 + e}{1 - e}$$

En el caso de una órbita elíptica, la excentricidad puede expresarse en términos de las distancias mínima (ρ_0) y la máxima (ρ_1) al foco:

$$e = \frac{\rho_1 - \rho_o}{\rho_1 + \rho_o}$$

Si las órbitas elípticas corresponden a planetas alrededor del Sol las distancias ρ_0 y ρ_1 se conocen como **perihelio** y **afelio** respectivamente. En el caso del movimiento de la Luna (o satélites artificiales) alrededor de la Tierra, se habla de **perigeo** y **apogeo** respectivamente.

Valores típicos de excentricidades para la órbita de planetas y cometas alrededor del sol se indican en la tabla siguiente:

	e
Tierra	0.017
Marte	0.093
Venus	0.007
Júpiter	0.048
Plutón	0.249
Cometa Halley	0.967

- **Condiciones iniciales**

La trayectoria depende de la condición inicial que se imponga al movimiento, lo que permite especificar las constantes de integración. Suponiendo que para $\theta = 0$, la partícula se encuentra a una distancia R_0 del foco ($\rho_0 = R_0$) y tiene una velocidad v_0, perpendicular a la recta entre el foco y la partícula, se concluye que:

$$h = \frac{l_o}{m} = R_o v_o$$

y

$$e = \frac{R_o v_o^2}{G M} - 1$$

Por lo tanto, la trayectoria de la órbita queda definida por:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{\dfrac{G M}{R_o^2 v_o^2} + \dfrac{1}{R_o}\left[1 - \dfrac{G M}{R_o v_o^2}\right] \cos\theta}$$

- **Energía mecánica y excentricidad**

A partir de la ecuación de la conservación de la energía mecánica para una fuerza central y considerando el caso particular de la fuerza gravitacional, se puede deducir que:

$$E = \frac{m}{2} h^2 \left[\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \xi^2 \right] - GM\, m\, \xi$$

Escribiendo de nuevo esta ecuación en la forma siguiente:

$$\frac{2E}{m} = h^2 \left[\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 + \xi^2 \right] - 2\, G\, M\, \xi$$

y utilizando la dependencia de x con la variable angular θ dada por:

$$\xi(\theta) = \frac{1 + e \cos\theta}{\rho_o (1 + e)}$$

y su correspondiente derivada:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = - \frac{e \operatorname{sen}\theta}{\rho_o (1 + e)}$$

se obtiene finalmente:

$$\frac{2E}{m} = \frac{h^2}{\rho_o^2 (1 + e)^2} \left[e^2 + 1 + 2 e \cos\theta \right] - \frac{2\, G\, M}{\rho_o (1 + e)} (1 + e \cos\theta)$$

Si en la ecuación anterior se reemplaza ρ_Q por su correspondiente expresión definida anteriormente se concluye que:

$$\frac{2E}{m} = \left(\frac{G\, M}{h}\right)^2 (e^2 - 1)$$

ecuación que expresa la relación que existe entre la energía E de la órbita, el momentum angular $l_o = m\, h$ y la excentricidad e. Alternativamente,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{h}{G\, M}\right)^2}$$

expresión que muestra explícitamente que la naturaleza de la trayectoria depende de las condiciones iniciales de energía y momentum angular. En efecto, podemos clasificar las órbitas según la energía mecánica total como sigue:

$E < 0$,	$e < 1$: órbitas cerradas (círculo o elipse)
$E = 0$,	$e = 1$: órbita parabólica
$E \gtrsim 0$,	$e > 1$: órbita hiperbólica

Como la energía mecánica total E se conserva y $E = K + V$, se concluye que si $K < |V|$ la órbita es cerrada mientras que si $K > |V|$, la órbita es abierta.

• **Análisis gráfico de las trayectorias**

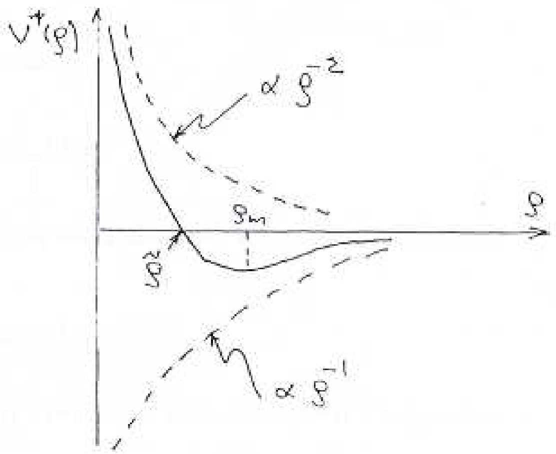
Una forma de comprender el tipo de trayectorias de una partícula en un campo de fuerzas gravitacionales es analizar la función energía potencial correspondiente. En efecto, el movimiento puede interpretarse como el movimiento unidimensional de una partícula en un potencial efectivo $V^*(r)$, de modo que la energía total E queda definida como (ver sección IV.I f):

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V^*(\rho)$$

donde V^* (r), está dado por

$$V^*(\rho) = -G\frac{M\,m}{\rho} + \frac{l_o^2}{2\,m\,\rho^2}$$

El segundo término de la derecha recibe el nombre de **potencial centrífugo**. Hay dos puntos importantes que considerar:



a) el radio $\tilde{\rho}$ donde se anula el potencial V^* es:

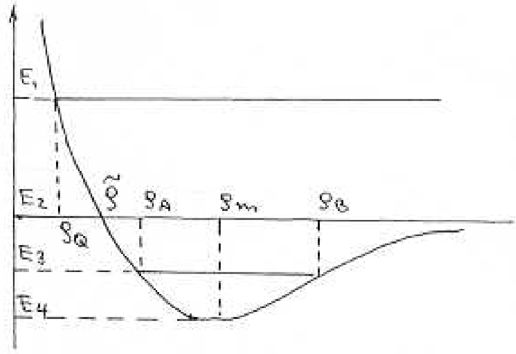
$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2\,G\,M}\left(\frac{l_o}{m}\right)^2 = \frac{h^2}{2\,G\,M}$$

b) el radio ρ_m donde el potencial es mínimo es:

$$\rho_m = 2\tilde{\rho}$$

el potencial efectivo correspondiente es:

$$V^*(\rho_m) = -\frac{G\,M\,m}{4\,\rho_o} = -\frac{G\,M\,m}{2\,\rho_m}$$



Con estos datos podemos identificar cualitativamente las diferentes trayectorias. Si consideramos un nivel de energía E_1, observamos que ρ_Q es la distancia mínima al origen ya para esa distancia $\dot{\rho} = 0$. Esto **no** significa que allí la velocidad de la partícula es nula ya que como en general:

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

en la distancia ρ_Q se tiene que $\mathbf{v} = \rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}$ de modo que la normal a la trayectoria coincide con el radio vector. La trayectoria no puede incluir puntos tales que $\rho < \rho_Q$. Para $\rho > \rho_Q$ la trayectoria es la indicada en la figura.

Si el nivel de energía es $E_2 = 0$, el punto de retroceso es $\rho = \tilde{\rho}$ y la trayectoria es un caso especial de la situación anterior.

Para $E = E_3$, se tiene que la rapidez radial es nula en $\rho = \rho_A$ y ρ_B. Luego el movimiento es posible entre los radios ρ_A y ρ_B.

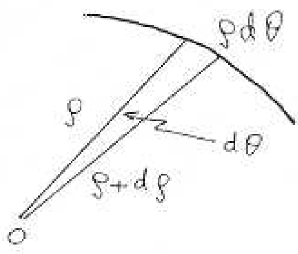
La trayectoria queda encerrada entre dos círculos de radios ρ_A y ρ_B, respectivamente y es tangente a ellas en los puntos de contacto. Como se ha demostrado previamente, para $E < 0$ la trayectoria es cerrada y corresponde a una elipse. Para el nivel de energía mínimo (E_4), los círculos anteriores coinciden en un radio (ρ_m) donde el potencial es mínimo. El movimiento es circular uniforme y corresponde a la situación en que la barrera centrífuga equilibra la fuerza gravitacional atractiva,

$$G\frac{M\,m}{\rho_m^2} = \frac{l^2}{m\,\rho_m^3}$$

• **Período órbital**

Según el principio de conservación de momentum angular tenemos que:

$$\rho^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{l_o}{m} \equiv h$$



lo cual se puede escribir como: $h\,dt = \rho^2\,d\theta = 2\,dS$

donde dS es el elemento de área barrido por el radio vector. Integrando en una órbita completa,

$$T = \frac{2\,S}{h} = \frac{2\,m}{l_o}S$$

donde T es el tiempo que demora la partícula en describir una órbita completa. Si la órbita considerada es una elipse ($S = \pi\,ab$), el período es

$$T = \frac{2\,m}{l_o}\pi\,a\,b$$

siendo a y b los semi-ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Es fácil demostrar (ver Apéndice 3) que

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

y

$$a = \left(\frac{l_o}{m}\right)^2\frac{1}{GM}\frac{1}{1 - e^2}$$

con lo cual el período se puede expresar como

$$T^2 = \frac{(2\,\pi)^2}{G\,M}a^3$$

relación que corresponde a la **tercera Ley de Kepler**.

• **Velocidad de escape**

Corresponde a la velocidad inicial de lanzamiento para lograr una órbita parabólica. Se deja como ejercicio demostrar que la velocidad de escape es:

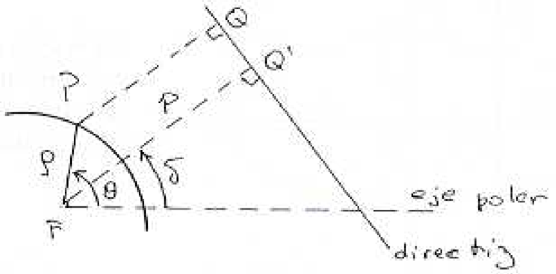
$$v_e = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_o}}$$

donde R_o es la distancia inicial de la partícula al foco.

APENDICE 3: Secciones cónicas

Una **sección cónica** es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo F (foco) es proporcional a su distancia a una recta fija (directriz)

$$PF \;\alpha\; PQ$$



Llamando e (excentricidad) a la constante de proporcionalidad, tenemos que PF = e PQ. Si p es la distancia desde la directriz al foco (FQ') y si se expresa la posición del punto P en coordenadas polares (ρ, θ), se obtienen las siguientes relaciones geométricas:

$$PF = \rho$$
$$PQ = FQ' - \rho\cos(\theta-\delta)$$
$$PQ = p - \rho\cos(\theta-\delta)$$

En consecuencia,

$$\rho(\theta) = \frac{p\,e}{1 + e\cos(\theta-\delta)}$$

ecuación que describe una sección cónica en coordenadas polares con el origen de las coordenadas coincidente con el foco. Alternativamente, podemos escribir la ecuación de la sección cónica como

$$\rho(\theta) = \rho_o \frac{1+e}{1 + e\cos(\theta-\delta)}$$

donde se ha definido ρ_o como

$$\rho_o = \frac{p\,e}{1+e}$$

Observar que el ángulo δ determina la orientación de la órbita. Para efectos de estudiar los diferentes tipos de secciones cónicas consideraremos $d = 0$.

Dependiendo del valor de la excentricidad e, existen 3 tipos de secciones cónicas

- $e < 1$ (elipse; $e=0$: círculo)
- $e = 1$ (parábola)
- $e > 1$ (hipérbola)

Cónicas en coordenadas cartesianas

Consideremos un sistema de referencia cartesiano cuyo origen coincide con el foco de la sección cónica. Haciendo una transformación de coordenadas polares a cartesianas,

$$x = \rho\cos\theta$$

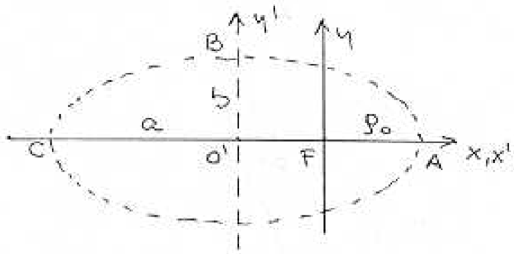
$$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$

podemos escribir la ecuación de la sección cónica como

$$(1 - e^2)\, x^2 + 2\,\rho_o\, e\,(1 + e)\, x + y^2 = \rho_o^2\,(1 + e)^2$$

• **Elipse**

Corresponde al caso en que $e < 1$. La geometría de la elipse queda totalmente determinada por el largo a del semi-eje mayor y el largo b del semi-eje menor. En efecto, con respecto a un nuevo sistema de referencia (x', y') definido por la transformación



$$x' = x + O'F$$
$$y' = y$$

se pueden definir las siguientes distancias,

$$O'A = a\ \frac{1}{2}\{\rho(\theta{=}0) + \rho(\theta{=}\pi)\} = \frac{\rho_o}{1 - e}$$

$$O'F = O'A - FA = ae$$

$$BF = r(\cos\theta = -e) = a$$

$$O'B = b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Entonces, la ecuación de la elipse en las coordenadas (x', y') es

$$(1 - e^2)\,(x' - a\,e)^2 + 2\rho_o\, e\,(1 + e)\,(x' - a\,e) + y'^2 = \rho_o^2\,(1 + e)^2$$

Desarrollando esta ecuación se obtiene finalmente que

$$\left[\frac{x'}{a}\right]^2 + \left[\frac{y'}{b}\right]^2 = 1$$

El área de la elipse se obtiene a partir de

$$S = \int_{y'=-b}^{b} \int_{-x_1}^{+x_1} dx\ dy'$$

donde el límite de integración x_1 está dado por:

$$x_1 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y'^2}$$

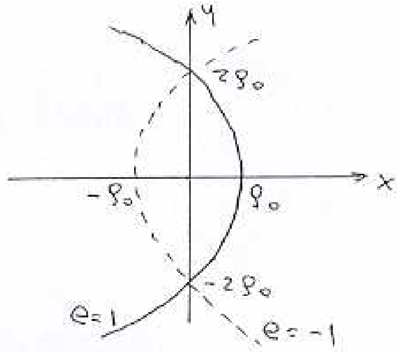
Así,

$$S = 2\,\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2 - y'^2}\;dy' = \pi\, a\, b = \pi\, a^2\sqrt{1 - e^2}$$

• Parábola

Corresponde al caso en que e = 1. La ecuación correspondiente en coordenadas cartesianas es

$$y^2 + 4\,\rho_o\, x = 4\,\rho_o^2$$



y cuya representación gráfica es la que se indica en la figura (línea llena). Observar que también es posible una trayectoria parabólica para e = -1 (línea cortada).

• Hipérbola

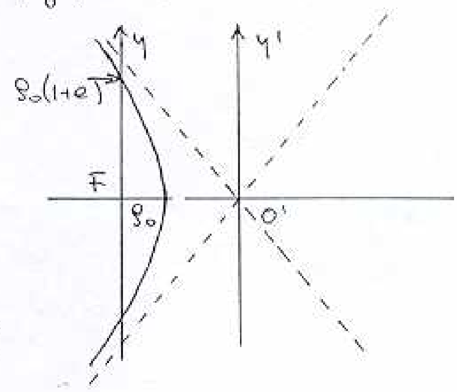
Corresponde al caso en que e > 1. La ecuación siguiente es una modificación de la ecuación general, cuando se hace explícito el hecho que $e^2 > 1$,

$$(e^2 - 1)\,x^2 - 2\,\rho_o e\,(e + 1)\,x - y^2 = -\rho_o^2\,(e + 1)^2$$

Cambiando de sistema de referencia del modo siguiente:

$$x' = x - \rho_o\,\frac{e}{e - 1}$$

$$y' = y$$



se obtiene que:

$$x'^2 - \frac{y'^2}{e^2 - 1} = \rho_o^2\,\frac{1}{(e - 1)^2}$$

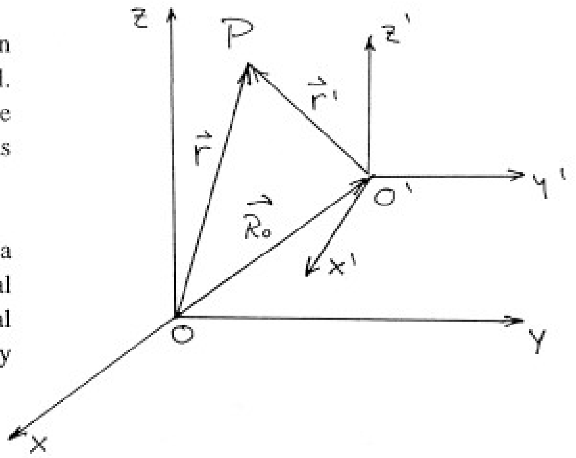
ecuación que se reduce a la forma usual siguiente,

$$\frac{x'^2}{\left[\dfrac{\rho_o}{e - 1}\right]^2} - \frac{y'^2}{\left[\rho_o\sqrt{\dfrac{e + 1}{e - 1}}\right]^2} = 1$$

En la figura se muestra la forma de la hipérbola en la zona de interés (línea contínua) y sus puntos más relevantes.

V MOVIMIENTO RELATIVO

En el proceso de describir el movimiento de un cuerpo es en ciertos casos conveniente utilizar un sistema de referencia móvil. Como en general este sistema de referencia no es inercial, se debe ejercer un gran cuidado para describir correctamente las leyes del movimiento.



Consideremos un sistema de referencia inercial S y un sistema de referencia S' que puede trasladarse y rotar con respecto al sistema inercial. El movimiento del sistema S' con respecto al sistema S queda determinado por la posición, velocidad y aceleración del origen de coordenadas S':

$$\vec{\mathbf{OO}'} = \vec{\mathbf{R}}_o(t)$$

$$\vec{\mathbf{v}}_o = \left(\frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt}\right)_S = \dot{\vec{\mathbf{R}}}_o(t)$$

$$\vec{\mathbf{a}}_o = \left(\frac{d^2\vec{\mathbf{R}}_o}{dt^2}\right)_S = \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_o(t)$$

además de los parámetros que describen la rotación del sistema S' con respecto al sistema S, tales como la velocidad angular $\vec{\omega}_O(t)$ y la aceleración angular $\dot{\vec{\omega}}_O(t)$

La posición del punto P con respecto al sistema inercial S está definida por

$$\vec{\mathbf{OP}} = \vec{\mathbf{r}}(t)$$

mientras que su velocidad y aceleración están dadas por

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)_S$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \left(\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right)_S$$

Por otra parte, la posición del punto P con respecto al sistema en movimiento S' está expresada por:

$$\vec{\mathbf{O'P}} = \vec{\mathbf{r}}'(t)$$

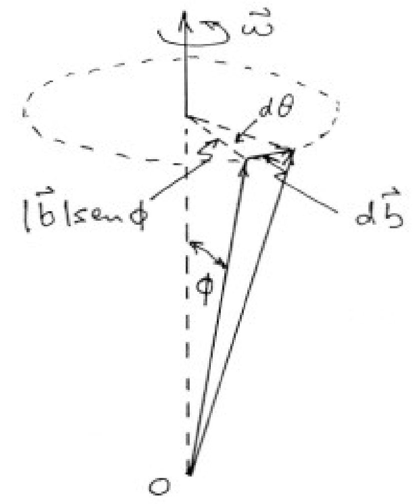
mientras que su velocidad y aceleración relativas a S' están dada por

$$\vec{\mathbf{v}}'(t)_{S'} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_{S'} \qquad \vec{\mathbf{a}}'(t)_{S'} = \left(\frac{d\vec{\mathbf{v}}'}{dt}\right)_{S'}$$

Notar que **v'** y **a'** son las velocidades y aceleraciones medidas por un observador en reposo con respecto al sistema S' pero en movimiento con respecto al sistema S.

V.1 Composición de velocidades y aceleraciones

El propósito de esta sección es determinar la relación que existe entre las velocidades y aceleraciones medidas en los sistemas S y S'. Como un paso previo para derivar estas relaciones, se analiza a continuación la variación temporal de un vector de magnitud constante que gira con velocidad angular ω en torno a un eje de rotación. En efecto, sea $\vec{\mathbf{b}}(t)$ un vector arbitrario tal que $|\vec{\mathbf{b}}| = b_o$ (constante).



En un intervalo de tiempo dt, el extremo del vector $\vec{\mathbf{b}}$ se desplaza en la cantidad $d\vec{\mathbf{b}}$ en la dirección perpendicular al plano formado por $\vec{\omega}$ y $\vec{\mathbf{b}}$

$$|d\vec{\mathbf{b}}| = b_o \operatorname{sen}\phi \; d\theta$$

Por lo tanto

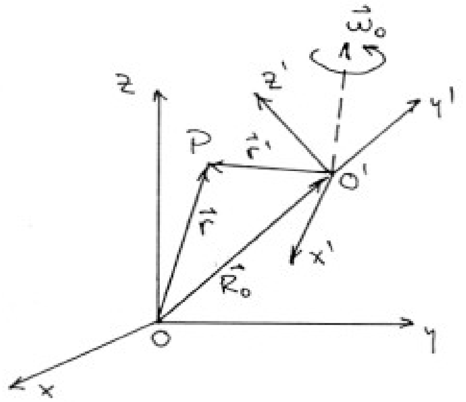
$$\left|\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt}\right| = b_o \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen}\phi$$

$$= b_o \, |\vec{\omega}| \operatorname{sen}\phi$$

de lo cual se concluye que

$$\frac{d\vec{\mathbf{b}}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{b}}$$

- **Velocidad**



Consideremos la situación general mostrada en la figura adjunta, donde el sistema S' se traslada con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_O(t)$ y rota con velocidad angular $\vec{\omega}_O(t)$ con respecto al sistema inercial S. Una partícula P está descrita por los vectores posiciones $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{r}}'$ con respecto a S y S', respectivamente. Se cumple que:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{R}}_O + \vec{\mathbf{r}}'$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo en el sistema S,

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_o + \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S$$

Deducimos ahora una expresión para la derivada temporal del vector posición $\mathbf{r}'$, en el sistema S :

$$\vec{\mathbf{r}}' = x'\,\hat{\mathbf{i}}' + y'\,\hat{\mathbf{j}}' + z'\,\hat{\mathbf{k}}'$$

Su derivada es:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}_S = \frac{dx'}{dt}\hat{\mathbf{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\mathbf{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\mathbf{k}}' + x'\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}$$

La derivada temporal de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$, que giran con velocidad angular $\vec{\omega}_O$, se obtiene del resultado anteriormente demostrado. Así,

$$\frac{d\,\hat{\mathbf{i}}'}{dt} = \vec{\omega}_o \times \hat{\mathbf{i}}' \qquad \frac{d\,\hat{\mathbf{j}}'}{dt} = \vec{\omega}_o \times \hat{\mathbf{j}}' \qquad \frac{d\,\hat{\mathbf{k}}'}{dt} = \vec{\omega}_o \times \hat{\mathbf{k}}'$$

Se concluye entonces que

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}'$$

De este modo ,

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{v}}_o(t) + \vec{\mathbf{v}}'(t) + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}'$$

expresión que permite relacionar la velocidad absoluta de una partícula en un sistema inercial S con la correspondiente velocidad relativa respecto a un sistema no-inercial S'.

Si el punto P permanece en reposo con respecto al sistema S', su velocidad con respecto al sistema S se denomina **velocidad de arrastre** $\mathbf{v}_A$

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_o + \vec{\omega}_O \times \vec{\mathbf{r}}'$$

que corresponde a la velocidad absoluta de un punto fijo en el sistema no-inercial con respecto al sistema inercial. Luego, podemos expresar la velocidad absoluta de una partícula como

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}_A$$

es decir , como la superposición de la velocidad relativa de la partícula y la velocidad de arrastre correspondiente.

• **Aceleración**

La aceleración en el sistema inercial S se expresa como:

$$\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}_o}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\,\vec{\omega}_o}{dt}\right)_S \times \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\omega}_o \times \left(\frac{d\,\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S$$

Es simple demostrar que

$$\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{r}}'}{dt}\right)_S = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}'$$

y que:

$$\left(\frac{d\,\vec{\mathbf{v}}'}{dt}\right)_S = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{v}}'$$

Por lo tanto

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_o + \vec{\mathbf{a}}' + \dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}') + 2\,\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{v}}'$$

donde los tres últimos términos de la derecha representan aceleraciones asociadas a la rotación del sistema no-inercial.

V.2 Dinámica del movimiento relativo

Se desarrollan aquí las ecuaciones de movimiento en el sistema de referencia no-inercial S'. En efecto, en el sistema inercial S las ecuaciones de Newton describen completamente el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza F resultante. En particular, la expresión **ma=F** define el movimiento si la masa se mantiene constante. Expresando esta ecuación de movimiento en término de las coordenadas del sistema en movimiento S' se tiene que:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}_o + m\,\vec{\mathbf{a}}' + m\,\dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{\mathbf{r}}' + m\,\vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{r}}') + 2\,m\,\vec{\omega}_o \times \vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{F}}$$

Reordenando la ecuación para un observador en el sistema móvil S', podemos escribir

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_I$$

donde F representa las fuerzas físicas y F_I las fuerzas inerciales (o fuerzas ficticias) que actúan sobre la partícula en el sistema no-inercial. Los términos que componen F_I son:

$$\vec{\mathbf{F}}_I = -\,m\,\vec{\mathbf{a}}_o + \vec{\mathbf{F}}_{Co} + \vec{\mathbf{F}}_T + \vec{\mathbf{F}}_{Ce}$$

donde ($-\,m\,\vec{\mathbf{a}}_o$) es el término inercial asociado a la traslación del sistema S', $\vec{\mathbf{F}}_{co}$ es la fuerza de Coriolis,

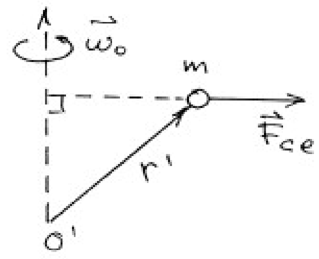
$$\vec{\mathbf{F}}_{Co} = -\,2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

La fuerza de Coriolis sólo existe si la partícula se mueve en S' y/o si $\vec{\mathbf{v}}'$ no es paralelo a $\vec{\omega}_o$; $\vec{\mathbf{F}}_T$ es la fuerza transversal,

$$\vec{\mathbf{F}}_T = -\,m\,\overset{o}{\vec{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}'$$

la cual es perpendicular al vector posición de la partícula en el sistema S'. Finalmente $\mathbf{F}_{ce}$ es la fuerza centrífuga

$$\vec{\mathbf{F}}_{Ce} = -\,m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}')$$



la cual es perpendicular al eje de rotación $\vec{\omega}_O$ en la dirección que se aleja de él.

- **Casos especiales**

a) situación en que $\vec{\mathbf{v}}_O$ = constante y $\vec{\omega}_O = \dot{\vec{\omega}}_O = 0$. En este caso:

$$m\,\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{F}}$$

Se cumple la II Ley de Newton, $\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}}$ y por lo tanto el sistema S' es inercial

b) situación en que S' se traslada con aceleración $\vec{\mathbf{a}}_O$ pero no rota ($\vec{\omega}_O = 0$ y $\dot{\vec{\mathbf{w}}}_O = 0$). En este caso se tiene que:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} - m\,\vec{\mathbf{a}}_o$$

el sistema S' no es inercial ya que existe la fuerza ficticia ($-\,m\vec{\mathbf{a}}_O$)

c) sistema S' rota sin trasladarse ($\vec{\mathbf{a}}_O = 0$). En este caso:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_{Co} + \vec{\mathbf{F}}_T + \vec{\mathbf{F}}_{Ce}$$

y el sistema S' tampoco es inercial.

V.3 Movimiento sobre la superficie de la Tierra

En la descripción del movimiento de una partícula relativo a un observador sobre la superficie de la Tierra, hemos hasta ahora supuesto que ésta constituye un sistema de referencia inercial. Sin embargo, hay dos efectos que invalidan tal hipótesis: uno se refiere al movimiento de traslación de la Tierra en torno al Sol y el otro a sumovimiento de rotación en torno a su eje. Estos fenómenos hacen que la Tierra sea un sistema de referencia no-inercial, con respecto al cual analizaremos la forma particular que adopta la ecuación de movimiento.

En relación a la importancia relativa del efecto de los movimientos de traslación y rotación, es este último el que afecta en forma más apreciable los movimientos sobre la superficie de la Tierra. En efecto, considerando que la Tierra orbita alrededor del sol con una velocidad media de $v_T = 30$ km/seg y que el radio medio de la órbita es $R_{S-T} = 1.49 \times 10^8$ km, tenemos que la aceleración que sufre la Tierra en su movimiento alrededor del Sol es:

$$a_T = \frac{v_T^2}{R_{S-T}} = 6 \times 10^{-6} \quad (\text{km seg}^{-2})$$

Por otra parte, la Tierra, cuyo radio es cercano a 6400 km, gira en torno a su propio eje con una rapidez angular

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = 7{,}3 \times 10^{-5} \quad (\text{rad seg}^{-1})$$

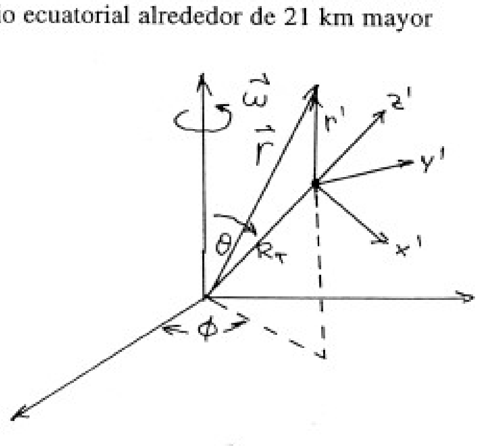
entonces tenemos que la velocidad máxima de un punto en la superficie, asociada a la rotación de la Tierra es:

$$v_R = \omega R_T = 0{,}47 \quad (\text{km seg}^{-1})$$

Esto se produce sobre el Ecuador. La aceleración correspondiente es:

$$a_R = \omega^2 R_T = 3{,}4 \times 10^{-5} \quad (\text{km seg}^{-2})$$

es decir, un orden de magnitud mayor que la aceleración derivada del movimiento de traslación en torno al Sol. Por supuesto que la aceleración asociada a la rotación disminuye para puntos cercanos a los polos, haciéndose comparable y aún menores que la aceleración asociada a la traslación. Sin embargo, podemos concluir que el efecto que mayormente afecta las mediciones realizadas por un observador terrestre se debe a la rotación de la Tierra. En particular, la diferencia de la aceleración de rotación entre el Ecuador y los polos explica el achatamiento del planeta manifestado por un radio ecuatorial alrededor de 21 km mayor que el radio polar.



Consideremos un sistema de referencia inercial S(x,y,z) fijo y centrado en el centro de la Tierra, que la suponemos esférica. Esto es posible si despreciamos el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol. La Tierra, rota en torno a su eje con velocidad angular constante ω_o Asociado a un punto de la superficie definimos un sistema de referencia móvil S'(x',y',z') como se indica en la figura.

La posición de una partícula de masa m, ubicada en el punto P, queda definida por el vector posición $\vec{r}$ con respecto al sistema S y por $\vec{\mathbf{r}}'$ con respecto al sistema S'. La posición del origen O' del sistema S' queda definida por el vector posición $\vec{\mathbf{R}}_o$, ($|\vec{\mathbf{R}}_o| = R_T$) con respecto al sistema S. La ecuación de movimiento de la partícula para un observador en S' es:

$$m\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_I$$

donde $\vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza gravitacional con que la Tierra atrae a la partícula de masa m,

$$\vec{\mathbf{F}} = -G\frac{M_T\, m}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$$

M_T es la masa de la Tierra, y la fuerza inercial que actúa sobre la partícula es

$$\vec{\mathbf{F}}_I = -m\,(\vec{\mathbf{a}}_o + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}')$$

La aceleración $\vec{\mathbf{a}}_o$ del origen O' se puede calcular directamente a partir de su velocidad. En efecto,

$$\vec{\mathbf{v}}_o = \frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o$$

Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{a}}_o = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_o}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\mathbf{R}}_o}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o)$$

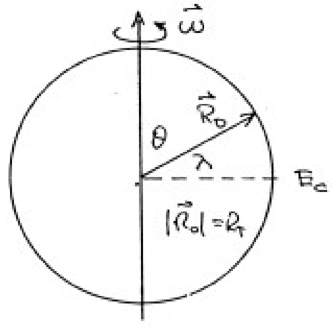
ya que hemos supuesto $\vec{\omega}$, constante. Por la misma razón, la componente transversal de la fuerza inercial se anula. En resumen, la ecuación de movimiento para el punto P en el sistema S' es:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}}'_G - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}') - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

donde la fuerza gravitacional F'_G medida en el sistema S' se define según las siguientes expresiones:

$$\vec{\mathbf{F}}'_G = m\,\vec{\mathbf{g}}'$$

$$\vec{\mathbf{g}}' = -G\frac{M_T}{r^3}\vec{\mathbf{r}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o)$$



• aceleración de gravedad a nivel de superficie

Aplicamos ahora las ecuaciones de movimiento a una partícula situada en el punto O' sobre la superficie de la Tierra y originalmente en reposo con respecto al sistema S' ($\mathbf{r}' = \mathbf{v}' = 0$). En este caso,

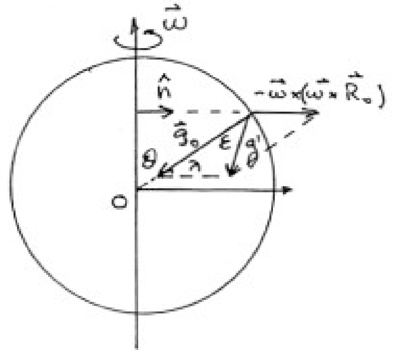
$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = m\,\vec{\mathbf{g}}'$$

es decir, la aceleración que experimenta la partícula corresponde a la aceleración de gravedad ($\vec{\mathbf{g}}'$) medida en el sistema S', y que se representa mediante la expresión siguiente:

$$\vec{\mathbf{g}}' = -G\frac{M_T}{R_T^3}\vec{\mathbf{R}}_o - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{R}}_o)$$

Introduciendo la aceleración de gravedad $\vec{g}_0$ medida en el sistema inercial, tenemos que,

$$\vec{\mathbf{g}}' = -\vec{\mathbf{g}}_o\,\hat{\mathbf{r}} + \omega^2 R_T \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{n}}$$



donde $\hat{\mathbf{n}}$ representa la dirección perpendicular al eje de rotación. Se observa que la aceleración de gravedad $\vec{\mathbf{g}}'$ no apunta hacia el centro de la Tierra, sino que en una dirección que forma un ángulo ε con respecto a la dirección radial. Llamando latitud al ángulo λ, se concluye que,

$$g' \operatorname{sen}\varepsilon = \omega^2 R_T \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda$$

$$g' \operatorname{sen}\varepsilon = \omega^2 R_T \cos\lambda \operatorname{sen}\lambda$$

es decir,

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{\omega^2 R_T}{2\,g'}\operatorname{sen}(2\lambda)$$

La máxima desviación se obtiene para para $\lambda = \pi/4$. En este caso,

$$\operatorname{sen}\varepsilon_{max} = \varepsilon_{max} = \frac{\omega^2 R_T}{2\,g'} = \frac{1}{10}\,(^\circ)$$

En los casos límites, para posiciones en el Ecuador y los polos, se tiene que:

$$\lambda = 0 \text{ (ecuador)} \qquad g'_{Ec} = g_o - \omega^2 R_T \qquad (\varepsilon = 0)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \text{ (polos)} \qquad g'_{Polo} = g_o \qquad (\varepsilon = 0)$$

lo cual significa que la aceleración de gravedad sobre la superficie terrestre aumenta desde los polos al Ecuador debido a la rotación de la Tierra. De todos modos, la corrección en la aceleración de gravedad debido a la rotación de la Tierra es menor al 1% del valor que se observaría si ésta no rotara.

• Dinámica sobre la superficie terrestre

La ecuación que describe el movimiento de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra y bajo la acción de una fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}$, es:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + m\,\vec{\mathbf{g}}' - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}') - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

El término $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}')$ es muy pequeño comparado a los otros términos, razón por la cual no será considerado en el análisis que sigue. La ecuación se reduce entonces a

$$m\,\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{F}} + m\,\vec{\mathbf{g}}' - 2\,m\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

donde el último término corresponde a la fuerza de Coriolis. La resolución de la ecuación de movimiento depende de la fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre la partícula.

Caso particular : $\vec{\mathbf{F}} = 0$
En este caso la ecuación de movimiento es:

$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{g}}' - 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$

Integrando en el tiempo la ecuación anterior se obtiene:

$$\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}}'_o + \vec{\mathbf{g}}'\,t - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}'_o)$$

donde $\vec{\mathbf{r}}'_o$ y $\vec{\mathbf{v}}'_o$ son la posición y velocidad inicial de la partícula en el sistema S'. Reemplazando $\vec{\mathbf{v}}'$ en la expresión anterior para $\vec{\mathbf{a}}'$ se obtiene:,

$$\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{g}}' - 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'_o - 2\,t\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{g}}' + 4\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\mathbf{r}}' - \vec{\mathbf{r}}'_o))$$

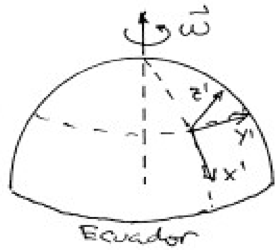
Despreciando los términos proporcionales a ω^2, e integrando la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión para $\mathbf{v}'$:

$$\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{g}}'\,t - 2\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'_o\,t - t^2\,\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{g}}' + \vec{\mathbf{v}}'_o$$

Integrando una vez más se obtiene:

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = \vec{\mathbf{r}}'_o(t) + \vec{\mathbf{v}}'_o\,t + \frac{1}{2}t^2\,\vec{\mathbf{g}}' - t^2\,\vec{\omega} \times (\vec{\mathbf{v}}'_o + \frac{1}{3}t\,\vec{\mathbf{g}}')$$

Los primeros tres términos corresponden al movimiento de una partícula bajo campo gravitacional, en un sistema inercial. El término restante se debe a la rotación de la Tierra.



La forma que adopta la ecuación de movimiento depende del sistema de coordenadas elegido para describir el movimiento. Analizamos ahora el caso particular cuando se elige un sistema cartesiano (0'x'y'z') tal que z' coincide con el eje vertical (dirección de la plomada), x' apunta hacia el Sur y el eje y' apunta hacia el Este. Además $\vec{\mathbf{g}}'$ se supone constante para puntos cercanos a la superficie terrestre,

$$\vec{\mathbf{g}}' = -\,g'\,\hat{\mathbf{k}}'$$

También podemos expresar la dirección de rotación en términos de las direcciones del sistema S',

$$\vec{\omega} = \omega_{x'}\,\hat{\mathbf{i}}' + \omega_{z'}\,\hat{\mathbf{k}}'$$

$$\vec{\omega} = -\,\omega\cos(\lambda + \varepsilon)\,\hat{\mathbf{i}}' + \omega\,\mathrm{sen}\,(\lambda + \varepsilon)\,\hat{\mathbf{k}}'$$

en forma aproximada podemos escribir la expresión anterior como

$$\vec{\omega} \cong -\,\omega\cos\lambda\,\hat{\mathbf{i}}' + \omega\,\mathrm{sen}\,\lambda\,\hat{\mathbf{k}}'$$

donde λ es la latitud del punto 0'. En general, los vectores que representan las condiciones iniciales del movimiento tienen componentes en todos los ejes.

$$\vec{\mathbf{r}}'_o = x'_o\,\hat{\mathbf{i}}' + y'_o\,\hat{\mathbf{j}}' + z'_o\,\hat{\mathbf{k}}'$$

$$\vec{\mathbf{v}}'_o = \dot{x}'_o\,\hat{\mathbf{i}}' + \dot{y}'_o\,\hat{\mathbf{j}}' + \dot{z}'_o\,\hat{\mathbf{k}}'$$

Entonces:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\mathbf{v}}'_o + 1/3\ t\ \vec{\mathbf{g}}') = \hat{\mathbf{i}}' (- \omega\ \dot{y}'_o \text{ sen } \lambda) - ...$$
$$- \hat{\mathbf{j}}' (- \omega \cos \lambda\ (\dot{z}'_o - 1/3\ t\ g') - \omega\ \dot{x}'_o \text{ sen } \lambda) - ...$$
$$- \mathbf{k}'\ \omega\ \dot{y}'_o \cos \lambda$$

Finalmente, las expresiones siguientes representan la posición de la particula en el sistema no-inercial

$$x'(t) = x'_o + \dot{x}'_o\ t + t^2\ \omega \text{ sen } \lambda\ \dot{y}'_o$$

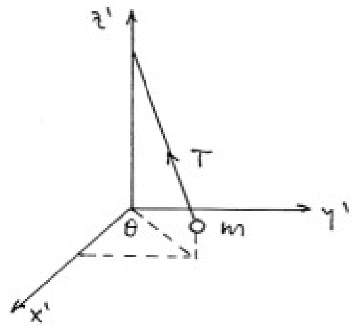
$$y'(t) = y'_o + \dot{z}'_o\ t - t^2\ \omega\ (\dot{z}'_o \cos \lambda + \dot{x}'_o \text{ sen } \lambda) + 1/3\ t^3\ \omega\ g' \cos \lambda$$

$$z'(t) = z'_o + \dot{z}'_o\ t - 1/2\ g'\ t^2 + t^2\ \omega\ g' \cos \lambda\ \dot{y}'_o$$

• **Péndulo de Foucault**

Analizamos a continuación el efecto de la rotación de la Tierra sobre el movimiento de un péndulo simple. La ecuación de movimiento para el péndulo es:

$$m\ \vec{\mathbf{a}}' = m\ \vec{\mathbf{g}}' + \vec{\mathbf{T}} - 2\ m\ \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}'$$



donde hemos despreciado el término $-m\ \vec{\mathbf{w}} \times (\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{r}}')$ por su magnitud relativamente pequeña. La tensión en la cuerda está dada por,

$$\vec{\mathbf{T}} = T_{x'}\ \hat{\mathbf{i}}' + T_{y'}\ \hat{\mathbf{j}}' + T_{z'}\ \hat{\mathbf{k}}'$$

donde

$$T_{x'} = - T\ \frac{x'}{L} \quad ; \quad T_{y'} = -T\ \frac{y'}{L}$$

y

$$T = |\ \vec{\mathbf{T}}\ |$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la masa m en componentes relativas a la superficie de la Tierra es:

$$m\ \ddot{x}' = - T\ \frac{x'}{L} + 2\ m\ \omega \text{ sen } \lambda\ \dot{y}'$$

$$m\ \ddot{y}' = - T\ \frac{y'}{L} - 2\ m\ \omega\ (\dot{x}' \text{ sen } \lambda + \dot{z}' \cos \lambda)$$

$$m\ \ddot{z}' = T_{z'} - m\ g' + 2\ m\ \omega \cos \lambda\ \dot{y}'$$

Estamos interesados en pequeños desplazamientos a partir de la vertical, ($\cos \phi = 1$), de manera que la magnitud de la tensión en la cuerda es prácticamente constante

$$T_{z'} \approx T \approx m\ g'$$

Además, podemos despreciar z' en comparación con x'. Por lo tanto el movimiento en el plano x'-y' es:

$$\ddot{x}' + \frac{g'}{L} x' = 2\,\omega'\,\dot{y}'$$

$$\ddot{y}' + \frac{g'}{L} y' = -\,2\,\omega'\,\dot{x}'$$

con

$$\omega' = \omega \text{ sen } \lambda$$

Para visualizar mejor el movimiento hacemos una transformación a coordenadas polares (ρ, θ)

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \text{ sen } \theta$$

Reemplazando estas variables y sus derivadas en las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2 + \frac{g}{L}\rho - 2\,\omega'\,\rho\,\dot{\theta} = 0$$

$$2\,\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta} + 2\,\omega'\,\dot{\rho} = 0$$

Se verifica que la solucion más simple para la segunda ecuación es,

$$\dot{\theta} = -\,\omega' = -\,\omega \text{ sen } \lambda$$

lo cual indica que la proyección del movimiento en el plano (x'-y') rota en el sentido de los punteros del reloj en el hemisferio Norte y en contra de ellos en el hemisferio Sur. Además, el movimiento en la coordenada radial es

$$\ddot{\rho} + \left\{ \frac{g}{L} + \omega'^{\,2} \right\} \rho = 0$$

es decir, el movimiento es armónico simple en la dirección radial con una frecuencia angular

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ya que el término $\omega'^{\,2}$ es muy pequeño. El período de precesión del péndulo es

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega'} = \frac{2\,\pi}{\omega \text{ sen } \lambda} = \frac{24 \text{ horas}}{\text{sen } \lambda}$$

Así por ejemplo, para Santiago (latitud cercana a 33°) el periodo de precesión es de aproximadamente dos días.

VI. DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

En este capítulo estudiaremos la dinámica de un sistema de **n** partículas de masas $m_1, m_2, ..., m_n$, cuyos vectores posición con respecto al origen de un sistema de coordenadas inercial son $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$

VI.1 Conceptos básicos

• Centro de masa.
Se define el centro de masa de un sistema de n partículas como el punto cuyo vector posición $\vec{R}_{CM}$ está dado por:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + ... + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... m_n}$$

donde

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

es la masa total del sistema. La definición vectorial del centro de masa es equivalente al conjunto de las tres expresiones escalares siguientes,

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

Podemos ahora deducir una expresión para la velocidad del centro de masa, v_{CM},

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$$

donde $\vec{v}_i$ es la velocidad de la partícula i. La aceleración del centro de masa, $\vec{a}_{CM}$ es:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{M}$$

con $\vec{a}_i$, la aceleración de la partícula i. El momentum del centro de masa, $\vec{P}_{CM}$, queda definido por:

$$\vec{P}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

es decir, es igual a la cantidad de momentum total del sistema. Derivando esta expresión con respecto al tiempo y asumiendo que hay conservación de masa para cada partícula se obtiene:

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\mathbf{a}}_i = M\,\vec{\mathbf{a}}_{CM}$$

• Ecuación de movimiento del centro de masa

Consideremos la ecuación de movimiento de la partícula i-ésima, sometida a una fuerza neta $\mathbf{F}_i$,

$$m_i\,\vec{\mathbf{a}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i$$

La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_i$ que actúa sobre la partícula i-ésima se puede descomponer en una fuerza externa y una fuerza interna al sistema,

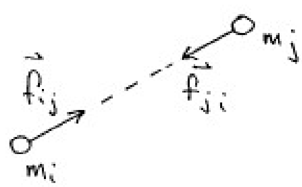
$$\vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \vec{\mathbf{F}}_i^{\,int}$$

donde la componente interna se debe a la interacción de la partícula i-ésima con el resto de las partículas que forman el sistema,

$$\vec{\mathbf{F}}_i^{\,int} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

y claramente se cumple que

$$\vec{\mathbf{f}}_{ij} = -\vec{\mathbf{f}}_{ji}$$



La componente externa de la fuerza, $\vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$, se debe a la resultante de todas aquellas fuerzas externas al sistema de n partículas que actúan sobre la partícula i-ésima. En consecuencia, podemos escribir que

$$m_i\,\vec{\mathbf{a}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

Sumando sobre las n partículas que forman el sistema tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{\mathbf{f}}_{ij}$$

El término que involucra las fuerzas internas se anula, con lo cual la ecuación de movimiento del centro de masa es

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$$

o en forma equivalente

$$M\,\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$$

Esta expresión indica que el centro de masa se mueve como una partícula cuya masa es igual a la masa total del sistema y sobre la que se ejerce una fuerza neta igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema. En ausencia de fuerzas externas al sistema se tiene que,

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,ext} = 0$$

con lo cual

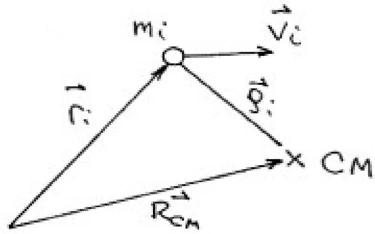
$$\frac{d\,\vec{P}_{CM}}{d\,t} = 0$$

lo cual implica que el momentum total del sistema se conserva,

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i = \text{constante}$$

• Momentum angular y torque

Estudiamos ahora algunos aspectos relacionados con los conceptos de momentum angular y torque en un sistema de partículas. Con respecto a un sistema inercial con origen en el punto 0, el momentum angular de la i-ésima partícula de masa m_i es



$$\vec{l}_{i\,(o)} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i\,\vec{v}_i$$

El momentum angular total del sistema de partículas con respecto a 0 es entonces:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_{i\,(o)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

La ecuación de movimiento para el momentum angular total es:

$$\frac{d\,\vec{L}_O}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \frac{d\,\vec{p}_i}{d\,t}$$

$$\frac{d\,\vec{L}_O}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \{\vec{F}_i^{\,ext} + \vec{F}_i^{\,int}\}$$

$$\frac{d\,\vec{L}_O}{d\,t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,int}$$

El término relacionado con las $\vec{F}^{\,int}$ se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,int} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,int} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$$

expresión que se anula debido a que la fuerza $\vec{f}_{ij}$ de interacción entre las partículas i y j actúa en la dirección $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Luego,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_o^{\,ext}$$

donde

$$\vec{\tau}_o^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,ext}$$

corresponde al torque total con respecto al punto 0 de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Si $\vec{\tau}_o^{\,ext} = 0$, $\vec{L}_o$ se conserva.

Se puede calcular el momentum angular con respecto a otro punto en el sistema. En particular el momento angular **en torno** al centro de masa (CM) se expresa como

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$$

lo cual también puede expresarse como:

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i (\vec{v}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

desarrollando el producto vectorial se obtiene que

$$\vec{L}_{CM} = \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i\right] \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0$$

se concluye que

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

es decir, el momentum angular en torno al centro de masa es igual al momentum angular relativo con respecto al centro de masa. Se puede deducir facilmente que la relación entre $\vec{L}_O$ y $\vec{L}_{CM}$ es la siguiente:

$$\vec{L}_O = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM} + \vec{L}_{CM}$$

relación que se conoce como **teorema de Koenig**.

Derivando con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\vec{\mathbf{L}}}_O = \vec{\tau}_o^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} = \vec{\mathbf{R}}_{CM} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext} + \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{CM}$$

relación de la cual se concluye que

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}^{\,ext}$$

en que

$$\vec{\tau}_{CM}^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i^{\,ext}$$

es el torque con respecto al centro de masa de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Si $\vec{\tau}_{CM}^{\,ext} = 0$, $\vec{\mathbf{L}}_{CM}$ se conserva.

Finalmente, podemos calcular el momentum angular del sistema con respecto a un punto P arbitrariamente seleccionado:

$$\vec{\mathbf{L}}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{r}}_{Pi} \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

$$\vec{\mathbf{L}}_P = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_P) \times m_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Se concluye que:

$$\vec{\mathbf{L}}_P = \vec{\mathbf{L}}_O - \vec{\mathbf{r}}_P \times \vec{\mathbf{P}}_{CM}$$

La ecuación de movimiento para $\vec{\mathbf{L}}_P$ se obtiene directamente derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_P}{dt} = \vec{\tau}_P^{\,ext} - \vec{\mathbf{v}}_P \times \vec{\mathbf{P}}_{CM}$$

donde

$$\vec{\tau}_P^{\,ext} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_P) \times \mathbf{F}_i^{\,ext}$$

es el torque con respecto al punto P de las fuerzas externas y $\vec{\mathbf{v}}_P$ es la velocidad del punto P en el sistema inercial. Se deja como ejercicio encontrar la ecuación del momentum angular relativo al punto P.

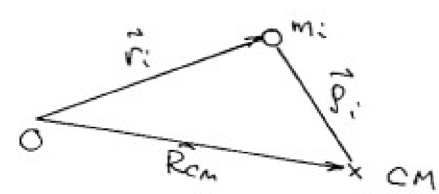
• **Energía cinética**

La energía cinética K de un sistema de partículas está dada por la suma de las energías individuales,

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} m_i \, v_i^2 \right\}$$

Sin embargo, podemos expresar la posición de la partícula i-ésima en términos de la posición del centro de masa ($\vec{R}_{CM}$) y de la posición relativa de la partícula cor respecto al centro de masa ($\vec{\rho}_i$),

$$\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{R}}_{CM} + \vec{\rho}_i$$



Derivando con respecto al tiempo, tenemos que

$$\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i$$

donde ρ_i es la velocidad relativa al centro de masa. Por lo tanto, la energía cinética del sistema puede expresarse también como

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \, (\vec{\mathbf{v}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i) \bullet (\vec{\mathbf{v}}_{CM} + \dot{\vec{\rho}}_i)$$

$$K = \frac{1}{2} M \, \mathbf{v}_{CM}^2 + \mathbf{v}_{CM} \bullet \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \, \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2}$$

Además, como

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{\mathbf{v}}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} m_i \, \dot{\vec{\rho}}_i$$

se concluye, por definición de la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_{CM}$, que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \dot{\vec{\rho}}_i = 0$$

Entonces,

$$K = \frac{1}{2} M \, \mathbf{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \, \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2}$$

$$K = K_{CM} + K_R$$

es decir, la energía cinética total de un sistema de partículas es igual a la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa (K_{CM}) más la suma de la energía cinética de las partículas individuales relativa al centro de masa (K_R). Este resultado, junto al hecho que las coordenadas relativas al centro de masa satisfacen

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0$$

muestran la importancia de poder asociar un sistema de coordenadas al centro de masa para simplificar la descripción del sistema de partículas.

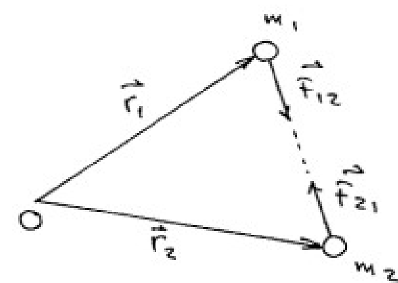
VI.2 Aplicaciones

• Movimiento de dos partículas interactuantes

Consideremos dos partículas, de masas m_1 y m_2 , que interactúan por medio de una fuerza central y que no existen fuerzas externas sobre ellas (sistema aislado). Las ecuaciones de movimiento, con respecto a un sistema inercial con origen en 0, son:

$$m_1 \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_2 = \vec{\mathbf{F}}_{21}$$



y las fuerzas satisfacen que

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21} = \vec{\mathbf{F}}$$

La solución de estas ecuaciones es, en general, compleja por la forma en que se mezclan las coordenadas $\vec{\mathbf{r}}_1$ y $\vec{\mathbf{r}}_2$ a través de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$. Sin embargo, introduciendo la coordenada del centro de masa,

$$\vec{\mathbf{R}}_{CM} = \frac{m_1 \vec{\mathbf{r}}_1 + m_2 \vec{\mathbf{r}}_2}{M}$$

con M igual a la masa total del sistema ($m_1 + m_2$), tenemos que la ecuación del centro de masa es

$$M \vec{\mathbf{R}}_{CM} = M \vec{\mathbf{a}}_{CM} = 0$$

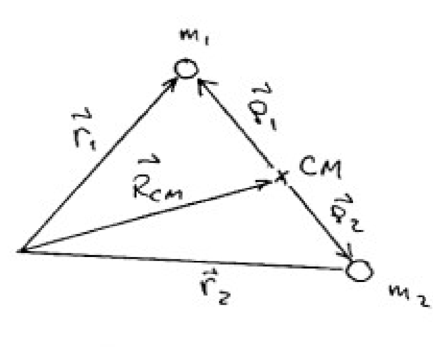
Esta ecuación implica que el momentum total del sistema se conserva,

$$\vec{\mathbf{P}}_{CM} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \text{constante}$$

Es posible describir la posición de las partículas en relación a un nuevo sistema de coordenadas, cuyo origen coincide con el centro de masa, a través de las coordenadas $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{R}}_{CM} + \vec{\rho}_1$$

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{R}}_{CM} + \vec{\rho}_2$$



Las ecuaciones del movimiento se reducen a

$$m_1\ddot{\vec{\rho}}_1 = \mathbf{F}(|\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2|)$$

$$m_2\ddot{\vec{\rho}}_2 = -\mathbf{F}(|\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2|)$$

Restando ambas ecuaciones se tiene que

$$\ddot{\vec{\rho}}_1 - \ddot{\vec{\rho}}_2 = \{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\}\ \mathbf{F}(|\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2|)$$

Definiendo la posición $\vec{\mathbf{r}}$ de la partícula 1 relativa a la partícula 2, como

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$$

tenemos que

$$\mu\,\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \vec{\mathbf{F}}(r)$$

donde μ se conoce como masa reducida y está definida por:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

La ecuación de movimiento para $\vec{\mathbf{r}}(t)$ describe el movimiento de la partícula 1 relativa a la partícula 2 y corresponde al caso de **una** partícula de masa reducida μ sometida a la fuerza central $\vec{\mathbf{F}}(r)$. Así, el hecho que m_2 se mueve en forma relativa al centro de masa se toma directamente en cuenta al usar la masa μ.

De la manera indicada, el problema del movimiento de dos cuerpos sujetos sólo a fuerzas internas se reduce al problema de una partícula de masa reducida μ moviéndose en un campo central. Un ejemplo típico es el caso de dos cuerpos bajo la acción de la fuerza gravitacional.

• Choque entre dos partículas

Estudiaremos el choque entre dos partículas bajo el supuesto que la fuerza con que interactúan las partículas durante el proceso es interna. En consecuencia, al no existir fuerzas externas, se conserva el momentum lineal total del sistema:

$$\vec{\mathbf{P}}_{CM} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2 = \vec{\mathbf{P}}'_{CM}$$

donde los vectores sin y con prima se refieren a valores de momentum antes y después del choque, respectivamente. Además, el balance energético indica que la energía total debe conservarse. Luego suponiendo que no hay cambios de energía potencial se tiene que

$$\frac{1}{2}m_1\,\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\,\mathbf{v}'^2_1 + \frac{1}{2}m_2\,\mathbf{v}'^2_2 + Q$$

donde Q indica la pérdida o ganancia de energía que ocurre como resultado del choque. Hay 3 casos a considerar:

a) $Q = 0$, el choque es elástico y no hay cambio en la energía cinética total;

b) $Q > 0$, el choque es elástico y hay una pérdida de energía cinética durante el choque;

c) $Q < 0$, existe una ganancia de energía cinética en el choque.

Si definimos la velocidad relativa entre las partículas, antes y después del choque como,

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$$

es fácil demostrar que la ecuación de conservación de energía equivale a:

$$\frac{1}{2}\mu \, v^2 = \frac{1}{2}\mu \, v'^2 + Q$$

donde μ es la masa reducida para el par de partículas. Definiendo el coeficiente de restitución ε como

$$\varepsilon = \frac{|\vec{v}'|}{|\vec{v}|}$$

se puede concluir que

$$Q = \frac{1}{2}\mu \, v^2 (1 - \varepsilon^2)$$

En el caso de un choque perfectamente elástico ($Q = 0$) se tiene que $\varepsilon = 1$. Si el choque es perfectamente inelástico ($|v'| = 0$) se tiene que

$$\varepsilon = 0 \quad ; \quad Q = \frac{1}{2}\mu \, v^2$$

En este caso las partículas permanecen unidas. En situaciones físicas reales, ε toma un valor intermedio entre los extremos previamente señalados.