



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Problemas en Electromagnetismo

(recopilación)

Francisco BRIEVA

versión 1.0
agosto 2021

Índice general

| | |
|--|----|
| Prefacio | 1 |
| Bibliografía | 2 |
| 1. Electrostatica | 3 |
| 2. Campos eléctricos en materiales: Conductores y Dieléctricos | 15 |
| 3. Corrientes estacionarias | 23 |
| 4. Magnetostática | 30 |
| 5. Inducción electromagnética | 39 |
| 6. Campos magnéticos en materiales | 49 |
| 7. Ecuaciones de Maxwell - Ondas electromagnéticas | 53 |
| Respuestas | 59 |

Prefacio

Esta colección de problemas sobre Electromagnetismo es un complemento para el estudio de esta área de la Física. Trata de facilitar el acceso a problemas del estilo y nivel esperado para este curso, el cual es parte del *syllabus* conducente a un primer grado en Ingeniería y Ciencias. Intencionalmente, se incluyen algunas respuestas (que irán aumentando en versiones posteriores) pero no sus soluciones. En tiempos de muchas urgencias y cuando el esfuerzo de pensar, desarrollar y concluir una pregunta se percibe anacrónico frente a la abundancia del material diseminado en internet, es válido insistir en la opción de desarrollar capacidades propias que permitan distinguirse de esa medianía que la repetición del conocimiento impone.

La fuente de los problemas es variada, la gran mayoría inspirados o reproducidos de textos sobre Electromagnetismo que han sido importantes a través de los años (ver bibliografía). Otros, corresponden a problemas planteados en otras latitudes o fueron diseñados en colaboración con otros profesores que han dictado el curso. Efectivamente, los problemas estándares en cualquier disciplina se reciclan en el tiempo, y nuestro caso no es la excepción. Por ello resulta hoy difícil identificar al autor que originalmente propuso un problema: sólo podemos agradecer su esfuerzo.

La selección que se presenta corresponde a problemas discutidos en cursos dictados durante los últimos cinco años. Esto se enfatiza al indicar, en el problema correspondiente, si ha sido utilizado en alguna instancia específica de evaluación: E1-2016P significa Ejercicio 1 del semestre Primavera 2016; C1-2021O significa Control 1 del semestre Otoño 2021, etc.. Los restantes, son problemas resueltos en instancias de apoyo auxiliar o sugeridos para estudio personal.

Se agradece especialmente el trabajo de Profesores Auxiliares, quienes aportaron a la elaboración y selección de problemas durante el desarrollo de alguna de las versiones del curso. Muy especialmente a Lucas González, Martín Gutiérrez, Matías Gutiérrez, Miguel Letelier, Susana Marquez, Manuel Morales, Paulina Palma, Benjamin Pérez, Nicolás Valdés y Cristóbal Zenteno.

Francisco Brieva
agosto 2021

Bibliografía[†]

- B-1 Classical Electricity and Magnetism, a contemporary perspective,
Barger V.D. y Olsson M.G., Allyn and Bacon, Inc. (1987)
- B-2 [Problemas propuestos y resueltos de Electromagnetismo](#),
Chi R., FCFM, Universidad de Chile (2017, disponible sólo en edición digital)
- B-3 Electromagnetismo,
Cordero P., Editorial Universitaria (2016)
- B-4 Lecciones de Física de Feynman. II. Electromagnetismo y materia,
Feynman, R.P., Leighton, R.B. y Sands, M., Fondo de Cultura Económica (2021)
- B-5 Introduction to Electrodynamics,
Griffith, D., Cambridge University Press (2017, 4a. edición)
- B-6 Problems and Solutions on Electromagnetism,
Lim Yung-kuo (editor), World Scientific (1993)
- B-7 Electromagnetic Fields and Waves,
Lorrain P., Corson D.R. y Lorrain F. (1988, 3a. edición)
- B-8 Electromagnetism,
Pollack G. y Stump D., Addison Wesley (2002)
- B-9 Electromagnetism: theory and applications,
Pramanik A., PHI Learning Private Ltd (2008, 2a. edición)
- B-10 Electromagnetism: problems with solutions,
Pramanik A., PHI Learning Private Ltd (2012, 3a. edición)
- B-11 Electricity and Magnetism,
Purcell E.M. y Morin D.J., Cambridge University Press (2013, 3a. edición)
- B-12 Electricidad y Magnetismo (Berkeley Physics Course, volumen 2),
Purcell E.M., Reverté, S.A. (1990)
- B-13 Fundamentos de la teoría electromagnética,
Ritz J.R., Milford F.J. y Christy W., Addison-Wesley Iberoamericana (2008, 4a. edición)

[†]Textos ordenados en orden alfabético por el apellido del primer autor.

Capítulo 1

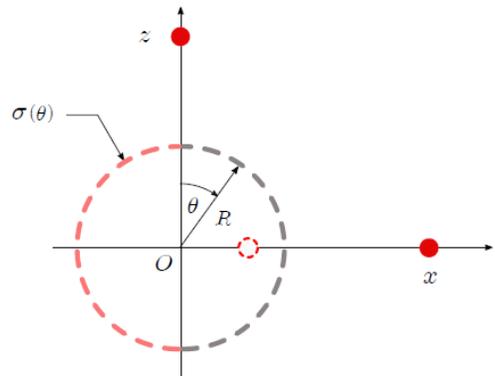
Electrostática

- E-1** Compare las magnitudes de las fuerzas eléctrica y gravitacional entre un protón y un electrón. Busque en la literatura la información que requiera para obtener una respuesta cuantitativa.
- E-2** Se requiere mantener cuatro cargas puntuales idénticas q en equilibrio en las esquinas de un cuadrado. Encuentre la carga puntual que lo hará, al colocarla en el centro del cuadrado.

- E-3** Se tiene una distribución de carga que cubre una superficie esférica de radio R y depende del ángulo polar θ , $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin \theta$ (σ_0 es conocido).

El problema es encontrar la fuerza que se ejerce sobre una carga q cuando ésta se encuentra fuera o dentro de la esfera de carga. Considere los casos en que la carga se encuentra sobre el eje $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

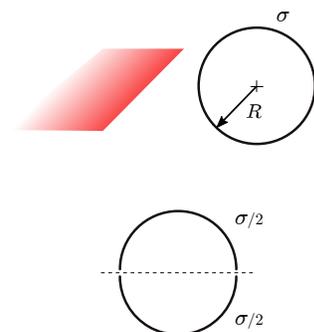
¿Qué efecto habría si la carga q es reemplazada por otra distribución esférica (radio R') de carga superficial $\sigma'(\theta) = \sigma'_0 \cos \theta$? ¿Se acelera? ¿Podría rotar? Basta un buen análisis cualitativo (con fundamentos) para responder. Si quiere calcular, mejor aún!



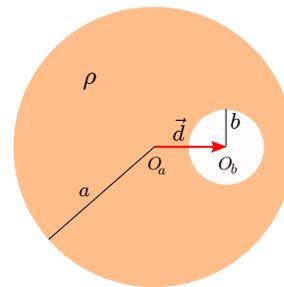
- E-4** Una cáscara esférica muy delgada y de radio R , cargada uniformemente con una densidad superficial de carga σ , se divide en dos mitades iguales al partirla por un corte plano, muy fino, que pasa por el centro de la esfera (ver figura).

Calcule la fuerza electrostática de repulsión entre las cáscaras semiesféricas resultantes.

Observación: El corte muy delgado que sufre el cascarón no altera sustancialmente la distribución del campo (significa despreciar los efectos que el corte produce)



E-5 Una esfera de radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ distribuida sobre todo su volumen, excluyendo una cavidad esférica de radio $b < a$ y donde $\rho = 0$. El centro de la cavidad O_b está ubicado a una distancia d , con $|d| < (a - b)$, desde el centro de la esfera (O_a). La distribución de masa de la esfera es proporcional a su distribución de carga. Se aplica un campo eléctrico externo \vec{E}_0 , uniforme. Calcule:



- la fuerza sobre la esfera;
- el torque con respecto al centro de la esfera y con respecto al centro de masa;
- el campo eléctrico total en el interior de la cavidad.

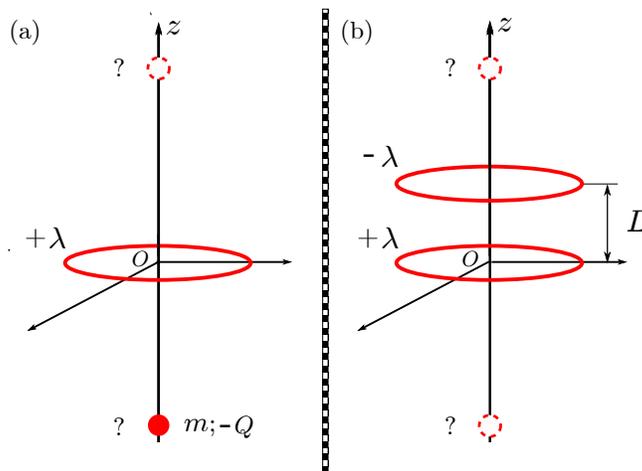
Respuesta (pág. 59)

E-6 (E1-2016P) Se tiene una densidad lineal de carga eléctrica positiva ($+\lambda$), distribuida homogéneamente en un anillo de radio a . Una partícula de masa m y carga eléctrica negativa ($-Q$) se coloca sobre el eje, en reposo, muy lejos del anillo. La gravedad es irrelevante en el problema.

- Estudie el movimiento de la partícula (figura). Para ello,
 - Calcule la fuerza eléctrica que se ejerce sobre la carga.
 - ¿Da lo mismo en que extremo del eje de simetría se coloca inicialmente la carga? Justifique cuantitativa o cualitativamente.
 - ¿Cuál es la velocidad máxima que adquiere? Dónde, en el eje, ocurre?

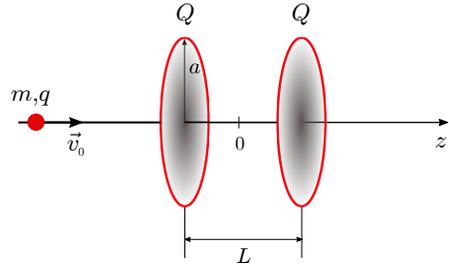
Coloque un segundo anillo de carga, ahora negativa ($-\lambda$), a una distancia L del primero. Entonces,

- Estudie el movimiento de la partícula en esta nueva situación (figura). Para ello,
 - Calcule la fuerza eléctrica total que se ejerce sobre la carga.
 - ¿Da lo mismo en que extremo del eje de simetría se coloca inicialmente la partícula? Justifique cuantitativa o cualitativamente.
 - ¿Existe algún punto del eje donde la partícula tiene velocidad nula? Describa lo que ocurre y el efecto que tiene el segundo anillo de carga.



Respuesta (pág. 59)

E-7 Consideren dos anillos circulares de radio a , alineados según sus ejes de simetría y separados una distancia L , con cargas $+Q$ uniformemente distribuida en cada uno de ellos. Una partícula de masa m y carga q puede viajar por el eje de simetría.



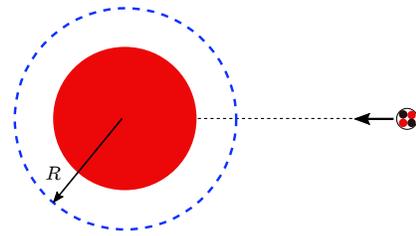
a) Determine la fuerza electrostática que se ejerce sobre la partícula en todo punto del eje de simetría.

b) Grafique la componente de la fuerza según el eje para los casos en que la carga q sea positiva o negativa; estudie la existencia de puntos de equilibrio estable y, de existir, la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a ellos.

c) La fuerza en cuestión, ¿es conservativa? ¿Es posible hablar de una función energía potencial eléctrica?

d) Si la partícula incide sobre los anillos, viajando según el eje desde una distancia lejana y velocidad inicial \vec{v}_0 , analice que sucede con ese movimiento según la magnitud de la velocidad inicial $\|\vec{v}_0\|$ y el signo (\pm) de la carga.

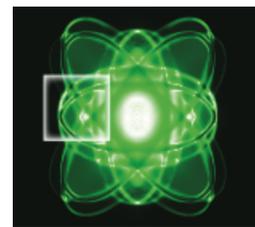
E-8 Un modelo rudimentario de un átomo es considerar una membrana esférica de radio R y carga eléctrica negativa igual a $-Z|e|$. Esta membrana envuelve una esfera uniformemente cargada, de radio λR y carga total $+Z|e|$. En el modelo, $\lambda \leq 1$ y la carga neta del átomo es nula.



a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio como función de la distancia r al centro del átomo.

b) Una partícula alfa, consistente de un átomo de helio doblemente ionizado (He^{++}), se aproxima radialmente al átomo. Determine la fuerza eléctrica que afecta a la partícula α . Grafique y compare los casos $\lambda = 0,9$ y $\lambda = 10^{-4}$.

E-9 Considere el siguiente modelo para un núcleo de un átomo: el núcleo está compuesto por una esfera maciza de radio R , la cual tiene una densidad de carga volumétrica radial $\rho(r) = \rho_0 (1 - r^2/R^2)$, donde ρ_0 tiene dimensiones de C/m^3 y r es la coordenada radial. Encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio.



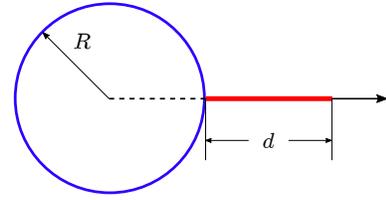
Respuesta (pág. 59)

E-10 Las superficies interior ($r = a$) y exterior ($r = b$) de un cascarón esférico no conductor tienen la misma densidad de carga σ constante. No hay carga en el resto del espacio. Encuentre el campo eléctrico en las zonas $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$. ¿Cómo cambian sus resultados si ahora la superficie interior posee una densidad de carga $-\sigma$?

Respuesta (pág. 59)

E-11 Una esfera uniformemente cargada (con carga total Q) y de radio R está centrada en el origen. Determine la fuerza resultante que actúa sobre una línea uniformemente cargada (con carga total q) orientada radialmente y con sus extremos en $r = R$ y $r = R + d$.

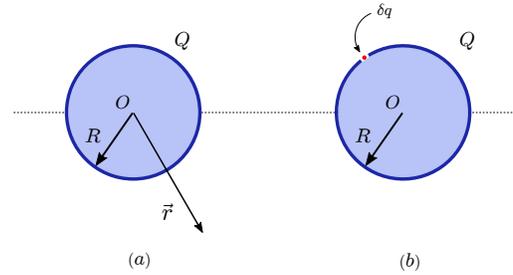
Respuesta (pág. 59)



E-12 Una carga eléctrica Q se distribuye uniformemente sobre la superficie de una esfera de radio R .

a) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio como función de la distancia r al centro de la esfera. Grafique su magnitud para $0 \leq r \leq \infty$.

b) La superficie tiene ahora un pequeño orificio circular de área δS . Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que experimenta un elemento de carga δq ubicado en el centro del orificio.



E-13 (C1-2016P) Considere una Electrostática basada en una Ley de Fuerzas del tipo

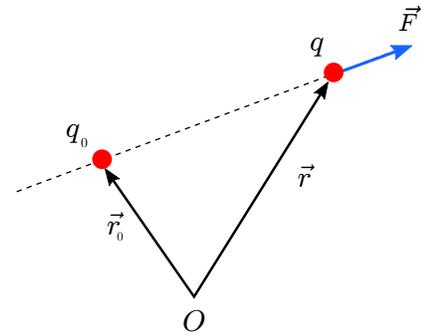
$$\vec{F}_{q(q_0)} = K \frac{q_0 q}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^4} (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

correspondiente a la fuerza que una carga q_0 , ubicada en la posición \vec{r}_0 , ejerce sobre la carga q ubicada en \vec{r} y K es una constante de las dimensiones adecuadas. Al respecto:

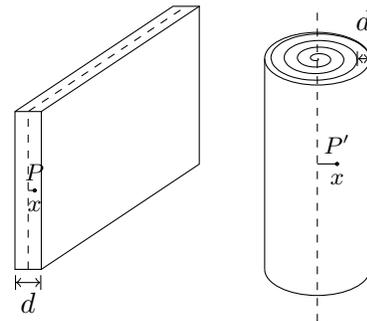
a) Defina un campo electrostático. Es conservativo? Examine la posibilidad de definir una función potencial para éste campo. ¿Qué interpretación da Ud. a esta función?

b) ¿Existe un teorema equivalente al teorema de Gauss para la electrostática?

c) Considere una distribución uniforme de carga por unidad de superficie (σ) de geometría plana. Calcule el campo en un punto cualquiera del espacio y compare con el resultado de la electrostática usual. Grafique sus resultados.



E-14 (C1-2020P) Una lámina no conductora muy extensa de grosor d contiene una carga uniformemente distribuida de densidad ρ en todo su volumen. El campo eléctrico en un punto P dentro de la lámina a una distancia x del plano central es E_1 . Luego la lámina es enrollada para formar un cilindro sólido muy largo. El campo eléctrico en un punto P' dentro del cilindro a una distancia x de su eje es E_2 . Encontrar $\frac{E_1}{E_2}$.

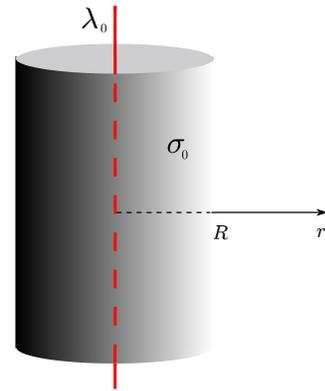


E-15 Dos esferas rígidas tienen el mismo radio R , la misma masa M y cargas opuestas $\pm Q$. Ambas cargas están distribuidas de manera uniforme y rígida en los volúmenes de las esferas. Las dos esferas se encuentran inicialmente en reposo a una distancia $x_0 \gg R$ entre sus centros. Debido a sus cargas opuestas, ellas se atraen entre sí y comienzan a moverse en $t = 0$.

- Evaluar la energía inicial del sistema.
- Evaluar la velocidad de las esferas cuando se tocan entre ellas, o sea, cuando la distancia entre sus centros es $2R$.
- Suponga que, luego de tocarse, las esferas pueden atravesarse sin roce. Evaluar la velocidad de las esferas cuando sus centros coinciden.

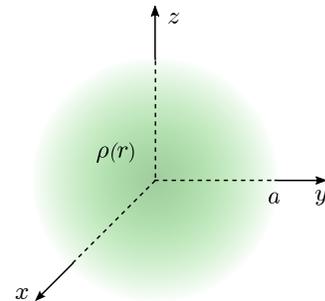
E-16 (E2-2016P)[†] Considere un cable infinito cargado con una densidad lineal de carga λ_0 , uniforme, rodeado por un casquete cilíndrico infinito de radio R y densidad superficial homogénea σ_0 . Si la densidad lineal coincide con el eje del cilindro, determine:

- El campo eléctrico en todo el espacio. Grafique su magnitud en función de la distancia al eje del cilindro: ¿es continuo el campo eléctrico?
- El potencial eléctrico en todo el espacio. Tome como referencia $V(r = R) = 0$ y grafique la función potencial. Comente sobre la continuidad de la función.
- Si el alambre se desplazara una distancia δ del eje del cilindro, ¿cómo determinaríamos el nuevo valor del campo eléctrico?



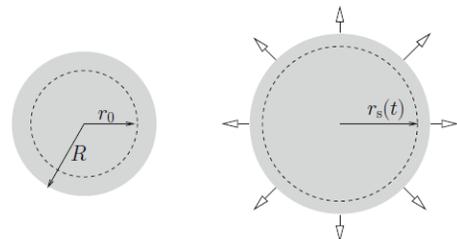
E-17 Se tiene una esfera de radio a con una distribución de carga $\rho(r)$ que produce un potencial eléctrico en su interior ($r \leq a$) dado por $V(r) = V_0 r^3 + K$ donde V_0 es conocido y K es una constante a determinar.

- Encuentre la densidad de carga $\rho(r)$ y la carga total Q de la esfera.
- Calcule el campo eléctrico en todo el espacio.
- Calcule el potencial en todo el espacio.



E-18 En un tiempo $t = 0$ se tiene una nube esférica de radio R y carga total Q , comprimiendo N partículas puntuales. Cada partícula tiene carga $q = Q/N$ y masa m . La densidad de partículas es uniforme y ellas se encuentran en reposo.

- Calcular el potencial electrostático para una carga localizada a una distancia $r < R$ del centro en $t = 0$.
- Debido a la repulsión de Coulomb la nube se empieza a expandir radialmente manteniendo su simetría esférica. Asuma que las partículas no se superponen entre sí, o sea, si dos partículas están localizadas inicialmente en $r_1(0)$ y $r_2(0)$, con $r_2(0) > r_1(0)$, entonces $r_2(t) > r_1(t)$ para todo tiempo posterior $t > 0$. Considere a las partículas localizadas en un cascarón esférico de ancho infinitesimal,



[†]Corresponde a Problema 3.12 de colección de problemas de R. Chi

o sea, si el radio del cascarón es r_s , entonces se tiene que $r_0 < r_s < r_0 + dr$ con $r_0 + dr < R$ en $t = 0$. Mostrar que la ecuación de movimiento de este cascarón es:

$$m \frac{d^2 r_s}{dt^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r_s^2} \left(\frac{r_0}{R} \right)^3$$

c) Encontrar la posición inicial de las partículas que adquieren la máxima energía cinética durante la expansión de la nube y determine el valor de dicha energía máxima.

E-19 Considere un cilindro de radio R y largo infinito.

a) Si la densidad de carga volumétrica es $\rho(r) = \rho_0 r e^{-r}$, determine la magnitud y dirección del campo eléctrico a cualquier distancia r del cilindro.

b) Ahora considere que tiene una densidad de carga volumétrica ρ_0 constante. Si dentro del cilindro se hace un agujero cilíndrico de radio $R/4$, con eje paralelo al del cilindro original, pero desplazado δ con respecto a este eje, determine la magnitud y dirección del campo eléctrico dentro del agujero.

E-20 (C1-2018P) Tratando de entender la expansión del universo[†], fue sugerido que la materia tiene una carga eléctrica neta (fenómeno no detectable en la experiencia cotidiana). Para ello, considere un volumen esférico V de tamaño astronómico, que contiene una densidad uniforme de N [átomos/ m^3] de hidrógeno, cada uno de ellos de masa m_H y se supone que la carga del protón es $q_p = (1 + \eta) q_e$, con q_e la magnitud de la carga del electrón.

a) Encontrar el campo eléctrico a una distancia r del centro del volumen ($V^{1/3} \gg r$).

b) Estimar el mínimo valor de η para el cual la repulsión eléctrica es mayor que la atracción gravitacional y el gas se expanda. Calcular un número es importante para tener el orden de magnitud. ¿Algún comentario?

c) Suponiendo que la densidad se mantiene constante por la creación continua de materia en el espacio, estudie el movimiento de un átomo en la variable radial r y determine la dependencia de su velocidad radial con r . Comente su resultado y la relación que tiene con el fenómeno de expansión que se busca explicar.

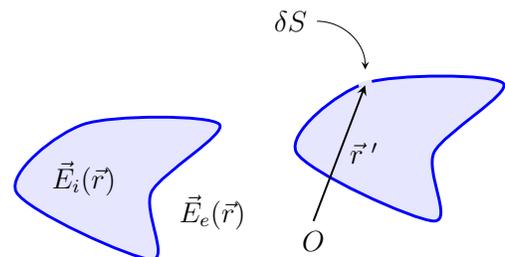
d) Determine el tiempo T para que la distancia radial de un átomo aumente en un factor e . Ese tiempo T puede tomarse como el correspondiente a la edad del universo.

Datos: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$,

$$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} C, m_H = 1,67353 \times 10^{-27} Kg, T_{univ} \sim 13,7 \cdot 10^9 \text{ años.}$$

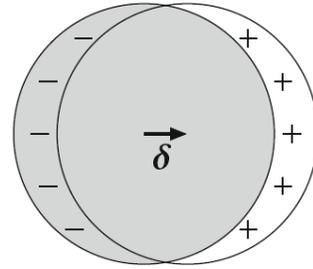
Respuesta (pág. 59)

E-21 Considere una superficie cerrada de forma arbitraria que ha sido cargada eléctricamente, además en su interior se encuentra una distribución de carga de densidad $\rho(\vec{r})$, de tal manera que al interior y al exterior de la superficie existen campos electrostáticos $\vec{E}_i(\vec{r})$ y $\vec{E}_e(\vec{r})$ respectivamente. A un punto \vec{r}' de dicha superficie, se le practica una pequeña perforación de área δS . Encontrar una expresión para el campo eléctrico en \vec{r}' .



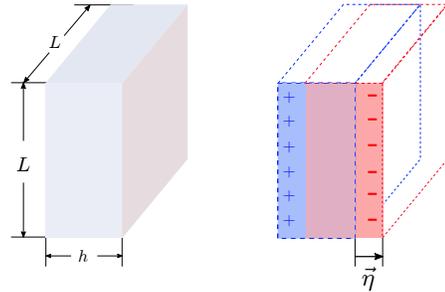
[†]La idea de este problema se debe a Lyttleton y Bondi (1959). Si le interesa conocer como terminó la historia y si se encontraron valores de η que lo validaran, investigue !!

E-22 Podemos asumir que una esfera neutra de radio R puede entenderse como la superposición de dos esferas rígidas: una con densidad de carga uniforme y positiva $+\rho$ y una segunda esfera de mismo radio R pero con densidad de carga negativa $-\rho$. Luego asumimos que es posible desplazar las esferas una cantidad δ entre ellas, sin alterar la estructura de cada esfera.



- Encontrar el campo eléctrico en la zona donde ambas esferas intersectan.
- Encontrar el campo eléctrico afuera de ambas esferas, discuta qué ocurre en el límite $\delta \ll R$.

E-23 (C1-2021O) Un bloque cuadrado de material de lado L tiene un espesor h , con $h \ll L$ (ver lado izquierdo de figura). El material, eléctricamente neutro, está constituido por iones de masa m_i distribuidos con una densidad uniforme N_i [partículas/vol] y electrones de conducción (o electrones 'libres') de masa $m_e \ll m_i$ y carga $q_e = -|e|$, distribuidos también en forma uniforme con densidad $N_e = Z N_i$, donde Z es el número entero que indica el grado de ionización y $|e|$ es la magnitud de la carga del electrón.

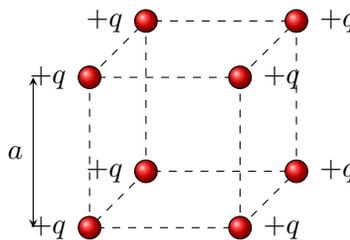


Se aplica un campo eléctrico externo y todos los electrones de conducción sufren un mismo desplazamiento $\|\vec{\eta}\|$, tal que $\|\vec{\eta}\| \ll h$, perpendicularmente a la base del bloque (ver lado derecho de figura). Se supone que las densidades N_i y N_e se mantienen constantes y que la distribución de los iones en el material permanece inalterada por el campo externo. Los efectos en los bordes del bloque son despreciables.

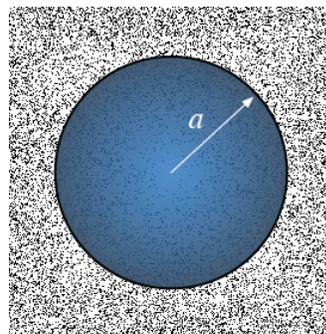
- Determinar el campo eléctrico en todo el espacio, producto del desplazamiento de los electrones. Grafique su resultado, detallando los valores relevantes que toma y el lugar donde ocurren. Ud. elija el sistema de coordenadas más conveniente.
- El campo eléctrico externo se remueve. Describa cualitativamente que ocurre al bloque de electrones. Determine la fuerza neta (o resultante) que actúa sobre la distribución de electrones.
- Estudie el movimiento para el caso límite de un desplazamiento pequeño $\|\vec{\eta}\| \ll h$ e interprete físicamente su resultado destacando los parámetros que resulten relevantes.

Respuesta (pág. 59)

E-24 Considere un cubo de lado a donde en cada uno de sus vértices se coloca una carga $+q$. Estas cargas están fijas en la estructura. Estudiar el punto de equilibrio que existe en el centro del cubo y mostrar si es estable o inestable.



E-25 Una esfera maciza de radio a con carga desconocida, se encuentra completamente inmersa en un fluido que posee una densidad volumétrica de carga dada por $\rho(r) = -\epsilon_0 k^2 V(r)$ para $r > a$, donde k es una constante, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y $V(r)$ el potencial eléctrico. Experimentalmente se ha determinado que el potencial en el borde de la esfera es V_0 con respecto al infinito (donde se asume que el potencial se anula) y que la distribución volumétrica de carga dentro de la esfera es uniforme.



a) Determine la densidad de carga $\rho(r)$ y el potencial eléctrico $V(r)$ en todo el espacio.

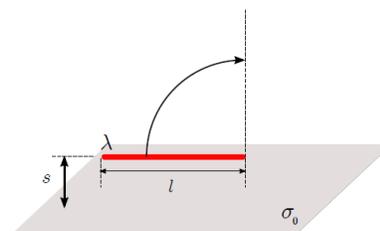
b) Si inicialmente la esfera estaba en el vacío, ¿cuánto trabajo debió ser realizado para colocar el fluido cargado alrededor de ella?

Indicación: puede ser útil definir $\psi(r) = r V(r)$ para facilitar la operatoria del problema.

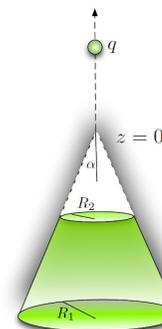
E-26 La intensidad del campo eléctrico en la atmósfera, cerca de la superficie terrestre, es alrededor de 100 V/m y apunta hacia la Tierra. El potencial eléctrico aumenta a medida que lo hace la altura sobre la superficie, hasta valores del orden de 300.000 V. Este campo se mantiene por tormentas que depositan cargas negativas sobre la tierra. Calcule la carga eléctrica que tiene aproximadamente tiene la Tierra. Detalle las aproximaciones que realiza para hacer su cálculo.

E-27 (C1-2017P) Una densidad de carga lineal λ con largo l está paralela a un plano infinito con densidad superficial de carga σ_0 . ¿Cuánto trabajo se requiere para rotar la línea de carga a la posición vertical?

Respuesta (pág. 60)

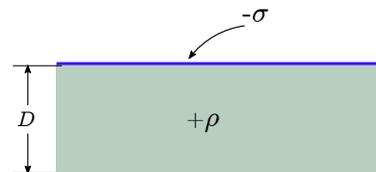


E-28 Considere el manto de un cono de cortado (como se muestra en la figura) entre $\rho = R_1$ y $\rho = R_2$, cargado con una densidad $\sigma(\rho) = \sigma_0 \frac{a}{\rho}$ donde ρ es la distancia entre el manto y el eje del cono. Una carga puntual q se trae desde el infinito hasta el vértice del cono siguiendo un camino sobre el eje de simetría (eje z), tal y como se ilustra en la figura.



Encuentre el trabajo necesario que realiza un agente externo para llevar la carga desde infinito hasta el vértice de cono, con velocidad constante.

E-29 Se tiene una placa no-conductora infinita, de espesor despreciable, que tiene una densidad de carga superficial uniforme $-\sigma$. Junto a ella, una placa infinita paralela de espesor D y con una densidad de carga volumétrica uniforme $+\rho$. Todas las cargas están fijas.

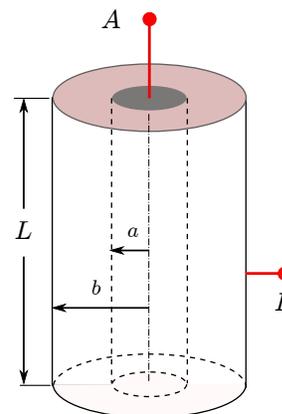


- Calcular la dirección y magnitud del campo eléctrico,
- a) a una distancia h sobre la placa cargada negativamente;
 - b) dentro de la placa de espesor finito, a una distancia d bajo la placa cargada negativamente;
 - c) a una distancia H bajo ambas placas.

E-30 (C1-2018P) Justifique sus respuestas brevemente y con claridad.

- a) En cierta zona finita del espacio del espacio existe un campo eléctrico cuyas componentes cartesianas $\{E_x, E_y, E_z\}$ son proporcionales a los productos $\{yz, xz, xy\}$ de coordenadas cartesianas. ¿Es un campo electrostático? ¿Hay una fuente de carga eléctrica en el mismo volumen?
- b) Dos planos infinitos, uniformes, de densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$, intersectan ortogonales entre si. Encontrar el campo eléctrico (magnitud y dirección) en todo el espacio y haga un gráfico aproximado de las líneas de campo.
- c) ¿Cuál es la energía eléctrica almacenada en una configuración de 4 cargas puntuales (tres positivas y una negativa) ubicadas en las esquinas de una cuadrado de lado a : $+q$ en $(0,0)$, $+q$ en $(0,a)$, $+q$ en $(a,0)$ y $-q$ en (a,a) ?
- d) Una carga eléctrica Q se ubica, a una distancia δ del centro de un volumen cúbico de lado L ($L > \delta$), sobre la recta que une dos caras opuestas, perpendicular a ellas y que pasa por el centro. Calcular el flujo de campo eléctrico por la superficie correspondiente a la cara del cubo más cercana a la carga.

E-31 (C1-2016P) Un diodo rectificador, de geometría cilíndrica, es un dispositivo construido con un material en el que destacan 2 zonas. La zona P ($0 \leq r \leq a$) que tiene una densidad uniforme de carga negativa $\rho_P = -e N_P$, con e la magnitud de la carga del electrón y N_P el número de iones por unidad de volumen del medio. La zona N ($a \leq r \leq b$) tiene una densidad uniforme de carga positiva. El diodo es eléctricamente neutro.



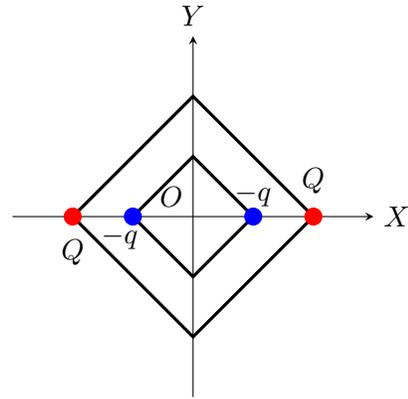
- a) Determine la densidad de carga ρ_N en la zona N .
- b) Calcule el campo eléctrico en el diodo ($0 \leq r \leq b$). Grafique la magnitud del campo eléctrico en función del radio.
- c) ¿Cuánta energía debe suministrarse a un electrón para que atraviese el dispositivo desde el terminal metálico B hasta el terminal A ?

Respuesta (pág. 60)

E-32 Explosión Coulombiana plana. Partículas idénticas de masa m y carga q se distribuyen con velocidad inicial cero y densidad uniforme n_0 en el espacio correspondiente a una placa infinita $|x| < \frac{1}{2} a$ en $t = 0$. Para $t > 0$, la placa se expande debido a la repulsión electrostática entre los pares de partículas. Encontrar la ecuación de movimiento para las partículas, su solución y la energía cinética que adquieren.

Respuesta (pág. 60)

E-33 (C1-2020P) Dos cuadrados de lados a y $2a$ se posicionan en el plano xy con sus centros en el origen. Dos cargas de valor $-q$ son fijadas en los vértices opuestos del cuadrado pequeño y dos cargas de valor Q se fijan en los vértices opuestos del cuadrado grande (ver figura).



a) Encontrar el trabajo requerido para mover el cuadrado grande lentamente hasta infinito desde la posición inicial.

b) Hallar el trabajo hecho por un agente externo en rotar lentamente el cuadrado pequeño en 90° en torno al eje Y , seguido por una rotación del cuadrado grande en 90° en torno al eje Z .

E-34 Una carga total Q se distribuye uniformemente en el volumen de una esfera de radio R .

Calcular la energía electrostática de esta configuración de carga siguiendo los siguientes caminos:

a) Calcule el trabajo que se requiere para armar la esfera cargada a través de mover capas infinitesimales de cargas sucesivas, desde el infinito a su ubicación final.

b) Calcule la integral de volumen del campo eléctrico que produce la distribución de carga en todo el espacio (Ω),

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 dV$$

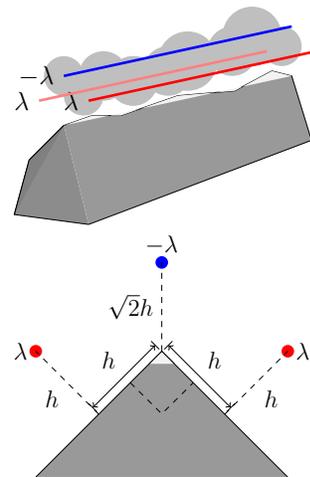
c) Calcule

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{esfera} \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV$$

donde ρ es la densidad volumétrica de carga y ϕ es el potencial electrostático. Discuta las diferencias con el cálculo realizado en (b).

Respuesta (pág. 60)

E-35 Se desea estimar la intensidad de campo eléctrico y la densidad de carga eléctrica en las cercanías de una sierra de montañas cuando pasa por ellas una tormenta eléctrica. Para esto, se modela la sierra como la intersección perpendicular entre dos semiplanos extensos. Las nubes de la tormenta eléctrica puede ser representadas por tres líneas de carga de densidades λ , $-\lambda$ y λ que se extienden paralelamente a lo largo de la sierra como se muestra en la figura de este problema. Considere a la Tierra como un conductor ideal.

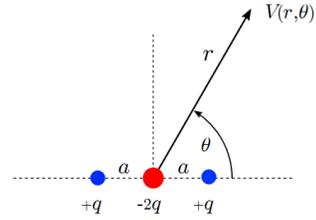


a) Calcule la fuerza, por unidad de longitud, que experimenta la sierra.

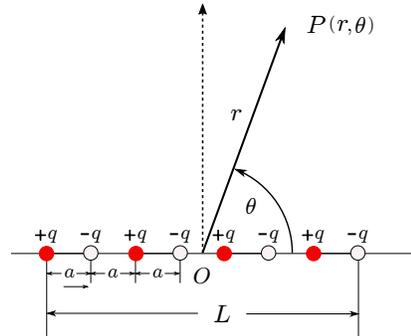
b) Obtenga las cargas totales, por unidad de longitud, que se inducen en las superficies de la sierra.

c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en la cima?

- E-36 Calcular el potencial y campo eléctrico en puntos lejanos para la distribución de cargas que se muestra en la figura.



- E-37 (E3-2016P) Un modelo de molécula lineal consiste en una sucesión de cargas positivas y negativas alternadas, separadas por una distancia inter atómica a . El largo total de la cadena es L y existe un número N (par) de átomos.



- a) Determine el potencial eléctrico, en aproximación dipolar, en un punto P alejado de la cadena ($r \gg L$).
 b) Calcule la energía necesaria para agregar una carga (del signo opuesto) en la posición correspondiente, en un extremo de la cadena. ¿Cuál es su resultado para $N \rightarrow \infty$?

Recuerde: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \mp \dots$

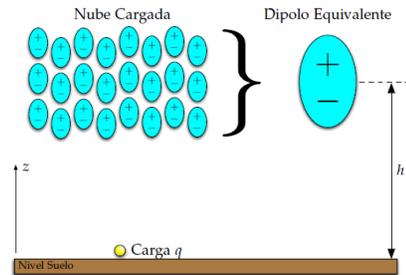
- E-38 Dos cables paralelos tienen densidades uniformes de carga por unidad de largo λ y $-\lambda$, y están separados por una distancia ℓ . Los campos asociados a los cables decaen como $1/r$ (r distancia medida desde eje del cable y perpendicular a él). Entonces lejos de los cables, tenemos una versión “2D” de un dipolo, donde los cables actúan como cargas puntuales con campos que decaen como $1/r$ (en vez del $1/r^2$). Encuentre $V(r, \theta)$ y $\vec{E}(r, \theta)$ (considerando el plano perpendicular a los cables).

- E-39 Demuestre que para una distribución cualquiera de cargas, el momento dipolar \vec{p} es independiente de la posición del origen del sistema de coordenadas si la carga total del sistema es nula. Aplicación: considere una distribución de carga lineal y uniforme sobre un anillo de radio a . La carga total de la distribución es $-q$ y el anillo está contenido en el plano xy , con centro en el origen. Una carga $+q$ está ubicada en el interior del anillo en $z = +d$. Encuentre el monopolo y el momento dipolar eléctrico de la distribución. Obtenga una expresión para el potencial eléctrico a este mismo orden.

- E-40 Una nube de tormenta puede asimilarse a conjunto de dipolos orientados según se muestra en la Figura. Para representar eléctricamente dicha nube se utiliza un dipolo equivalente, el cual tiene una distancia d entre sus cargas y está dispuesto a una altura h (punto medio de la nube).

Para medir las cargas del dipolo se realiza el siguiente experimento: se coloca una carga q a nivel de suelo, justo debajo del centro de la nube, y se mide la fuerza sobre la carga. Si el valor de dicha fuerza es F ,

- a) Calcule el campo eléctrico en la posición donde se encuentra la carga q . Además se pide calcular el potencial $V(z)$ en el eje z .
 b) Calcule el trabajo necesario para llevar una carga q a una altura $\frac{h}{2}$.

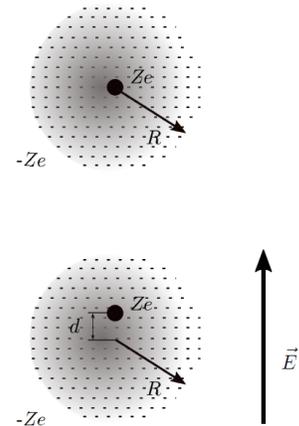


E-41 (C1-2017P) Un átomo tiene Z protones en su núcleo y Z electrones orbitando en torno a él con simetría esférica de radio R (figura superior). La magnitud de la carga del electrón es e . Este átomo se coloca en un campo eléctrico externo \vec{E} uniforme (figura inferior).

a) Explique que sucede con el núcleo y la distribución electrónica. Seguirá siendo esférica la nube de electrones o se deforma? Bosqueje lo que Ud. piensa que está ocurriendo. Todas sus afirmaciones deben ser justificadas con claridad y rigurosidad.

b) Suponiendo que la distribución electrónica mantiene su simetría esférica, determine la ubicación del núcleo d relativa al origen de la distribución de electrones de modo que la atracción electrostática anule el efecto del campo externo. ¿Qué restricción impondría a la magnitud de \vec{E} para que su resultado tenga algún sentido?

c) Determine el momento dipolar inducido y compare el potencial eléctrico $V(\theta)$ que el átomo polarizado produce en la superficie de la nube (ignore efecto de \vec{E}) con respecto a situación inicial. Tome el origen al centro de la distribución de carga negativa. Analice sus resultados para $\theta = 0, \pi$.
Respuesta (pág. 60)



Capítulo 2

Campos eléctricos en materiales: Conductores y Dieléctricos

CD-1 (C1-2017P) Justifique sus respuestas brevemente y con claridad.

a) Dos esferas conductoras de radios distintos se conectan con un cable, y ambas tienen carga neta positiva. ¿Cuál de ellas tiene más carga?

(i) La grande; (ii) La chica; (iii) Tienen la misma carga; (iv) La respuesta depende de como se cargaron las esferas.

b) Una cuerda cuelga de un clavo, y en cada extremo inferior se coloca una esfera no conductora, con la misma carga positiva cada esfera. Estas esferas están separadas un poco por su repulsión electrostática, y se encuentran en equilibrio. Si se coloca un plano conductor a potencial cero bajo las esferas, después de que todo el sistema alcance el equilibrio, las esferas:

(i) Se acercaron entre ellas; (ii) Se alejaron entre ellas; (iii) Se mantienen iguales; (iv) No hay suficiente información.

c) Si un palo cargado se acerca a un globo conductor, y el globo es neutro:

¿el globo se atrae al palo, se repele, o no siente fuerza?

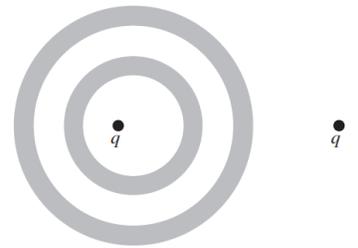
d) ¿Cuál(es) de los siguientes campos vectoriales representa un posible campo electrostático?

(i) $\vec{E}(\vec{r}) = x \hat{x} - y \hat{y}$; (ii) $\vec{E}(\vec{r}) = y \hat{x} + x \hat{y}$; (iii) $\vec{E}(\vec{r}) = y \hat{x} - x \hat{y}$

CD-2 Las regiones sombreadas de la figura representan dos capas esféricas conductoras concéntricas neutras. Las regiones blancas representan vacío. Dos cargas puntuales q se ubican como se muestra; la del interior está descentrada.

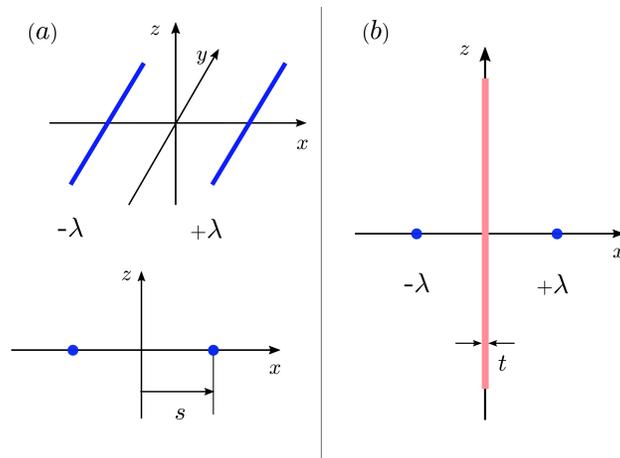
a) Dibuje una imagen razonablemente precisa de las líneas de campo en todas partes e indique cualitativamente las diversas densidades de carga. ¿Qué cantidades tienen simetría esférica?

b) Repita las tareas anteriores en el caso en que las dos capas conductoras estén conectadas por un cable conductor para que tengan el mismo potencial.



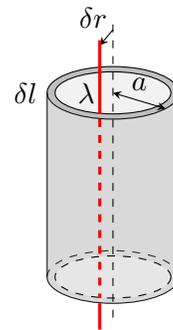
CD-3 (C1-2020P) Dos distribuciones uniformes de carga, muy largas y radio despreciable, se instalan paralelas a una distancia $2s$. Una de las distribuciones tiene una densidad lineal de carga $+\lambda$ [C/m] y la otra $-\lambda$ [C/m] como se indica en figura (a). El largo de las distribuciones es mucho mayor que s , de modo que pueden considerarse infinitamente largas para encontrar los campos eléctricos y potenciales.

- Calcular el campo eléctrico \vec{E} en un punto arbitrario del plano equidistante a ambas distribuciones
- ¿Cuál es el potencial eléctrico en el plano?
- Coloque un plano conductor (∞) delgado (espesor $t \sim 0$) coincidiendo con el plano geométrico equidistante a las distribuciones, como se indica en figura (b). Indique, argumentando, si el modifica el campo eléctrico que las distribuciones producen en todo el espacio. ¿Hay una densidad de carga superficial inducida en el plano conductor? Calcúlela si su respuesta es positiva.
- Se conecta la distribución de carga $-\lambda$ al plano conductor a través de un alambre. Explique si algo ocurre: ¿cambia el campo y el potencial eléctrico en todo el espacio? Su evaluación dependerá de la calidad de sus argumentos.

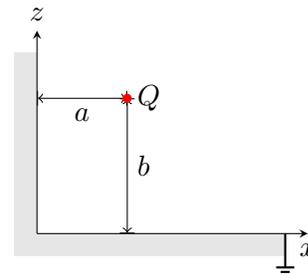


CD-4 Se tiene un cascarón cilíndrico conductor, de ancho δl y radio externo a . Dentro del cilindro hay un alambre de densidad de carga lineal λ , este alambre está desplazado una distancia δr del centro del cilindro.

- Encontrar las densidades de carga inducidas en el borde interno y externo del cascarón cilíndrico.
- Calcular el campo eléctrico para $r > a$, interprete.



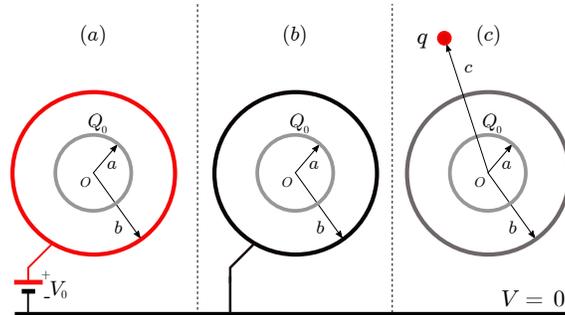
CD-5 Una carga puntual Q se localiza en el punto $(a, 0, b)$ entre dos semiplanos conductores perpendiculares entre sí, tal como se muestra en la figura de este problema. Calcule la densidad de carga superficial en cada semiplano conductor y la fuerza que experimenta la carga puntual.



CD-6 (C1-2018P) Considere dos esferas conductoras huecas, concéntricas, de radios a y b ($b > a$) y espesor despreciable aunque finito. El conductor interior se carga con $Q_0 > 0$. Se supone que la tierra (considerada como potencial de referencia) está lo suficientemente alejada como para no perturbar lo que ocurre en los conductores.

a) El conductor externo se conecta a tierra a través de una batería que tiene una diferencia de potencial V_0 entre sus bornes (ver figura a).

- (i) Calcular la carga inducida en las superficies interior y exterior de cada conductor.
- (ii) Calcular el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- (iii) Calcular la función potencial eléctrico en todos los puntos del espacio y la diferencia de potencial entre los conductores.



b) El conductor externo se conecta directamente a tierra (ver figura b). Repita los cálculos anteriores.

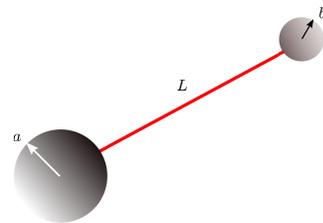
c) Se desconecta el conductor externo de tierra y se acerca una carga $q > 0$ hasta una distancia $c > b$ desde el centro del sistema (ver figura c). Decida si la acción de la carga q modifica o no (con fundamentos):

- (i) la carga total de cada conductor;
- (ii) la densidad de carga en ellos;
- (iii) la función potencial en todo el espacio y la diferencia de potencial entre los conductores.

CD-7 (C1-2016P) Dos esferas conductoras, de radios a y b , se conectan por un alambre conductor de longitud L ($L \gg a, b$). Calcular la tensión en el alambre cuando una carga Q se distribuye entre las dos esferas.

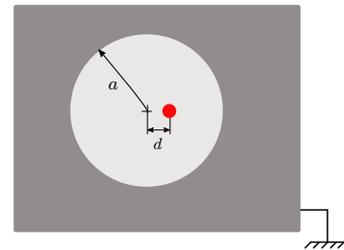
Comentario: se requiere un cálculo aproximado, a partir de la condición $L \gg a, b$. Explique o comente sus aproximaciones.

Respuesta (pág. 60)



CD-8 (C1-2017P) Una cavidad esférica, de radio a , se extrae de un bloque de metal conductor que se mantiene conectado a tierra. Una carga Q se coloca a una distancia d del centro de la cavidad.

Determine la densidad de carga superficial inducida en el conductor y la fuerza que se ejerce sobre la carga Q .



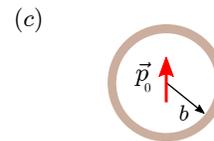
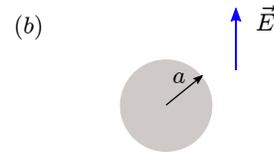
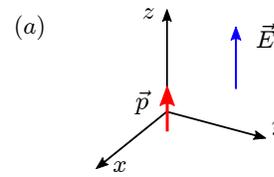
Respuesta (pág. 60)

CD-9 (C1-2021O) Un dipolo eléctrico \vec{p} se coloca en el origen de un sistema de referencia cartesiano, paralelo al eje z , en la presencia de un campo eléctrico uniforme \vec{E} , también paralelo al eje z (ver figura).

a) Determine el potencial electrostático total en un punto cualquiera, $V(\vec{r})$, con $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ su vector posición, tomando como referencia que el potencial es nulo en el plano $\{x, y\}$, es decir, $V_{\text{ref}}(x, y, 0) = 0$. Además del plano $\{x, y\}$, demuestre que hay otra superficie equipotencial de potencial nulo, la cual corresponde a una esfera y calcule su radio.

Usando el resultado de punto (a), encuentre el potencial eléctrico en todo el espacio para:

- b) una esfera conductora de radio a se coloca en un campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 ;
 c) un dipolo \vec{p}_0 se coloca en el centro de una cáscara conductora esférica de radio b .

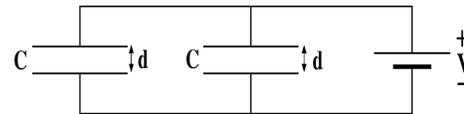


CD-10 (Examen-2020P) Dos condensadores con aire entre sus placas, cada uno con capacidad C , se conectan a una batería de voltaje V como se indica en figura. Las placas están separadas una distancia d . Exprese sus resultados en términos de los datos.

- a) ¿Cuál es la carga total en cada una de las placas (4 respuestas!)?
 b) Indique el campo eléctrico (dirección y magnitud) entre las placas de cada condensador.

Sin hacer cambios (la batería permanece conectada), se llena el espacio entre placas del condensador a la izquierda con un dieléctrico de constante $\epsilon = 3\epsilon_0$.

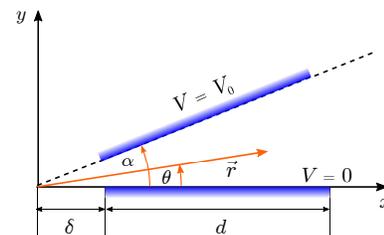
- c) ¿Cuál es ahora la carga total en cada una de las placas (4 respuestas!)?
 d) Indique el campo eléctrico (dirección y magnitud) entre las placas de cada condensador.



CD-11 Dos placas conductoras cuadradas de lado d se ubican radialmente formando un ángulo α entre ellas. Uno de los extremos de ambas placas se encuentra a una distancia δ de la intersección entre los planos que las contienen. La separación entre ambas en el otro extremo es mucho menor que su longitud d .

Una de las placas se encuentra a potencial $V = 0$ y la otra a $V = V_0$. Encuentre:

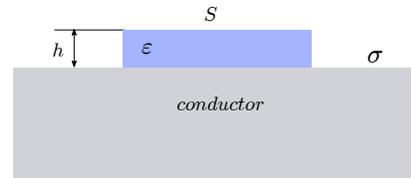
- a) El campo eléctrico entre las placas.
 b) La densidad superficial de carga sobre las placas.
 c) La capacidad C del sistema.



CD-12 a) Dos planos paralelos que conforman un condensador de placas paralelas tienen una superficie S y separación $h \ll \sqrt{S}$. Encontrar la fuerza entre los planos en dos casos: El condensador aislado (como función de una carga Q constante) y el caso en que el condensador esté conectado a una fuente de voltaje V constante.

b) Se tiene una esfera conductora de radio a . Se pide encontrar la presión electrostática (Fuerza por unidad de superficie) para los siguientes casos: la esfera tiene carga Q y está aislada; la esfera está conectada a una fuente de voltaje que la mantiene con un potencial V constante respecto al infinito.

CD-13 (C2-2020P) Un bloque dieléctrico, de constante dieléctrica ϵ , espesor h y superficie $S \gg h$, está en contacto con una superficie plana conductora que tiene una densidad superficial de carga σ , uniforme, como se indica en figura. Efectos de borde son despreciables.



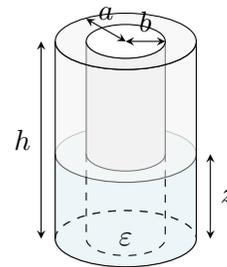
a) Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.

b) Calcular las densidades superficiales de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.

c) ¿Cómo cambian las respuestas para los casos a) y b) si el bloque dieléctrico se mueve una distancia $d < h$ desde el plano conductor? ¿Cómo depende de d la energía electrostática del sistema? ¿Hay una fuerza entre el bloque y el conductor?

CD-14 Se tienen dos conductores cilíndricos concéntricos de radio a y b (con $a > b$) ambos de altura h . Además, entre los dos cilindros existe una diferencia de potencial V_0 constante.

Si al medio entre los cilindros (vacío inicialmente) se le agrega un material con constante dieléctrica ϵ hasta una altura z , calcule la fuerza sobre el material en función de su altura.



CD-15 (C2-2018P) Considere un una esfera conductora cargada, de radio a , rodeada de un medio aislante uniforme, de radio b ($b > a$) y constante dieléctrica ϵ . Para $r > b$ se tiene el vacío. Se conoce que el conductor tiene un potencial $V(r = a) = V_0$ y se ha elegido como referencia un potencial nulo en puntos lejanos ($V(\infty) = 0$). En la interfaz correspondiente a $r = b$, la carga libre es nula.

Determine la carga eléctrica libre total en la esfera conductora y la función potencial en todo el espacio.

CD-16 a) Considere una esfera de radio a con una polarización constante en una sola dirección \vec{P} , calcule el campo eléctrico en todo el espacio.

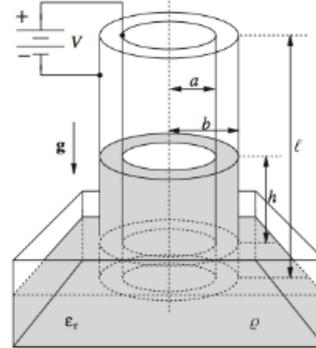
b) Luego a la misma esfera con polarización constante se le hace un agujero esférico concéntrico de radio $b < a$, encontrar el campo eléctrico en todo el espacio.

CD-17 (C2-2018P) La superficie de cierto material aislante, homogéneo e isótropo (constante dieléctrica ϵ), tiene una densidad de carga libre σ_ℓ . El material está en contacto con el aire (ϵ_0).

Tomando como referencia la normal (\hat{n}) que define la superficie del medio, determinar el campo eléctrico, el vector desplazamiento y la polarización en puntos cercanos y a ambos lados de la superficie de separación. Comente la consistencia de sus resultados.

CD-18 Una forma interesante de medir la constante dieléctrica de un líquido es considerando la siguiente situación: Tenemos un condensador cilíndrico con radio interno a y radio externo b , con un largo $l \gg b$, así que los efectos de los extremos son despreciables. El eje del condensador es vertical y en su parte inferior está inmersa en un recipiente que contiene un líquido con densidad de masa ρ y permitividad eléctrica relativa $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, todo esto en presencia del campo gravitacional.

Cuando una fuente de voltaje mantiene una diferencia de potencial V entre los dos cascarones cilíndricos, el líquido sube una altura h en la zona intermedia del condensador. Mostrar que podemos evaluar ϵ_r a partir de obtener h .

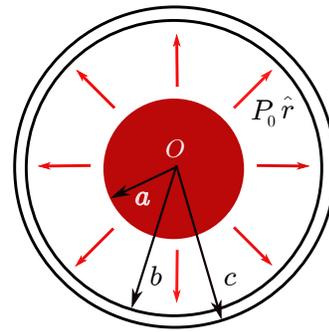


CD-19 (E4-2016P) Una esfera conductora maciza, de radio a , está encerrada por una cáscara conductora esférica de radio interior b y exterior c . Ambos conductores están descargados y aislados. El espacio entre ellos está lleno con un material que posee una polarización permanente $\vec{P} = P_0 \hat{r}$ (\hat{r} es la dirección radial).

a) Calcular las densidades de carga libre y de polarización que aparecen en las superficies esféricas $r = a$, $r = b$ y $r = c$. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los conductores?

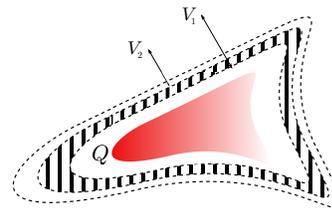
b) Ambos conductores se interconectan mediante un hilo metálico fino. Repita los cálculos de (a) en estas nuevas condiciones.

Respuesta (pág. 60)

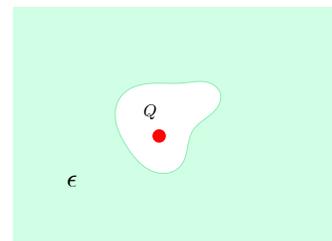


CD-20 (C2-2016P) Un conductor de forma arbitraria se encuentra cargado con Q . Las superficies equipotenciales (superficies de potencial eléctrico constante) que lo rodean se indican en la figura.

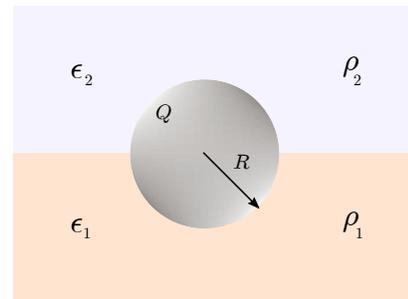
Si el espacio entre las superficies equipotenciales V_1 y V_2 se llena con un medio de permitividad eléctrica ϵ , calcular la energía gastada en polarizar el dieléctrico.



CD-21 Calcule la carga superficial de polarización inducida por una carga libre Q colocada al interior de un dieléctrico hueco, de permitividad eléctrica ϵ . Expresar resultado en función de la permitividad relativa (o constante dieléctrica) $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ del medio.



CD-22 Una esfera conductora de densidad de masa ρ y radio R flota en un liquido de densidad $\rho_1 > 2\rho$ y permitividad dieléctrica ϵ_1 en presencia de un campo gravitacional. Sobre este liquido hay un medio gaseoso con densidad de masa $\rho_2 \ll \rho$ con permitividad dieléctrica ϵ_2 . La esfera tiene carga Q tal que la mitad de su volumen se encuentra sumergida. Encuentre:

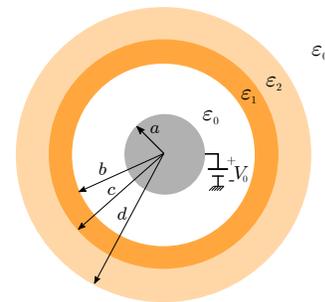


a) el campo eléctrico en todo el espacio, la densidad superficial de carga libre sobre la esfera y las densidades de carga de polarización en ambos dieléctricos;

b) el valor de Q .

Respuesta (pág. 60)

CD-23 (C2-20210) Se dispone de la siguiente configuración: una esfera conductora (conductividad infinita) de radio a rodeada por dos cáscaras dieléctricas, concéntricas a la esfera central; la primera de permitividad ϵ_1 y limitada por los radios b y c y la segunda de permitividad ϵ_2 y ubicada entre los radios c y d .



La esfera conductora se conecta a una batería que la mantiene a un potencial V_0 constante con respecto a infinito ($V(\infty) = 0$)

a) Determine el campo y el potencial eléctrico en todo el espacio. Indique los detalles de su cálculo.

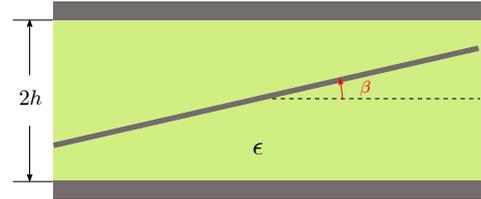
b) Graficar la magnitud del campo eléctrico y el potencial eléctrico, como función de la distancia r al centro de la esfera conductora, indicando con claridad el valor que toman en los puntos relevantes (cambio de medio). Identifique si hay discontinuidades en el campo eléctrico y, en caso afirmativo, explique porqué ocurrirían. ¿Cómo explica el comportamiento del potencial eléctrico según sus comentarios previos?

c) Considere dos situaciones iniciales diferentes: una, como en las preguntas previas, con el conductor conectado a un potencial constante V_0 ; la otra, dándole una carga Q_0 constante al conductor aislado. Calcule la energía eléctrica (W_e) almacenada por el sistema y compárela a aquella que se almacena cuando no existen los dieléctricos (W_{e0}). Indique si W_e es mayor, igual o menor que W_{e0} y porqué ocurre, para cada caso por separado.

CD-24 En el centro de una cavidad esférica de radio a , practicada en un bloque de material dieléctrico de permitividad eléctrica ϵ , se coloca una carga puntual q . Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio. Demuestre que la suma de las cargas inducidas y la carga original es q/ϵ , independiente de a .

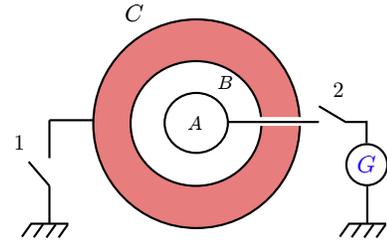
CD-25 Una esfera conductora descargada de radio R y masa M flota sobre un líquido de permitividad eléctrica ϵ y densidad (de masa) ρ_ℓ , de modo que $3/4$ de su volumen está sumergido. Encontrar el potencial V_0 al que debe mantenerse la esfera para asegurar que la mitad de su volumen estará sumergido.

CD-26 Se quiere estudiar el efecto que tendría insertar, en forma oblicua, una placa plana perfectamente conductora entre las placas planas de un condensador. El condensador tiene placas cuadradas de lados $a \times a$ separadas un distancia $2h$ ($h \ll a/2$), con la placa inferior conectada a un potencial $V = V_0$ mientras que la placa superior tiene un potencial $V = 0$. El material entre placas es un material dieléctrico de permitividad ϵ . El eje central de la placa oblicua es equidistante a cada placa paralela, formando un ángulo β con la horizontal (figura). Despreciando los efectos de borde, calcule



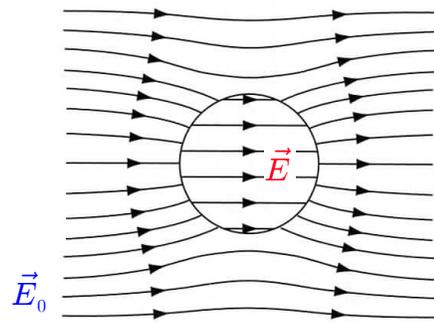
- la función potencial eléctrico entre las placas, los campos eléctricos y los vectores desplazamientos;
- las densidades superficiales de carga libre y de polarización;
- la capacidad del condensador con la placa oblicua en función de β .

CD-27 Tres cascarones conductores esféricos concéntricos A, B y C tienen radios respectivamente $r_A = 3$ cm, $r_B = 6$ cm y $r_C = 9$ cm. Entre los conductores B y C hay un dieléctrico caracterizado por una permitividad $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$, donde la susceptibilidad $\chi = (\beta r^3 - 1)$ y r es la distancia medida desde el centro (en cm) y $\beta = 0,01$ cm⁻³. Una carga $Q_0 = 2 \mu\text{C}$ se coloca inicialmente en el conductor B, después se cierra el interruptor 1, dejando al conductor C conectado a tierra. Determinar:



- el potencial V_A del conductor A;
 - las cargas de polarización presentes.
- Luego, se abre el interruptor 1, el conductor A se conecta mediante un interruptor 2 a un generador que inyecta en A una carga Q_x y aumenta su potencial a $V'_A = 2V_A$. En esta nueva situación calcular:
- las cargas presentes en los conductores A, B y C;
 - el trabajo realizado por el generador.

CD-28 Una esfera sólida, hecha de un material dieléctrico lineal e isótropo, se coloca en una región del espacio con un campo eléctrico uniforme \vec{E}_0 . Encuentre el campo eléctrico dentro de la esfera utilizando el siguiente método de aproximaciones sucesivas: primero, suponga que el campo dentro de la esfera es simplemente \vec{E}_0 , y con esto, obtenga la polarización asociada \vec{P}_0 . Esta polarización genera un campo \vec{E}_1 por si sola, que modifica la polarización en una cantidad \vec{P}_1 , la cual modifica el campo en un monto \vec{E}_2 , y etcétera. El campo resultante es, por superposición, $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$. Podría tener que resolver alguna serie.



Capítulo 3

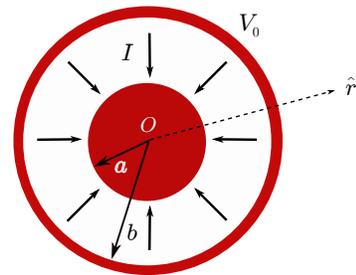
Corrientes estacionarias

- I-1 En la superficie de la Tierra (supuesta esférica, radio 6.400 Km) hay un campo eléctrico promedio $\vec{E} = E_r \hat{r}$ ($E_r \approx -100$ [V/m] y \hat{r} es la dirección radial) y una densidad de corriente $\vec{J} = J_r \hat{r}$ ($J_r \approx -3,5 \times 10^{-12}$ [A/m²]) que lleva electrones desde la Tierra hacia las capas altas de la atmósfera. La diferencia de potencial entre la Tierra y la zona alta de la atmósfera es 400 kV.
- ¿Cuál es la corriente total que llega a la superficie terrestre?
 - ¿Qué potencia se requiere para mantener esta corriente?
 - ¿Cómo se compara esta potencia a la capacidad de una planta generadora de electricidad* ? La carga eléctrica en la superficie de la Tierra está siendo restablecida continuamente por medio de las descargas eléctricas (relámpagos), quienes llevan carga negativa desde la zona alta de la atmósfera hacia la superficie. Un relámpago típico alcanza una corriente máxima de 10^4 [A] y mueve una carga de 20 [C] en una fracción de segundo.
 - Estime el número de relámpagos que ocurren cada segundo, en promedio, en todo el mundo.

- I-2 (E6-2016P) Un conductor ideal esférico, de radio a , está rodeado por otro conductor también ideal, concéntrico, de radio $b > a$. El espacio entre los conductores está lleno con un material cuya conductividad varía con el radio, $\sigma_c = \frac{c}{r}$, con c una constante de las dimensiones adecuadas.

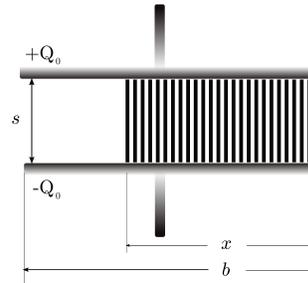
Si la esfera exterior se mantiene a un potencial V_0 [V] y una corriente total I [A] fluye radialmente entre los conductores, determine

- El potencial eléctrico a una distancia r arbitraria ($b > r > a$ y $r > b$) desde el centro;
 - Densidades de carga (o carga total) en los conductores y en el medio entre los conductores;
 - La resistencia eléctrica del medio entre los conductores ideales y la potencia que en él se disipa.
- Respuesta (pág. 61)



*Para su conocimiento, la mayor planta generadora de electricidad en el mundo está en China (3 Gorges Damm, hidroeléctrica, 22.500 MW). En Chile, las de mayor capacidad (~ 5) están en el rango de 700-800 MW (Ralco, hidro; Atacama y San Isidro, gas; Guacolda, carbón). La mayor de origen solar alcanzará una potencia de 200 MW (Cerro Dominador, termosolar). La capacidad instalada en el país es del orden de 30.000 MW en la actualidad.

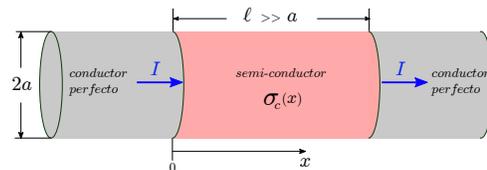
I-3 (C2-2017P) Considere un condensador de placas paralelas, con lados b cada placa, separadas por una distancia s y tal que $s \ll b$. El espacio entre placas se llena parcialmente con un material de permitividad ϵ y conductividad σ_c . Inicialmente, el condensador se carga con $\pm Q_0$ en cada placa.



- Calcule el tiempo que demora el condensador en disminuir a la mitad la carga en sus placas.
- Determine la fuerza sobre el dieléctrico.
- Compare la energía inicial del condensador con la que tiene después de transcurrido un tiempo largo. Explique qué sucedió.

Respuesta (pág. 61)

I-4 Una corriente estacionaria fluye por un cilindro de largo l y radio $a \ll l$ hecho de un material semiconductor que obedece la ley de Ohm y cuya conductividad viene dada por $\sigma_c(x) = \sigma_0 e^{x/l}$, donde x es la distancia a lo largo del eje del cilindro, mientras que σ_0 es una constante conocida. Ambos extremos están conectados a cilindros conductores perfectos del mismo radio que el semiconductor. Suponga, además, que $V(0) = V_0$ y $V(l) = 0$, y que la densidad de corriente es uniforme.



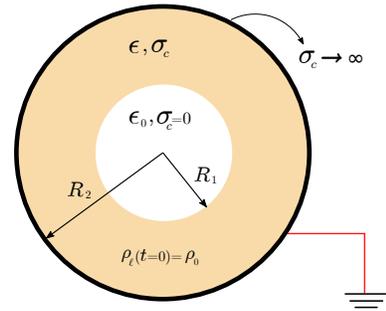
- Calcule la resistencia del semiconductor y la corriente que lo atraviesa.
- Encuentre el potencial como función de la posición $V(x)$.
- Determine las cargas libres presentes en el sistema.
- Durante el régimen estacionario, ¿existe variación de energía electrostática almacenada en el sistema? Discuta su respuesta. ¿Existe energía disipada a lo largo del tiempo? Si su respuesta es positiva, ¿a dónde va esta energía? ¿De dónde viene esta energía? Discuta su respuesta.
- Si la fuente externa se desconectara, explique cualitativamente qué pasaría con las cargas libres del sistema.
- Durante el periodo transitorio, determine cuál sería la variación de energía electrostática almacenada en el sistema. ¿Cuánta energía se disiparía por efecto Joule durante este periodo? Discuta cómo se relacionan ambas cantidades.

I-5 Una esfera conductora de radio a y conductividad σ tiene una carga neta Q . En un tiempo $t = 0$ la carga está uniformemente distribuida en el volumen de la esfera, con una densidad de carga volumétrica $\rho = Q/(3/4\pi a^3)$. Como las condiciones estáticas de un conductor aislado solo permiten que las cargas se ubiquen en su superficie, para un tiempo $t > 0$ la carga progresivamente migrará hacia la superficie de la esfera.

- Evaluar la evolución temporal de la distribución de carga en la esfera, y el campo eléctrico en todo el espacio. Estime numéricamente el tiempo característico de relajación τ para el caso de un buen conductor (cobre por ejemplo, buscar su conductividad).
- Evaluar la evolución temporal de la energía electrostática en la esfera durante la redistribución de las cargas.
- Mostrar que la energía disipada mediante el efecto Joule es igual a la pérdida de la energía electrostática.

I-6 (Examen-2020P) Una capa dieléctrica disipativa cilíndrica, $R_1 < r < R_2$, con una constante dieléctrica ϵ y conductividad σ_c (g), se carga uniformemente a un tiempo $t = 0$ con una densidad volumétrica de carga libre $\rho_\ell(t = 0) = \rho_0$. La región para $0 < r < R_1$ es vacío con constante dieléctrica ϵ_0 y nula conductividad.

Suponga que la densidad de carga superficial en $r = R_1$ es nula todo el tiempo, $\sigma_s(r = R_1, t) = 0$. La superficie $r = R_2$ es un cilindro perfectamente conductor conectado a tierra. Se supone que los cilindros son muy largos, de manera que se desprecian efectos de tamaño.

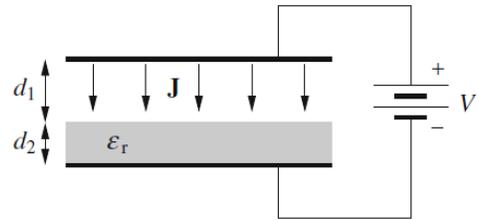


a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el espacio vacío, $0 < r < R_1$, como función del tiempo?

b) ¿Cuál es la densidad de carga volumétrica y el campo eléctrico dentro de la capa dieléctrica, $R_1 < r < R_2$, como función de la distancia radial r y del tiempo?

c) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en la interfaz en $r = R_2$?

I-7 Cada placa de un condensador de placas paralelas tiene una superficie S y separación d . El espacio entre las placas está dividido en dos capas, de grosor d_1 y d_2 respectivamente, con $d_1 + d_2 = d$. La capa de grosor d_1 está rellena con un gas de constante dieléctrica equivalente al vacío, mientras que la capa de grosor d_2 está rellena de un material con permitividad eléctrica ϵ_r . La diferencia de potencial entre las placas es V y se mantiene constante por una fuente externa.



a) Encuentre el campo eléctrico en el condensador.

Una descarga ionizante comienza en la capa llena de gas en $t = 0$ y éste comienza a ser un conductor. Asumimos para aquello que, en $t > 0$, el gas ionizado puede ser considerado como un conductor ohmico de resistividad constante y uniforme ρ .

b) Luego de un tiempo suficientemente largo, observamos que la corriente deja de fluir en el gas, y el sistema llega a un estado estacionario (o sea, todas las cantidades físicas son constantes). Encuentre el campo eléctrico en estas condiciones y la densidad de carga libre entre las dos capas.

c) Encuentre la dependencia del tiempo del campo eléctrico en la fase transiente ($t > 0$), y el tiempo de relajación que necesitó el sistema para llegar al estado estacionario.

I-8 (C2-2018P) Dos electrodos (objetos metálicos, muy buenos conductores, de forma arbitraria y volumen finito) se encuentran inmersos en un medio de conductividad σ_c (ó g , según su gusto) y constante dieléctrica ϵ .

a) Encuentre una relación entre la capacidad y la resistencia que existe entre los electrodos.

b) Se conecta una batería entre los electrodos, con lo cual se cargan y quedan con una diferencia de potencial V_0 entre ellos. Encuentre como varía la diferencia de potencial en el tiempo luego que se desconecta la batería.

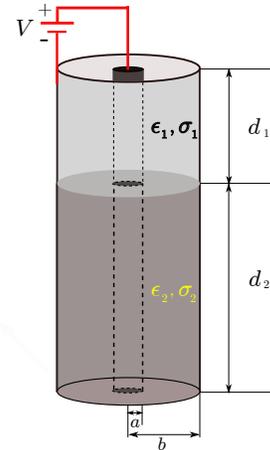
I-9 (C2-2016P) Se tiene un cable coaxial formado por dos cilindros metálicos concéntricos, de longitud $(d_1 + d_2)$ y radios a y b . El espacio entre ambos conductores se llena con dos medios dieléctricos no ideales, caracterizados por permitividades y conductividades (ϵ_1, σ_1) en una zona de largo d_1 y (ϵ_2, σ_2) en una zona de largo d_2 , respectivamente.

Manteniendo una diferencia de potencial V constante entre los cilindros conductores, calcule:

- la densidad de corriente en el espacio entre los conductores ($a < r < b$);
- la resistencia y la capacidad del cable coaxial;
- la energía almacenada y la potencia disipada por el cable.

Indicación: Considere que $(d_1 + d_2) \gg a, b$, lo que le permite suponer simetría radial. Desprecie las corrientes que circulan por los conductores.

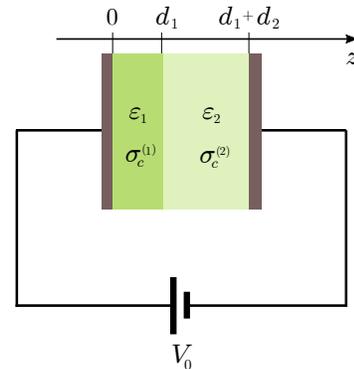
Respuesta (pág. 61)



I-10 Un conductor AB , de $50 [Km]$ de largo, tiene una falla y resulta necesario localizarla. Si el extremo A se conecta a una batería y su potencial se mantiene a $200 [V]$, mientras el otro extremo B se aísla, se encuentra que el potencial de B es $40 [V]$ una vez que se estabiliza. Similarmente, cuando A se aísla, el potencial al cual se debe aumentar B , para tener un potencial estable en A de $40 [V]$, es $300 [V]$. Determine la distancia a la que se encuentra la falla desde el punto A .

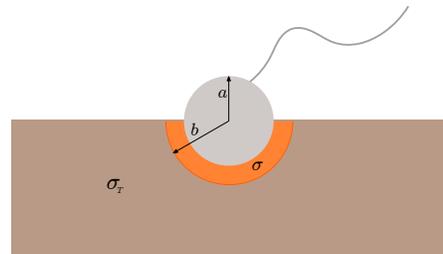
I-11 Considere un condensador de placas planas paralelas cuyo espacio interno se llena con dos bloques de materiales distintos cuyas permitividades y conductividades valen respectivamente $(\epsilon_1; \sigma_c^{(1)})$ y $(\epsilon_2; \sigma_c^{(2)})$ como se indica en la figura.

- Si entre las placas se establece una diferencia de potencial V_0 , calcule la densidad de cargas libres superficiales en la región interfacial en régimen permanente.
- Suponga ahora que, después de haberse establecido el régimen permanente, se desconecta la batería y cada placa se conecta a tierra. Determine la evolución temporal de la densidad de carga en la región interfacial.

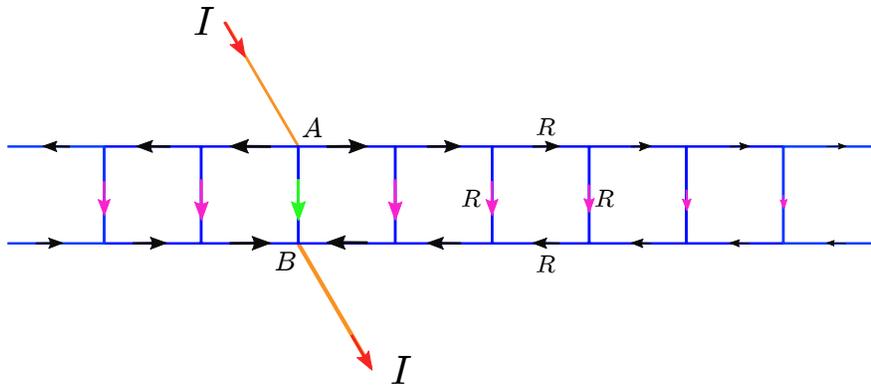


I-12 La figura muestra un cable conectado a la Tierra (de conductividad σ_T) a través de una esfera conductora de radio a que se encuentra semienterrada. La capa de tierra inmediatamente adyacente a la esfera, de espesor $(b - a)$, posee una conductividad σ .

Encuentre la resistencia entre el final del cable y un punto ubicado en las profundidades de la Tierra.



- I-13 Dos largos cables conductores rectos, paralelos, están cruzados por conductores del mismo material a distancias iguales, formando un escalera infinita de cuadrados en que cada lado tiene una resistencia R . Una corriente I entra y sale del circuito en los extremos A , B de uno de los conductores cruzado. ¿Cuál es la diferencia de potencial eléctrico entre los puntos A y B .



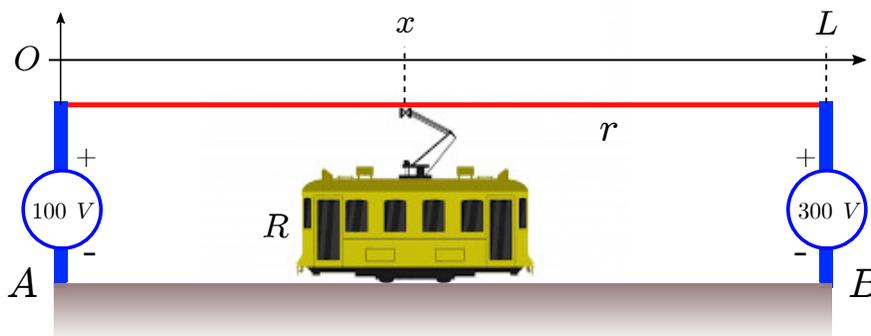
- I-14 En un cable submarino de resistencia por unidad de longitud $R_\ell [\Omega/m]$ se pierde una fracción de la corriente que por él circula debido a la conductividad del agua en la que está instalado. Suponga que el agua tiene una resistencia por unidad de longitud del cable $r_\ell [\Omega/m]$. Considerando que, con respecto a un punto de referencia, a una distancia x en el cable la corriente es $i(x)$ y el potencial es $V(x)$,

a) demostrar que

$$\frac{dV(x)}{dx} = -R i(x) \quad \text{y} \quad \frac{di(x)}{dx} = -\frac{V(x)}{r};$$

b) considerando que el cable es de longitud $L [m]$ y los extremos están a potenciales $V(x=0) = V_0$ y $V(x=L) = 0$, determine el potencial eléctrico en el cable como función de la posición x . Grafique su resultado.

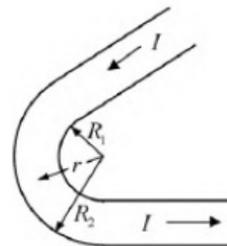
- I-15 El tranvía de la figura está alimentado, desde la estación A por una fuente continua de voltaje $V_A = 100 [V]$ y desde la estación B por una fuente $V_B = 300 [V]$, a través de una línea conductora cuya resistencia es $r [\Omega/m]$. Las estaciones están separadas $L [m]$. Si el tranvía representa una carga resistiva de $R [\omega]$, calcular a qué distancia de la estación A se produce el máximo consumo de potencia en el tranvía. Discutir su resultado.



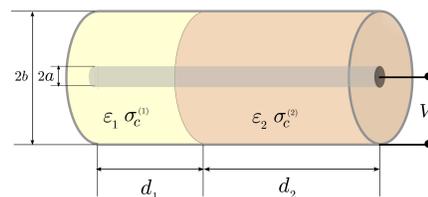
I-16 Preguntas conceptuales sobre cables curvados.

a) Por un cable de conductividad σ_c pasa una corriente estacionaria I . Demuestre que la carga total acumulada en la superficie del cable en el entorno inmediato a una curvatura en 90° del mismo es $Q \approx \epsilon_0 \frac{I}{\sigma_c}$. Haga un dibujo del cable indicando las posiciones aproximadas y signos de las cargas superficiales. Explique los orígenes físicos de los signos de éstas.

b) Una diferencia de potencial V genera una corriente I a través de un cable óhmico de conductividad σ_c y sección transversal circular. Una porción del cable posee la forma de un arco circular de radio interno R_1 y radio externo R_2 , como se muestra en figura. Encuentre la dependencia de la densidad de corriente J y el radio local r definido en el diagrama.



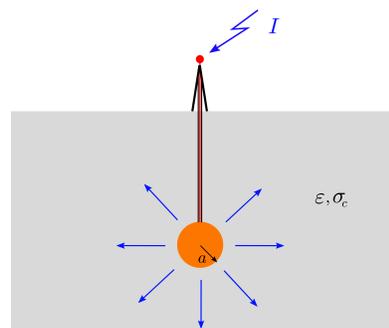
I-17 (C2-2021O) Un cable coaxial está formado por 2 cilindros metálicos (conductores perfectos), de radios a y $b > a$ y longitud $L = d_1 + d_2 \gg b$. Por fallas en su construcción, el espacio entre ambos cilindros resulta lleno con dos medios no ideales, de permitividad ϵ_1 y ϵ_2 y conductividad $\sigma_c^{(1)}$ y $\sigma_c^{(2)}$ (ó g_1 y g_2) respectivamente. El medio 1 ($\epsilon_1, \sigma_c^{(1)}$) lo llena hasta una distancia d_1 y el medio 2 ($\epsilon_2, \sigma_c^{(2)}$) completa el cable. Cuando se conecta una batería externa, que provee una diferencia de potencial V_0 constante entre los cilindros conductores,



- Calcule el campo eléctrico y la densidad de corriente en el espacio interior ($a \leq r \leq b$) del cable.
- Calcule la resistencia y la capacidad que presenta el cable. Comente sus resultados.
- Determine la energía que disipa (o pierde) el cable.

I-18 Un pararrayos está formado por una esfera de Cu de radio a , enterrada a una gran profundidad en la tierra y conectada a través de un conductor aislado a un elemento (en forma de punta) que sobresale de la superficie terrestre (figura).

En un día de tormenta se produce una descarga eléctrica a través del pararrayos, que lleva un corriente I [C/s] durante un tiempo T . Considerando que la conductividad de la esfera de Cu es muy alta y que la tierra tiene una conductividad σ_c constante, además de su permitividad ϵ , entonces las cargas se redistribuirán instantáneamente sobre la superficie de la esfera y de allí pasarán a la tierra donde se distribuyen con simetría esférica.



- Durante el tiempo que dura la descarga,
- Calcular la diferencia de potencial que existe entre la esfera de Cu y un punto situado a una distancia r del centro de la esfera.
 - Graficar $V(r)$ en función de r . Calcular $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r)$.
 - Calcular la resistencia entre la esfera de Cu y una esfera concéntrica de radio R , tal que $R \gg a$. ¿Qué ocurre cuando $a \rightarrow 0$?
 - A partir del momento en que cesa la descarga, grafique $V(r)$ en función del tiempo.

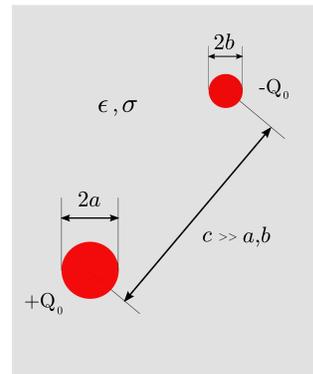
I-19 (C2-2017P) Un condensador consiste en dos esferas metálicas de radios a y b , sumergidas en un líquido de conductividad σ_c muy pequeña y constante dieléctrica ϵ . La conductividad de ambas esferas es mucho mayor que σ y la distancia c entre sus centros es muy grande en comparación a los radios a o b ($c \gg a, b$).

- Calcule la capacidad del condensador.
- Demuestre que la resistencia del condensador es

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

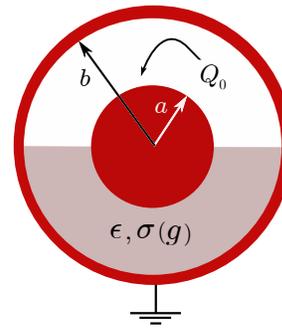
- Si el condensador se carga inicialmente con $\pm Q_0$, ¿cuál es su energía en el tiempo?

Respuesta (pág. 61)



I-20 (C2-2016P) Se tienen dos cascarones esféricos conductores (ideales) de radios a y b . El conductor interior se carga con Q_0 [C] mientras que el exterior se mantiene conectado a tierra. Considerando que la mitad del espacio entre ambos conductores está lleno con un material de constante dieléctrica ϵ y conductividad σ (también llamada g), determine:

- la evolución, en el tiempo, de la carga en la esfera interior;
- la energía total disipada por el medio material.

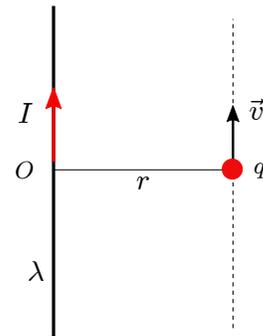


Capítulo 4

Magnetostática

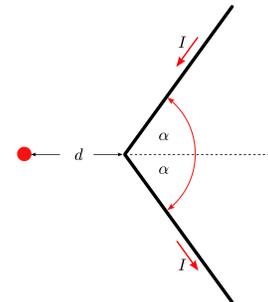
M-1 (Examen-2018P) Una partícula con carga q viaja con velocidad \vec{v} paralela a un alambre que tiene una distribución uniforme de carga por unidad de longitud λ . Por el alambre también circula una corriente I , como se muestra en la figura.

Determine cuál debe ser la velocidad de la partícula para que viaje en línea recta, paralela al alambre y a una distancia r de éste.



M-2 (C2-2017P) Biot y Savart, en 1819, derivaron su epónimo fórmula manipulando una corriente que pasaba por un cable muy largo, doblado como se indica en figura. Seguro que Ud. puede verificarla !!

Calcule el campo magnético \vec{B} en el plano del cable, a una distancia d de la curva sobre su eje de simetría.

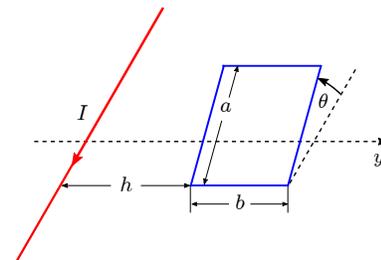


Por si le sirve !!

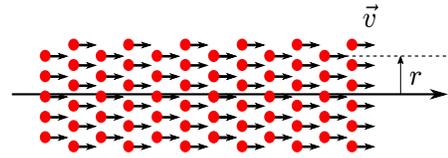
$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Respuesta (pág. 61)

M-3 Un alambre conductor muy largo, que lleva corriente I , coincide con el eje x de un cierto sistema de coordenadas. Calcule el torque que el alambre ejerce sobre una espira conductora rectangular, de lados a y b , cuyo plano forma un ángulo θ con el plano xy e interseca al eje y en $y = h$ e $y = h + b$ (figura).

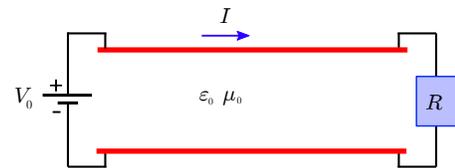


M-4 (C3-2016P) Se tiene un haz de partículas cargadas, uniformemente distribuidas alrededor de su eje de simetría, que se mueven con velocidad \vec{v} . Suponiendo que el haz mantiene su geometría cilíndrica, compare la fuerza eléctrica y la fuerza magnética (indique sus direcciones y calcule la razón entre sus magnitudes) que experimenta cada partícula. Le merece algún comentario su resultado?



Indicación: Es libre de darse cualquier dato que considere relevante para encontrar su respuesta.

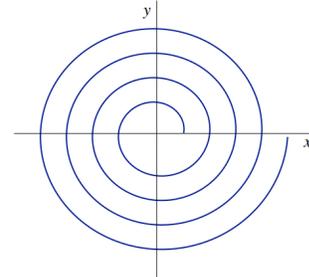
M-5 (Examen-2021O) Dos cables conductores alimentan un consumo eléctrico R cualquiera. Tienen una capacidad por unidad de largo C_ℓ [Farad/m] entre ellos y cuando se les aplica una diferencia de potencial V_0 , circula una corriente I por ellos.



Suponiendo que el largo de los cables es mucho mayor que la separación entre ellos, determine la razón entre la diferencia de potencial V_0 y la corriente I en los conductores cuando la atracción electrostática entre los cables compensa su repulsión magnética.

Respuesta (pág. 61)

M-6 Considere un alambre que ha sido doblado de la forma que se indica la figura, siguiendo la curva $r(\theta) = \frac{\theta}{2\pi} + 1$ en coordenadas cilíndricas dando n vuelta alrededor del origen. Si por el alambre se hace circular una corriente I en sentido anti-horario, determine el valor del campo magnético en el origen.



M-7 a) Demuestre que la magnitud de campo magnético \vec{B} en el centro de una espira cuadrada, de lado ℓ [m] y por la que circula una corriente I [A], es

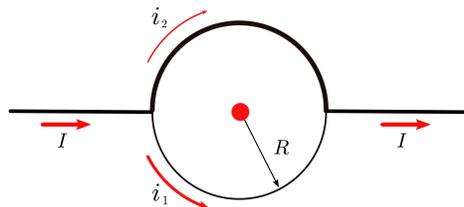
$$\|\vec{B}\| = \mu_0 \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) \left(\frac{I}{\ell} \right)$$

b) Generalice el problema para un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio a y demuestre que en, su centro,

$$\|\vec{B}\| = \mu_0 \left(\frac{n}{2\pi} \right) \tan \frac{\pi}{n} \left(\frac{I}{a} \right)$$

c) Pruebe que la expresión previa se aproxima a la magnitud del campo magnético en el centro del círculo cuando $n \rightarrow \infty$.

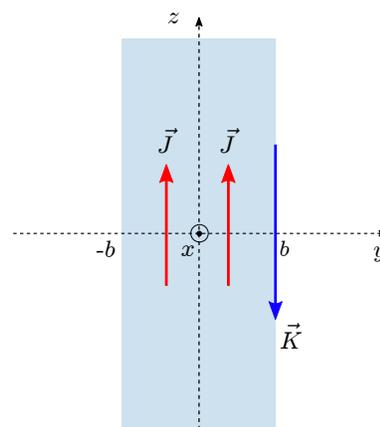
M-8 Un anillo conductor de radio R se conecta a dos cables como se indica en la figura. Los cables son rectos, semi-infinitos y cada uno lleva una corriente I . El anillo está hecho de 2 conductores semicirculares de resistencias $R_1 = 1 [\Omega]$ y $R_2 = 3 R_1$ respectivamente. Determine el campo magnético \vec{B} en el centro del anillo.



M-9 Se enrolla un cable conductor en hélice de ángulo α en la superficie de un cilindro aislante de radio a , de modo que efectúa n vueltas completas en el cilindro. Si se hace circular una corriente I por el cable, pruebe que la magnitud del campo magnético resultante en el centro del cilindro es

$$\|\vec{B}\| = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{n}{\sqrt{1 + [n \pi \tan \alpha]^2}} \right) \left(\frac{I}{a} \right)$$

M-10 (C3-2021O) Un bloque, de extensión infinita en el plano xz , tiene espesor $2b$ en la dirección y , estando dispuesto de forma que una cara coincide con el plano $y = +b$ y la otra con el plano $y = -b$. Una densidad de corriente volumétrica $\vec{J} = J_0 \hat{z}$ existe al interior del bloque (J_0 es constante). Adicionalmente, hay una corriente superficial $\vec{J}_s \equiv \vec{K} = -2b J_0 \hat{z}$, en el plano $y = +b$.

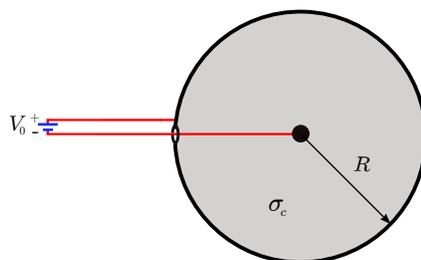


- Encuentre el campo magnético en todo el espacio (dentro y fuera del bloque).
- Verifique explícitamente que dentro del bloque se cumple:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Respuesta (pág. 61)

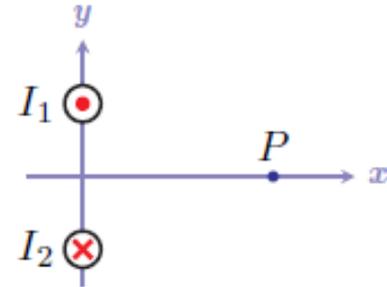
M-11 (C2-2020P) El espacio entre dos superficies conductoras perfectamente esféricas (radios R y $r \ll R$) se llena con material de conductividad $\sigma_c (\equiv g)$. Mediante alambres conductores ideales (recubiertos con un material aislante perfecto y colocados muy cercanos) es posible conectar las superficies a una batería externa que provee una diferencia de potencial V_0 constante entre ellas. Interesa conocer,



- La corriente que circula por los alambres.
- El campo magnético en todo el espacio.

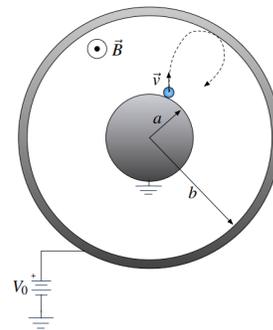
Importante: Suponga radial la distribución de la densidad de corriente entre las esferas (no es afectada por los alambres que van a la batería).

M-12 (Examen-2020P) Dos conductores rectos muy largos, se extienden paralelos al eje z y llevan corrientes $I_1 = 3,2$ A hacia fuera de la página e $I_2 = 3,2$ A entrando a la página, respectivamente. La distancia entre conductores es $26,6$ cm y el punto P está en $x = +35$ cm.



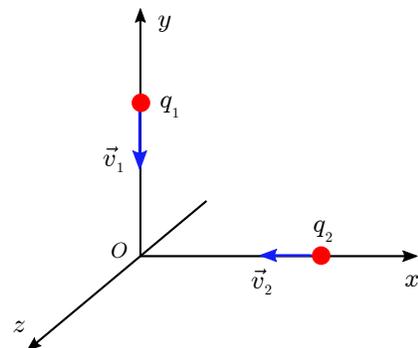
- Encontrar las tres componentes del campo magnético en el punto P sobre el eje x .
- Si un electrón viaja en la dirección $+z$ a 5200 m/s, ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza magnética que se ejerce sobre él cuando pasa por P ?
- ¿Qué campo eléctrico (establecer sus componentes) sería necesario aplicar al electrón de parte (b) para que la fuerza neta sobre él se anule?

M-13 Considere dos cables coaxiales de radio a y b como muestra la figura, cuyo espacio interior se encuentra vacío. Los cables se encuentran separados a una diferencia de potencial V_0 y entre ellos existe un campo magnético homogéneo $\vec{B} = B\hat{z}$. Desde el cilindro interior se libera un electrón de carga $-e$ y masa m . El objetivo del problema es encontrar el valor máximo de \vec{B} de modo que el electrón liberado no choque con el cilindro exterior (alcance a dar la vuelta perfectamente). Asuma que la velocidad del electrón tiene solamente componentes en el plano de la figura.



- Encuentre el momentum angular del electrón en función de carga e , el campo magnético B , y la distancia al eje del cilindro interior r y momentum angular inicial L_0 .
- Asumiendo que los electrones salen con una velocidad inicial $v_0 \approx 0$, encuentre la velocidad que tendrá en $r = b$.
- Mediante conservación de energía, encuentre otra expresión para la velocidad recién calculada. Entonces, encuentre el valor que debería tener B , para que a los más el electrón volviese en $r = b$.

M-14 (Examen-2020P) Considere dos partículas, de masas y cargas $\{m_1, q_1\}$ y $\{m_2, q_2\}$ respectivamente, que viajan sobre rieles que las restringe a tener un movimiento uniforme con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 constantes, como se indica en figura.

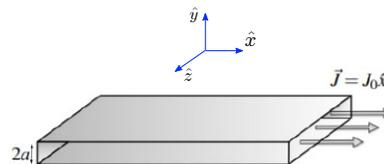


- Calcule la fuerza electromagnética neta (o total) que se ejerce sobre cada partícula y verifique explícitamente si se satisface el *principio de acción y reacción* de Newton.
- En un sistema aislado de 2 partículas que interactúan se espera conservación del momentum mecánico total $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, con \vec{p}_i el momentum de la partícula i . ¿Existe contradicción con el resultado obtenido en (a)? ¿Hay algo nuevo que se aprende de este análisis?

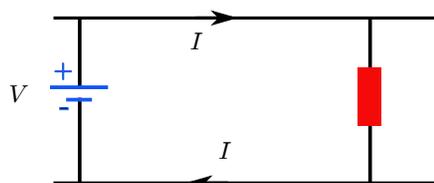
(Nota: $\vec{J}dV = \vec{v}dq$, donde \vec{J} es la densidad de corriente, dV es el elemento de volumen y dq el elemento de carga.)

- M-15 Se tienen dos cargas idénticas q que están a una distancia fija d unidas por una barra aislante sin masa ni carga. Por la unión entre las cargas, ambas se desplazan con velocidad \vec{v} . Estudiar:
- La relación entre las fuerzas eléctrica y magnética entre las cargas.
 - Ahora nos ubicamos en un sistema de referencia cuyo origen está en el punto medio de la barra que une las cargas. Determinar las fuerzas electromagnéticas en ese sistema de referencia, comente al respecto.

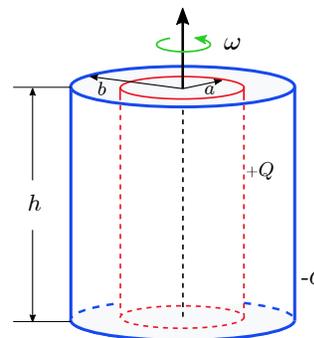
- M-16 Considere una lámina infinitamente larga, de espesor $2a$, que yace sobre el plano $\{x, z\}$ en la cual fluye una densidad de corriente $\vec{J} = J_0 \hat{x}$. Determine el campo magnético en todo el espacio.



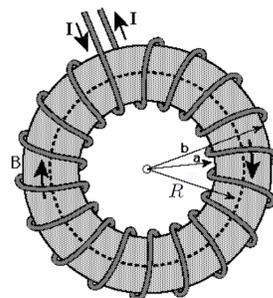
- M-17 (Examen-2021O) Una línea de alta tensión, formada por dos cables paralelos, tiene una capacidad C_ℓ por unidad de largo. Un extremo de la línea se alimenta con una diferencia de potencial V , producto de lo cual circula una corriente I por el sistema. Determine la razón entre la corriente I y la diferencia de potencial V de modo que la atracción electrostática compense la repulsión magnética entre los cables.



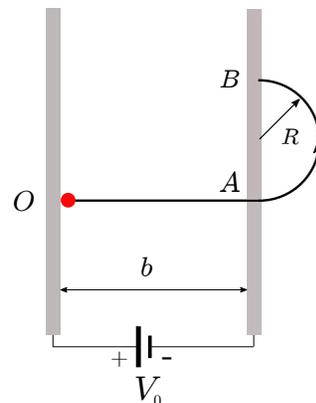
- M-18 Los cascarones cilíndricos concéntricos de un condensador cilíndrico tienen radios a y $b > a$ y altura $h \gg a, b$. La carga en el cascarón interior es Q y $-Q$ en el exterior, como se muestra en la figura. Considere que el condensador completo rota entorno a su eje de simetría con velocidad angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Desprecie los efectos de borde.
- Encuentre el campo magnético \vec{B} en todo el espacio.
 - Evalúe la fuerza magnética que sienten las cargas en las superficies conductoras del condensador y compárela con la fuerza electrostática.



- M-19 (E8-2016P) Considere una bobina toroidal, de radio interior a y exterior b , sección circular, con N vueltas de conductor y por la que circula una corriente I . Suponiendo que el enrollado es suficientemente compacto (N grande) y el radio medio de la bobina $R = \frac{1}{2}(a + b)$ es mucho mayor que el diámetro $(b - a)$ de su sección circular. Calcular y graficar el campo magnético \vec{B} y el potencial magnético vector \vec{A} en todo el espacio.



M-20 (C3-2018P) Dos láminas conductoras, planas y paralelas, separadas una distancia b , se extienden infinitamente. Entre ambas láminas se aplica una diferencia de potencial V_0 . Si una partícula de carga q y masa m parte del reposo en una lámina, describe la trayectoria indicada en la figura, pasando a través de un orificio pequeño en la otra lámina. Determine la densidad de corriente superficial que deben circular en cada lámina, en magnitud y sentido.



Trayectoria: OA : recta perpendicular a las láminas;
 AB : semicircunferencia de radio R .

M-21 Un cilindro con polarización constante, de radio r y altura h , gira con velocidad angular ω_0 en torno a su eje de simetría. Calcular el campo magnético en el centro del cilindro en el caso que:

- La polarización sea paralela al eje \hat{z} , o sea $\vec{P} = P\hat{z}$.
- La polarización sea radial, o sea $\vec{P} = P\hat{r}$.

M-22 a) ¿Qué densidad de corriente puede producir un potencial vector de la forma $\vec{A} = k\hat{\phi}$ (donde k es una constante) en coordenadas cilíndricas?

b) Si un campo magnético es uniforme, muestre que un potencial magnético vector de la forma $\vec{A}(r) = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$ es válido. ¿Es este resultado único?

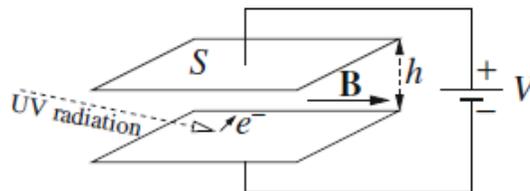
c) Encontrar el potencial vector en todo el espacio en presencia de una carga superficial $\vec{K} = K\hat{x}$ que vive en el plano $x - y$.

M-23 Una partícula con carga q y masa m está inicialmente en reposo en presencia de un campo eléctrico \vec{E} y uno magnético \vec{B} , ambos perpendiculares entre sí.

a) Describa el movimiento de la partícula debido a los campos.

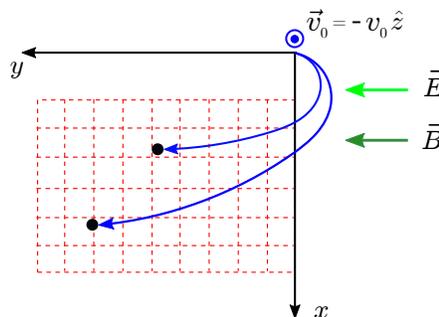
b) Usar el resultado de la parte anterior para la siguiente situación: Se tiene un condensador de placas paralelas con superficie S , una separación entre las placas h y hay una diferencia de potencial V entre ellas.

Un campo magnético \vec{B} se aplica al condensador, de forma perpendicular al campo eléctrico del condensador (o sea, paralelo a las placas). La radiación ultravioleta causa que la placa con carga negativa emita electrones con velocidad inicial cero. Evaluar el valor del campo magnético tal que los electrones no puedan llegar a la placa positiva.



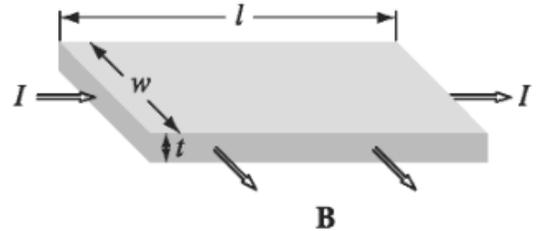
M-24 El espectrómetro de masas es un instrumento que separa iones según sus velocidades y sus razones entre carga y masa. Calcule la posición en que se recoge (plano xy) un ion de carga Q , masa M y velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\hat{z}$. Indique como sus resultados permiten identificar iones de diferente razón (Q/M) y de diferentes velocidades.

El dispositivo tiene campos eléctricos y magnéticos uniformes, $\vec{E} = E\hat{y}$ y $\vec{B} = B\hat{y}$, para $x > 0$ y $z < 0$.



- M-25 a) Se tiene un disco de radio R , que posee una densidad de carga σ y gira con una velocidad angular constante ω . Encontrar su momento dipolar magnético.
 b) Encontrar el momento dipolar para un cascarón esférico cargado (de densidad de carga σ), que gira con una velocidad angular ω en torno a un eje vertical.

M-26 Una corriente I fluye hacia la derecha a través de una barra rectangular hecha de un material conductor, en presencia de un campo magnético \vec{B} que apunta en dirección perpendicular a la corriente (paralela al lado intermedio del rectángulo).



a) Si las cargas que se mueven son positivas, ¿En qué dirección son desviadas por el campo magnético?

Esta desviación de las cargas genera una acumulación de carga en las superficies superiores e inferiores de la barra, lo cual genera una fuerza eléctrica que se contrarresta con con la magnética. El equilibrio ocurre cuando las dos fuerzas se cancelan.

b) Encontrar la diferencia de potencial entre la superficie superior e inferior de la barra en términos de B , v (velocidad de las cargas) y las dimensiones de la barra.

c) ¿Cómo cambiaría su análisis si las cargas en movimiento fueran negativas?

M-27 Dos dipolos magnéticos \vec{m}_1 y \vec{m}_2 se encuentran en las posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 respectivamente. a) Calcule el campo \vec{B} producido por \vec{m}_1 en el lugar donde se encuentra \vec{m}_2 .

b) Calcule la energía de interacción.

c) Finalmente calcule el torque entre los dipolos.

M-28 a) Una esfera de radio R , que está a un potencial V , se sumerge en un medio conductor de conductividad σ_c . Calcule la corriente que fluye de la esfera hasta el infinito.

b) Dos esferas, con potenciales $V_1 = V$ y $V_2 = 0$, tienen sus centros en las posiciones $x = \pm d$, donde $d \gg R$. Para puntos equidistantes de las dos esferas (el plano $\{y, z\}$) y muy lejos ($\gg d$), calcule la densidad de corriente \vec{J} .

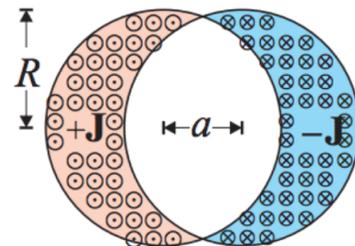
c) Para el sistema de la parte anterior, calcule el campo magnético en el plano $\{y, z\}$ para puntos lejanos.

M-29 Una esfera de radio a [m], cargada con una densidad superficial uniforme σ [C/m²], gira alrededor de un eje que pasa por el centro con una velocidad angular constante $\vec{\omega}$ [rad/s].

a) Calcular el campo magnético en el centro de la esfera.

b) Demuestre, por medio de la relación $\nabla \times \vec{B} = 0$ dentro de la esfera, que el valor calculado de \vec{B} corresponde a su valor en cualquier punto del volumen esférico.

M-30 Se tienen dos cilindros infinitamente largos y paralelos, cada uno de radio R . Por los cilindros circulan densidades de corriente unifomes $+J\hat{z}$ y $-J\hat{z}$, respectivamente. Los ejes de los cilindros distan una distancia $a < 2R$.



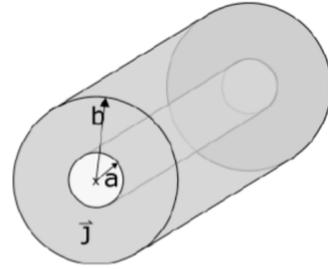
a) Demuestre que el campo magnético en la zona de intersección es constante. Determine el valor.

b) Calcule el campo magnético para puntos alejados de los dos cilindros.

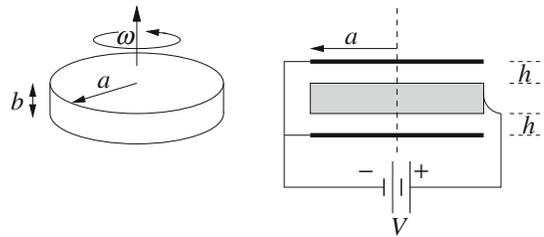
M-31 Considere un conductor cilíndrico infinito de radio interior a y radio exterior b . El conductor lleva una densidad de corriente no uniforme dada por,

$$\vec{J} = \frac{\alpha}{r} \hat{\theta} + \beta \hat{z},$$

donde α y β son constante y r es la distancia de un punto interior del conductor al eje de éste. Determine el campo magnético en todo el espacio.



M-32 El experimento de Henry A. Rowland (1876) tenía como objetivo mostrar que las cargas que se mueven generan campos magnéticos. Un disco metálico de radio $a = 10$ cm y espesor $b \ll a$ está eléctricamente cargado y mantenido en rotación con una velocidad angular constante $\omega = 2\pi \times 10^2$ rad/s. El disco gira entre dos placas conductoras, la primera a una distancia $h = 0,5$ cm por encima del disco, y la otra a la misma distancia h por debajo. Las dos placas están conectadas a un mismo terminal de una fuente de potencial que las mantiene a una diferencia de potencial fija $V_0 = 10^4$ V, con respecto al disco (mediante un contacto deslizante; véase figura). Calcular:



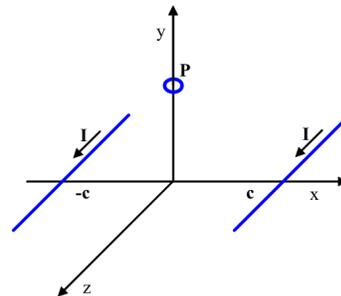
- la densidad de carga superficial en las superficies del disco;
- el campo magnético \vec{B}_c cerca del centro del disco y la componente del campo magnético B_r paralela a la superficie del disco en un punto muy cercano a ésta, en función de la distancia r desde el eje del disco;

La componente B_r medida a una distancia $r = a$ puede ser medida orientando el dispositivo tal que la dirección radial r es perpendicular con el campo magnético terrestre $B_* = 5 \times 10^{-5}$ T, y midiendo la desviación de una aguja magnética cuando el disco gira. Encontrar

- la desviación, en ángulo, de la aguja.

Respuesta (pág. 61)

M-33 Dos alambres lineales indefinidos, paralelos al eje z , interceptan el eje x en los puntos de coordenadas $(\pm c, 0, 0)$, siendo $c = 0,1$ m. En los cables circula una corriente $I = 100$ A en la dirección del eje z . En punto $P = (0, a, 0)$, donde $a = 20$ cm, se coloca una pequeña espira circular, de radio $r = 1$ mm, en la cual circula una corriente $I_s = 2,0$ A. El plano de la bobina es paralelo al plano $x - z$ y la corriente I_s , observando la bobina desde arriba, circula en sentido anti-horario.



Calcular:

- las componentes del campo magnético generado por los dos alambres en el punto P ;
- el momento de la fuerza necesario para mantener la espira inmóvil;
- el trabajo realizado por las fuerzas externas al dar una vuelta de 180° a la espira;
- la fuerza total sobre la espira cuando se encuentra en la posición del punto a).

M-34 Una cavidad cilíndrica hueca no conductora, de largo $2L$ y radio R , tiene enrollados en sus extremos y en la zona central bobinas que son alimentadas con corriente continua, de forma tal que en el interior del cilindro se establece un campo magnético estático dirigido en la dirección axial (ver figura). La componente axial del campo presenta una leve variación con la posición de la forma

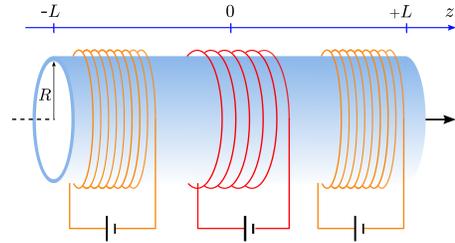
$$B_z(z) = B_0 e^{\frac{|z|}{10L}}.$$

Si en $t = 0$ se suelta una partícula de carga q y masa m con velocidad inicial

$$\vec{v}(0) = v_{z0} \hat{z} + v_{\phi0} \hat{\phi}$$

justo en la posición $z = 0$, $\rho = a$ con $a \ll R$,

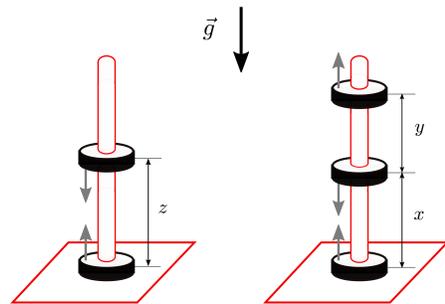
- muestre que, en primera aproximación, el flujo magnético enlazado por cada vuelta de la trayectoria helicoidal que describe q es constante;
- determine la relación entre v_{z0} y $v_{\phi0}$ para que la carga rebote en los extremos $z = \pm L$ de la cavidad y en consecuencia quede confinada a ella.



M-35 (C3-2017P) Un juguete relativamente famoso consiste en pequeños imanes con forma de anillo, que pueden deslizarse sin fricción en una barra vertical. Las escalas del sistema permiten considerar los imanes como dipolos de masa m_d y momento dipolar \vec{m} .

- Si se colocan dos imanes 'de espaldas' en la barra, calcule la altura a la que levitará el imán superior.
- Si ahora se agrega un tercer imán (cuyo momento dipolar coincide con el imán de la base), ¿cuál es la razón entre las distancias que separan imanes consecutivos?

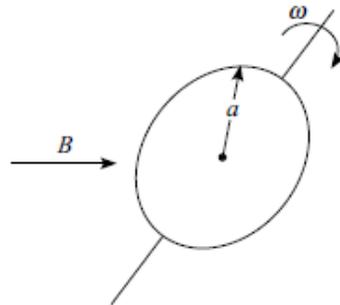
Respuesta (pág. 61)



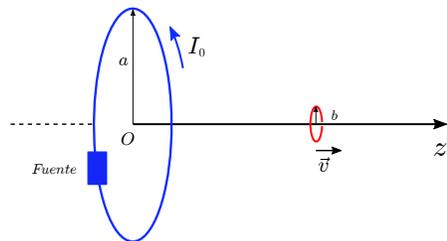
Capítulo 5

Inducción electromagnética

F-1 (C2-2020P) Una espira circular rota alrededor de uno de sus diámetros con rapidez angular ω constante en presencia de un campo magnético B perpendicular al eje de rotación. Si la espira tiene una resistencia R y una inductancia propia L , determine la corriente que circula por la bobina en régimen permanente (más allá de un transiente que existe al iniciarse la rotación de la espira en el campo magnético). Comente los casos $\omega \sim 0$ y $\omega \rightarrow \infty$. Grafique (cualitativamente) la corriente y la fem en la espira como función del tiempo. Comente.



F-2 (C2-2020P) Por la espira plana de radio a , de resistencia R_0 e inductancia propia despreciable, fija en el espacio, circula una corriente continua I_0 gracias a una fuente de energía externa. La espira pequeña de radio b ($b \ll a$), de resistencia R e inductancia propia despreciable, es coaxial con la anterior y se mueve a lo largo del eje común Oz con velocidad constante v .



a) Calcular la fem inducida en la espira pequeña cuando ésta se encuentra en cualquier punto sobre el eje.

b) Determine la carga neta total que circuló por esta espira en su desplazamiento desde $z = 0 \rightarrow \infty$.

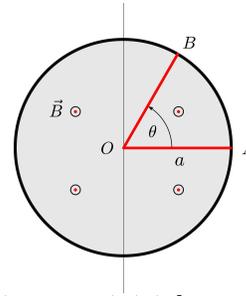
c) ¿La entrega de energía por unidad de tiempo de la fuente a la espira es constante o varía mientras la espira pequeña se mueve? Respalde su afirmación con argumentos y el cálculo respectivo.

F-3 (Examen-2017P) Se tiene un riel dieléctrico perfectamente pulido, circular, de radio a . Este riel está en presencia de un campo magnético \vec{B} normal a su plano. Sobre él gira un punto material de masa m y carga q .

a) Determinar, en función del tiempo, la velocidad angular de la partícula si para $t = 0$ se tiene $\|\vec{\omega}(0)\| = \omega_0$ y la magnitud del campo magnético es $\|\vec{B}(t)\| = B_0 e^{-\alpha t}$.

b) En el instante $t = t_1$, el riel dieléctrico se vuelve conductor. Explique qué ocurre.

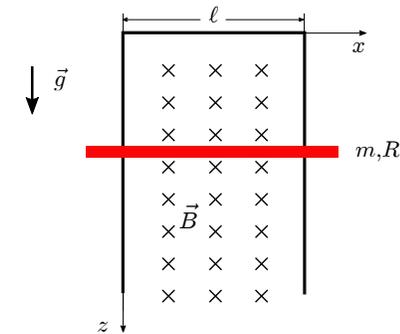
F-4 (C3-2017P) Se tiene un anillo plano muy buen conductor (resistencia despreciable) de radio a en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, donde \hat{k} es la dirección perpendicular al plano del anillo. Este tiene, además, dos varas radiales conductoras, de resistencia R respectivamente, una fija \overline{OA} y otra \overline{OB} , con momento de inercia respecto a su centro de giro $J = \frac{1}{3} m a^2$, susceptible de rotar en torno al punto O .



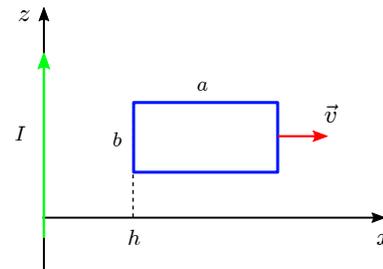
Para efectos autoinductivos despreciables y considerando que en cierto instante inicial $t = 0$ el ángulo entre las barras es $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ y la barra \overline{OB} empieza a rotar con velocidad angular $\dot{\theta}(0) = \omega_0$,

- encuentre la variación temporal del ángulo, $\theta(t)$;
 - las corrientes que circulan por las barras y el anillo;
 - ¿cambian sus resultados si el anillo tiene una resistencia R_a ?
- Respuesta (pág. 62)

F-5 (C3-2018P) Una varilla conductora de resistencia R se puede deslizar por una horquilla de resistencia despreciable, fija en el espacio, como se indica en la figura. El plano de la horquilla es vertical y lo atraviesa un campo magnético perpendicular \vec{B} , uniforme y constante. Existe contacto eléctrico entre la varilla y la horquilla de modo que constituyen un circuito eléctrico cerrado. Si la varilla tiene una masa m , calcule la velocidad con que ella cae (debido al campo gravitatorio) si parte del reposo. Desprecie el efecto del roce y los efectos autoinductivos.

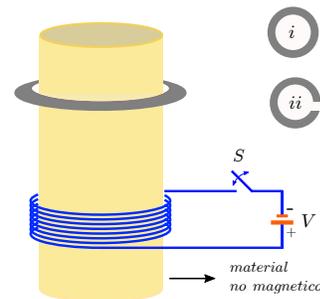


F-6 Si una espira rectangular de lados a y b se aleja con velocidad constante \vec{v} de un alambre infinito por el que circula una corriente I , como se muestra en la figura, determine la fuerza electromotriz inducida en la espira como función del tiempo. Suponga que en inicialmente la distancia del lado más cercano de la espira al alambre es $x = h$.

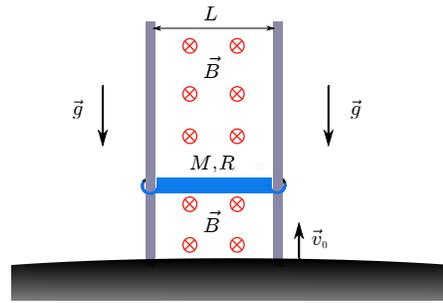


F-7 La bobina señalada en la figura, enrollada apretadamente, se coloca con su eje vertical para llevar a cabo los dos experimentos que se indican:

- estando el interruptor S abierto, se coloca arriba de la bobina un anillo delgado de aluminio (anillo i). Luego, se cierra el interruptor S ;
 - se repite (a) usando un anillo semejante al anterior pero con un corte pequeño (anillo ii).
- Describa qué ocurre en cada uno de los experimentos. Explique con claridad y justifique.



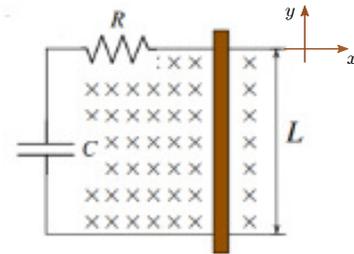
F-8 (E9-2016P) Un par de barras conductoras (ideales) se clavan en la tierra (supuesta también un conductor ideal), paralela una de otra, a una distancia L . Entre las barras se puede desplazar un conductor de resistencia R y masa M , siempre perpendicular y en contacto con las barras verticales. Considerando gravedad \vec{g} y la presencia del campo magnético terrestre \vec{B} , en las direcciones indicadas en la figura, junto con despreciar los efectos autoinductivos, calcule:



a) cuando la barra conductora se lanza con velocidad inicial \vec{v}_0 desde la tierra hacia arriba, cuál es su altura máxima y el tiempo que demora en alcanzarla? Compare al caso en que $\vec{B} = 0$.

b) cuando la barra conductora se deja caer desde la altura obtenida en (a), calcule o argumente la magnitud del tiempo de caída con respecto al tiempo de subida. ¿Con qué velocidad llega la barra a tierra?

F-9 Tenemos un circuito formado por un cable conductor sin roce con forma de U, en el cual se encuentra un condensador de capacidad C y una resistencia R , y una barra conductora de masa m que atraviesa los rieles de forma perpendicular. Esta barra se puede mover libremente en el eje \hat{x} sin inclinarse (todo el circuito está en el plano $(\{x, y\})$). Sobre el circuito actúa un campo uniforme en la dirección perpendicular al circuito, $\vec{B} = -B_0 \hat{z}$.

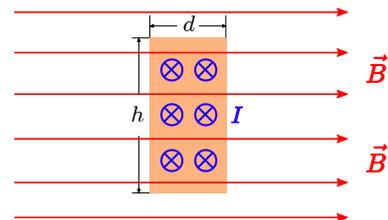


Si inicialmente el condensador se encuentra descargado y la rapidez inicial de la barra es v_0 , encuentre la posición de la barra y la carga almacenada en el condensador en función del tiempo. Hacer un análisis físico sobre qué ocurre en las situaciones límite (si algo no tiene sentido, explicar lo que es).

F-10 Investigar y explicar (de forma detallada y haciendo alusión a lo aprendido en curso de Electromagnetismo) los siguientes temas:

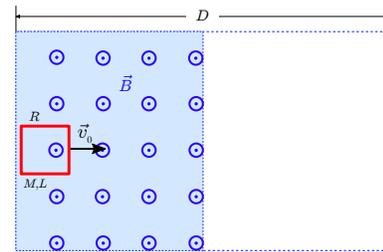
- ¿Cómo funcionan los dispositivos que se cargan de manera inalámbrica?
- ¿Qué ocurre en este [video](#)?

F-11 (Examen-2021O) Una corriente I constante, representada por las cruces en la figura, se hace pasar por un conductor de cobre de sección rectangular, altura h y ancho d . Si se aplica un campo magnético \vec{B} uniforme y perpendicular al conductor, calcule la diferencia de potencial que existe entre los lados del conductor. Especifique qué lados.



Suponga que ρ es el número de electrones de conducción por unidad de volumen en el conductor.

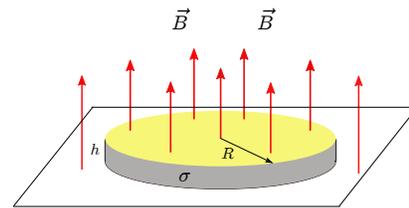
F-12 (C3-2021O) Una espira conductora cuadrada, de masa M , lado L y resistencia R puede deslizarse sin roce sobre un plano de largo $D \gg L$. Perpendicular al plano, existe un campo magnético \vec{B} uniforme que afecta la mitad de la superficie, como se indica en la figura.



La espira se lanza desde el extremo del plano donde el campo magnético está presente, con velocidad inicial \vec{v}_0 . Se quiere conocer que ocurre con ella a medida que se mueve hacia la zona del plano donde no hay campo magnético. Al respecto,

- Determine la fuerza electromotriz (fem) y la corriente que circula por la espira. Indique con claridad la polaridad de la fem y el sentido en que circula la corriente.
- Determine la fuerza que actúa sobre la espira (magnitud y dirección).
- Calcule, en función del tiempo, la corriente por la espira y la distancia que recorre desde el instante inicial en que abandona la zona con campo magnético.
- Grafique la rapidez de la espira en función del tiempo. Comente el efecto neto que tuvo en la rapidez de la espira el cambio desde la zona con campo magnético a la zona sin él.
- ¿Cuál fue la energía disipada en la espira durante su camino desde un extremo al otro del plano?
- ¿Cómo cambiarían sus resultados previos si se invierte la dirección del campo magnético?

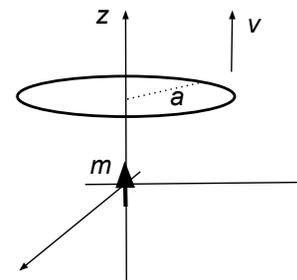
F-13 (C3-2016P) Un disco conductor plano y delgado, de espesor h , radio R y conductividad σ_c , se coloca en un campo magnético uniforme, $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \hat{k}$, paralelo al eje del disco.



a) Encuentre la densidad de corriente inducida como función de la distancia al eje del disco y la potencia disipada en todo el disco. ¿Cuál es la fuente de esta energía? En su cálculo, desprecie los efectos autoinductivos del disco.

b) Explique, cuantitativa o cualitativamente, como calcularía la inductancia propia L del disco. Use como inspiración el cálculo de la inductancia propia para una espira circular de radio conocido.
Respuesta (pág. 62)

F-14 Un dipolo magnético con momento $m = 25 \text{ A} \cdot \text{cm}^2$ se fija en el origen de un sistema de referencia cartesiano y orientado según el eje z . Una espira circular con radio $a = 10 \text{ cm}$ y resistencia $R = 10 \Omega$ se mueve a lo largo de z con velocidad constante $v = 1 \text{ m/s}$ y con eje coincidente con el dipolo. Despreciando la autoinducción, calcular:



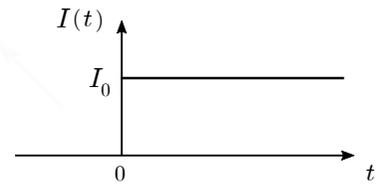
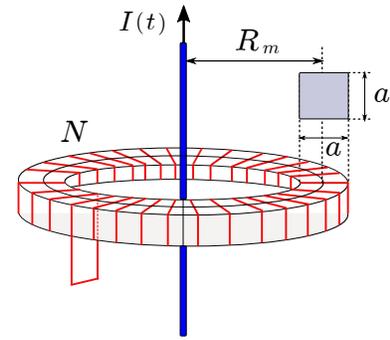
a) el flujo del campo magnético del dipolo a través de la espira en función de la posición z de la espira y calcularlo en la posición $z = z_0 = 200 \text{ cm}$;

b) la carga total que fluye en la espira en un intervalo de tiempo de $t_1 = 1,0 \text{ s}$ y $t_2 = 2,0 \text{ s}$;

c) la expresión analítica de la fuerza necesaria para mantener la espira en movimiento con velocidad constante v , comenzando desde el instante $t = 0$ en el que la espira está en $z = 0$. También calcular el valor de esta fuerza en el instante $t = t_0 = 0,1 \text{ s}$.

Respuesta (pág. 62)

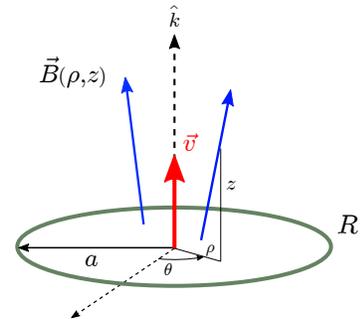
F-15 (C3-2016P) Considere una bobina toroidal de N vueltas, de sección cuadrada a^2 y un radio medio R_m ($R_m \gg a$), con una resistencia interna R y una inductancia propia L , que se encuentra cortocircuitada (los extremos del enrollado están unidos). Por el eje de la bobina se ubica un alambre recto, muy largo, por el que circula una corriente $I(t)$ como se indica en la figura. En cierto instante ($t = 0$) se hace circular una corriente I_0 por el alambre.



Se busca determinar y graficar la corriente $i(t)$ que circula por la bobina y la energía total que en ella se disipa en forma de calor. Para ello se sugiere:

- determinar el flujo magnético total enlazado por la bobina, suponiendo que el campo magnético es uniforme sobre la sección de la bobina;
- encontrar una ecuación diferencial ordinaria para la corriente eléctrica en la bobina (mejor, para la carga eléctrica que por ella circula).

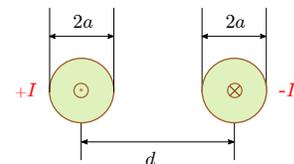
F-16 Un campo magnético tiene simetría rotacional en torno a una línea recta que elegimos como el eje \hat{k} de un sistema en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) . La componente z del campo en el eje \hat{k} es conocido e igual a $B_z(0, z) = B_0 z/L$, donde L es una constante. Una espira circular de radio a y resistencia R (cuyo eje coincide con el eje \hat{k} definido anteriormente) se traslada con velocidad constante $\vec{v} = v\hat{k}$, el radio de la espira se considera lo suficientemente pequeño como para que el campo magnético sea aproximadamente uniforme en la superficie limitada por el circuito.



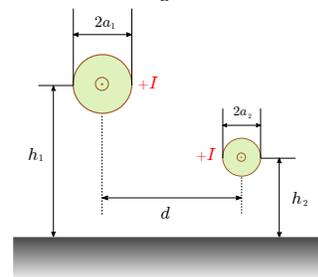
- Encontrar la corriente que fluye por el circuito.
- Encontrar la potencia disipada por la espira debido al efecto Joule. También encontrar la fuerza de fricción \vec{f} necesaria para que el sistema se mantenga con velocidad constante.

F-17 Una línea de transmisión monofásica consta de dos cables conductores de radio a , separados por distancia d .

- Calcule la inductancia propia y mutua del sistema por unidad de largo, en la aproximación $a \ll d$.



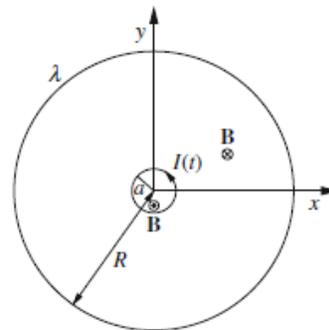
- Se reemplaza uno de los cable utilizando la Tierra como retorno. Suponiéndola un conductor perfecto, calcule la inductancia si el alambre está a una distancia h del suelo.



- Calcule la inductancia propia del sistema de la figura cuando se envía corriente por los dos cables y se efectúa el retorno por Tierra. Se envía la mitad de la corriente por cada cable.

F-18 Un anillo no conductor de radio R esta en reposo en el plano $x - y$, con su centro en el origen del sistema coordenado. El anillo tiene masa m , grosor despreciable y carga eléctrica Q distribuida uniformemente en el. El anillo es libre de rotar sin roce en torno a su eje.

Un anillo circular superconductor de radio $a \ll R$, cuyo eje coincide con el anillo cargado y que lleva una corriente I_0 , también se ubica en el plano $x - y$ como se muestra en la figura. En un tiempo $t = 0$ el aro superconductor es calentado por sobre su temperatura crítica, perdiendo su conductividad normal. Por consecuencia de esto, su corriente decae a cero de acuerdo a $I = I(t)$.



a) Ignorando los efectos auto-inductivos, evaluar la velocidad angular $\omega = \omega(t)$ del anillo cargado como función de la corriente $I(t)$ del anillo pequeño. Evaluar la velocidad angular final ω_f , y el momentum angular final L_f del anillo cargado.

b) Evaluar el campo magnético al centro del anillo, \vec{B}_c generado por la rotación del anillo.

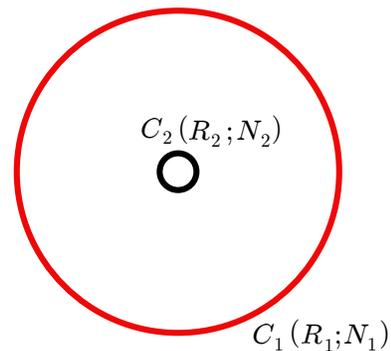
c) Discuta como cambiarían los resultados de (a) si tomáramos en consideración la inductancia propia \mathcal{L} del anillo cargado.

F-19 (Examen-2017P) C_1 y C_2 son dos circuitos circulares con N_1 y N_2 vueltas y radios R_1 y R_2 respectivamente. Ambos son coplanares y concéntricos, con $R_2 \ll R_1$.

a) Obtener una expresión aproximada para la inductancia mutua entre los circuitos.

b) Se reemplaza C_2 por un pequeño imán en forma de barra, colocado en el centro de C_1 y normal al plano de éste. Si el momento dipolar del imán es \vec{m} , determinar el flujo magnético proveniente del imán que es enlazado por C_1 .

c) Se retira el imán hasta un punto muy alejado de C_1 . Determinar la carga eléctrica que circuló por C_1 , de resistencia R e inductancia propia despreciable.



F-20 Una espira conductora de radio a , resistencia R e inductancia propia despreciable se encuentra fija en un plano horizontal. Sobre su eje se encuentra un imán, de momento magnético \vec{m} que apunta hacia la espira y desplazándose con una velocidad $\vec{v}(t)$. Las dimensiones del imán son muy pequeñas comparadas con las de la espira e inicialmente éste se encuentra muy lejos de ella. Evalúe la carga total neta que ha circulado por la espira entre los siguientes instantes:

a) desde el instante inicial hasta que el imán ha llegado al plano de la espira;

b) desde el instante inicial hasta que, habiendo atravesado la espira, se encuentra nuevamente muy lejos de ella pero al otro lado de ésta;

c) ¿cuál es el sentido medio de movimiento de las cargas (positivas) en cada caso?

F-21 (C3-2018P) Un sistema de N circuitos (o espiras) con coeficientes de inducción propia y mutua $M_{i,j}$ por los que circulan corrientes I_i ($i, j = 1, N$) almacena una energía magnética W_{mag} .

a) Demuestre que la fuerza magnética que se ejerce sobre uno de los circuitos (o espiras) puede calcularse, genéricamente, como

$$\vec{F}_{mag} = \nabla W_{mag} .$$

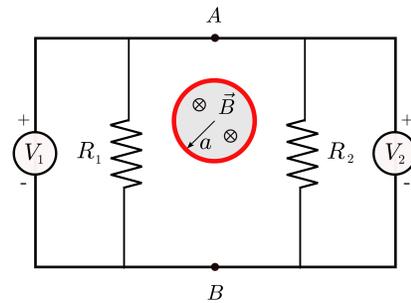
b) Considere dos conductores delgados, infinitamente largos y paralelos, separados una distancia D , por los que circulan corrientes I_1 e I_2 . Calcule la fuerza magnética por unidad de largo que un conductor ejerce sobre el otro, a partir de la energía magnética del sistema.

F-22 (C3-2017P) Una antigua pregunta de laboratorio es: *¿qué leen los voltímetros?* La figura adjunta muestra un circuito plano compuesto de cables, dos resistencias R_1 y R_2 y los voltímetros V_1 y V_2 . Se tiene, además, una fuente de energía que consta de un solenoide de radio a que produce un campo magnético confinado a su interior, de magnitud $B(t)$ creciente en el tiempo y en dirección normal al plano del circuito (ver figura).

Un voltímetro es un instrumento que indica el valor de la integral de línea de \vec{E} por un camino de integración que parte desde su terminal (+) y llega a su terminal (-). Entonces, qué voltajes muestran los voltímetros V_1 y V_2 y cuál es la diferencia de potencial entre los puntos A y B en los casos siguientes:

- los voltímetros en la condición de la figura;
- ambos voltímetros a un mismo lado del circuito;
- ¿le merecen algún comentario sus resultados? Existe la posibilidad que haya una falla en la teoría?

Respuesta (pág. 62)



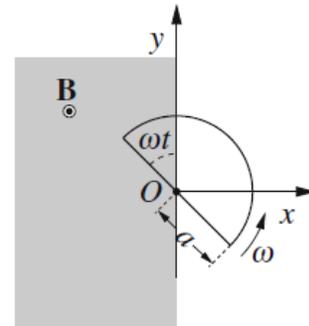
F-23 Tenemos un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ en el semiplano $x < 0$ de un sistema cartesiano, donde el campo es nulo para $x > 0$. Un circuito semicircular de radio a y resistencia R se ubica en el plano $x - y$, con el centro de la circunferencia completa posicionado en el origen O de nuestro sistema coordenado. El circuito gira en torno al eje z con velocidad angular ω .

En primer lugar, suponga que la inductancia propia del circuito es nula y evalúe:

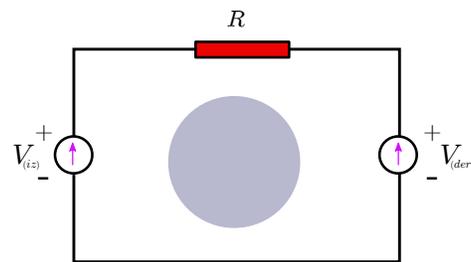
- La corriente que circula por el circuito.
- El torque que realiza la fuerza magnética y la potencia necesaria para mantener el circuito en rotación.

Compare con la potencia eléctrica disipada.

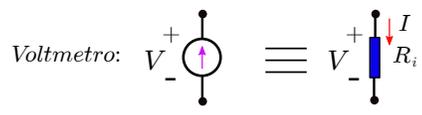
c) Ahora, considerando la inductancia propia del circuito, discuta cómo cambian sus respuestas de la parte (a).



F-24 (Examen-2020P) Dos vóltmetros, V_{iz} y V_{der} que tienen una misma resistencia interna R_i de $10^4 \Omega$, están conectados en serie con una resistencia R de $5 \times 10^3 \Omega$. Ellos se conectan como se indica en la figura a través de alambres de resistencia despreciable. La marca '+' de ambos vóltmetros está arriba, como se indica. Un campo magnético variable en el tiempo está presente en la zona gris de la figura. En un instante de tiempo, en el vóltmetro de la izquierda V_{iz} se lee $+0,1$ Volt. En el mismo instante,



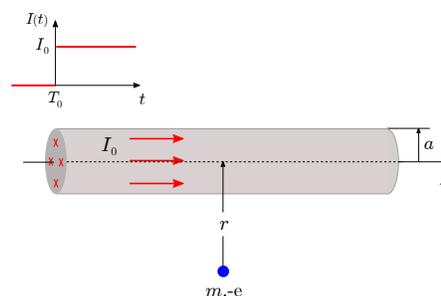
- ¿Cuál es la lectura en vóltmetro V_{der} ?
- ¿Hay una corriente (en magnitud y dirección) que circule por el circuito?
- ¿Habría una fem (valor) inducida?



Observación: El vóltmetro mide la diferencia de potencial que existe entre los extremos de su resistencia interna R_i cuando por ella circula una corriente I . La unidad $\Omega \equiv \text{Ohm}$.

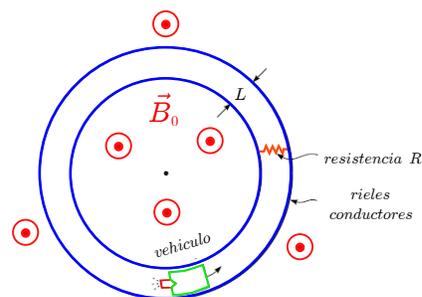
F-25 (Examen-2021O) Un electrón, masa m y carga eléctrica $-e$, está en reposo a una distancia r del eje de un conductor muy largo, de radio $a < r$. A partir de cierto instante T_0 , circula una corriente constante,

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_0 \\ I_0 & t > T_0 \end{cases},$$



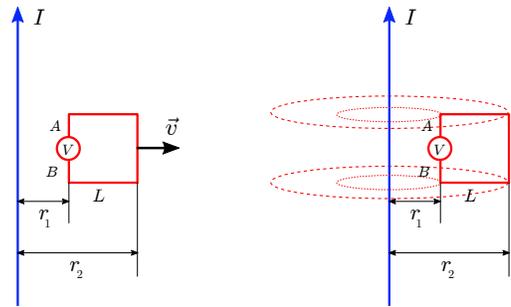
que se distribuye uniformemente por el conductor. ¿Es afectado el estado de reposo que tenía originalmente ($t \leq T_0$) el electrón? Justifique su afirmación. De existir cambios, indique cualitativamente qué le ocurre al electrón.

F-26 (C2-2020P) Un vehículo de metal viaja por sobre un conjunto de rieles perfectamente conductores y que forman un gran círculo. Los rieles están L metros aparte y en presencia de un campo magnético uniforme \vec{B}_0 normal a su plano (figura). La masa del vehículo es m y está impulsado por un motor de cohete que ejerce un empuje constante F_0 . El sistema actúa como un generador de corriente continua que alimenta una resistencia de carga R . Determine la corriente que circula por la resistencia en el tiempo y gráfiquela.



F-27 Considere una espira circular de radio inicial $r_0 = 0,1$ m y resistencia 1Ω . Una fuente de voltaje variable en el circuito de la espira tiene inicialmente el valor de 1 V y perpendicularmente a la espira existe un campo magnético uniforme $B = 1$ T. Al tiempo $t = 0$ el radio de la espira comienza a aumentar a una tasa de 1 m/s manteniendo fija la resistencia ($r = r_0 + t$). Desprecie el campo magnético debido a la corriente en el circuito y calcule la potencia de la fuente de f.e.m. para que la corriente se mantenga constante en 1 A. ¿Cuál es el valor del voltaje cuando $r = 10 r_0$?

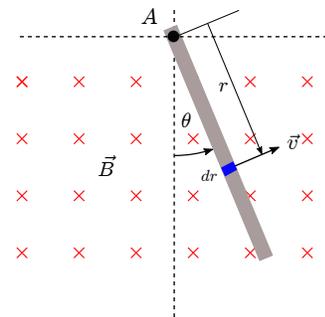
F-28 Un alambre muy largo lleva una corriente I como se indica en figura. Una espira cuadrada conectada a un voltmetro se aleja radialmente del alambre con velocidad \vec{v} . ¿Cuál de los terminales del instrumento, A ó B, es positivo?



a) Calcule el voltaje que lee el voltmetro en función de las distancias r_1 y r_2 . Probablemente su cálculo es aproximado. Identifique la razón y estime el error cometido en el cálculo realizado.

b) Ahora, haga rotar la espira alrededor del alambre y responda las mismas preguntas previas.

F-29 Una barra metálica plana, de longitud ℓ y masa m puede girar alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos (A). La barra es forzada a oscilar en un campo magnético B_0 , uniforme y perpendicular al plano de oscilación de la barra. La oscilación es tal que $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$, donde θ_0 y ω son constantes.

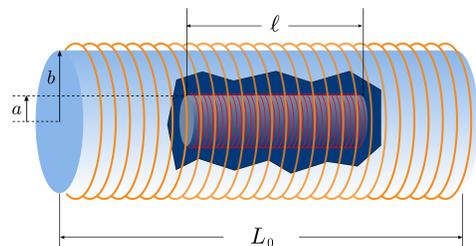


a) Escriba la magnitud infinitesimal $d\varepsilon$ de la f.e.m. inducida en una sección infinitesimal de la barra dr en función de la distancia r al punto A y la velocidad lineal del elemento. Expresé $d\varepsilon$ en función de r y t .

b) Evalúe la f.e.m. total inducida en la barra en función del tiempo. Especifique la polaridad de los extremos de la barra.

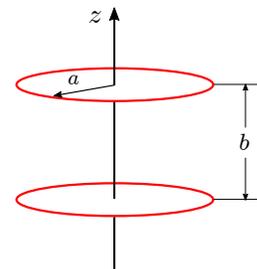
c) ¿Para qué valor del ángulo θ la f.e.m. inducida es máxima y cuál es ese valor?

F-30 a) Encuentre la autoinductancia de un solenoide muy largo (de largo L_0) y radio R que posee n vueltas por unidad de largo.



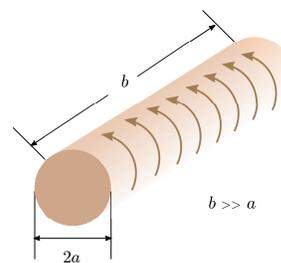
b) Considere ahora un solenoide corto (de largo l y radio a , con n_1 vueltas por unidad de largo) que yace en el eje de un solenoide muy largo (de radio b , con n_2 vueltas por unidad de largo), como muestra la figura. Calcule el flujo de campo magnético sobre el solenoide largo y la inductancia mutua del sistema.

F-31 Deduzca una formula aproximada para la inducción mutua entre 2 anillos circulares del mismo radio a , dispuestos como ruedas en el mismo eje con sus centros separados una distancia b . Use una aproximación válida para $b \gg a$.



Respuesta (pág. 62)

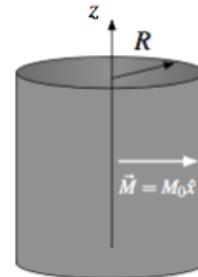
F-32 (Examen-2021O) Usando conceptos de energía magnética, calcule la autoinductancia de un cilindro largo de metal, de radio a y largo $b \gg a$, por el que la corriente circula tangencialmente.



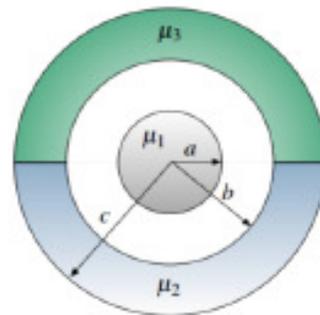
Capítulo 6

Campos magnéticos en materiales

MM-1 Se tiene un cilindro infinitamente largo, de radio R con su eje coincidente con el eje z y con una magnetización constante $\vec{M} = M_0 \hat{x}$ perpendicular a su eje. Determine las corrientes de magnetización (volumétricas y superficiales) y el campo magnético en el eje del cilindro.



MM-2 Por el interior de un cilindro infinito, de radio a y permeabilidad magnética μ_1 , circula una corriente I_0 en la dirección \hat{z} . A este cilindro lo rodea un casquete cilíndrico de radio interno b y radio externo c . El casquete consiste en dos mitades, de permeabilidad μ_2 y μ_3 respectivamente (ver figura). Por el casquete circula la misma cantidad de corriente I_0 pero en sentido opuesto al del cilindro interno. Suponga que las densidades de corriente al interior de estos materiales es homogénea.



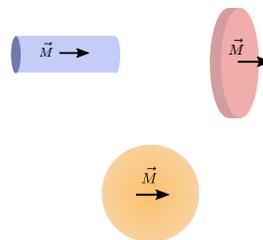
a) Encuentre una expresión para la corriente total $I(r)$ que atraviesa una superficie circular de radio r arbitrario, concéntrica a los cilindros.

b) Encuentre \vec{H} y \vec{B} en todo el espacio.

c) Determine el valor de las corrientes superficiales \vec{K}_M inducidas por la magnetización \vec{M} de los medios, en cada una de las superficies.

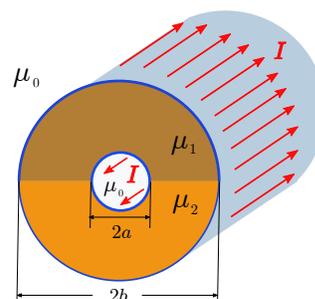
MM-3 Considere una espira circular de radio a y densidad lineal de masa ρ por la cual pasa una corriente estacionaria I . La espira se hace levitar (en contra de la gravedad) a una altura h sobre el polo norte de un imán cilíndrico permanente muy largo y de radio R . Encuentre la magnetización del imán permanente. Suponga $R \ll a, h$.

MM-4 Determinar el campo magnético que producen los materiales de la figura, que tienen una magnetización \vec{M} constante sobre todo el volumen que ocupan. Las geometrías correspondientes son conocidas. Grafique el campo magnético que producen en todo el espacio.



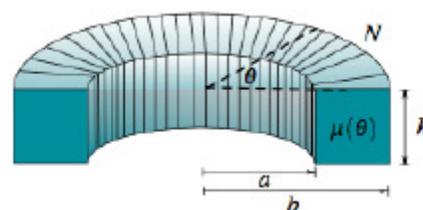
MM-5 Un cable coaxial consiste en dos cilindros muy largos, separados por un material aislante de susceptibilidad magnética χ_m . Una corriente I fluye desde el conductor más interno y regresa por el más externo. En cada caso la corriente se distribuye de manera uniforme sobre las superficies (los mantos) de cada cilindro. Encuentre el campo magnético en la región entre los tubos. Para comprobar, calcule la magnetización y las corrientes ligadas, y confirme que generan el campo magnético correcto.

MM-6 Considere dos conductores laminares cilíndricos coaxiales de longitud infinita y radios a y b , por los que circulan corrientes de intensidad I en sentidos contrarios. Suponga que el espacio comprendido entre los dos conductores está ocupado por dos medios de permeabilidad magnética μ_1 y μ_2 . La superficie de separación entre los medios es plana y ortogonal a la sección de los conductores, de forma que cada medio ocupa la mitad del espacio entre los conductores (ver figura). Además, considere que el vacío ocupa la región exterior al conductor cilíndrico externo y la región interior al conductor cilíndrico interno. Calcule el campo magnético \vec{B} , la intensidad de campo magnético \vec{H} y la magnetización \vec{M} en todo el espacio.



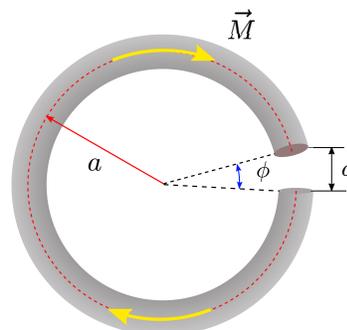
MM-7 Considere una bobina toroidal, de sección rectangular y de N espiras, por cada una de las cuales circula una corriente I . El núcleo de esta bobina es de un material inhomogéneo de tal forma que su permeabilidad magnética μ depende tan solo del ángulo polar θ y satisface

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + k \cos^2(\theta)$$

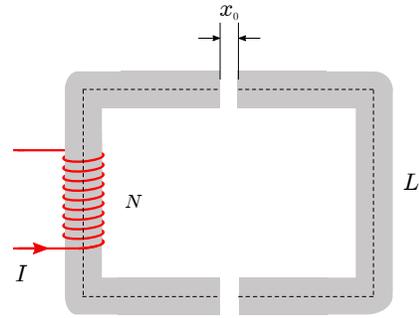


Determine \vec{H} en el interior de la bobina.

MM-8 Un imán permanente consiste en un anillo de Fe (hierro), de radio medio a , con un pequeño corte de ancho d con se muestra en figura. El Fe está magnetizado uniformemente con momento magnético \vec{M} por unidad de volumen en la dirección del vector unitario azimutal $\hat{\phi}$. Calcular la intensidad de campo magnético (\vec{H}) dentro del material de Fe y en la región donde existe el corte (entrehierro). Analice el caso límite $\phi = 0$ y explique el resultado.

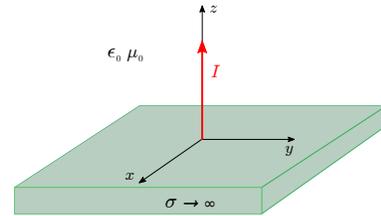


MM-9 (Examen-2017P) Se construye un electroimán en la forma que indica la figura: el núcleo de material ferromagnético de permeabilidad μ (supuestamente constante), de largo total L y sección uniforme de área A que puede separarse en 2 mitades. El núcleo se magnetiza mediante un solenoide de N vueltas por el que circula una corriente de I [A].



Calcular la fuerza con que se atraen las 2 mitades del núcleo si se las separa una distancia $x_0 \ll L$.

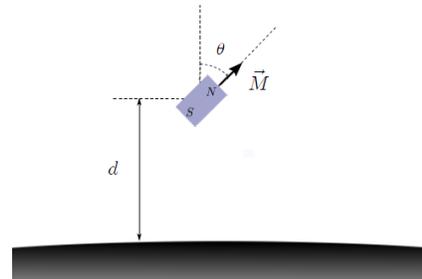
MM-10 Un conductor de largo semi-infinito, que lleva una corriente I , se ubica perpendicular a un plano perfectamente conductor conectado a tierra en $z = 0$.



a) Calcule el campo magnético, en magnitud y dirección, sobre el plano conductor ($z > 0$).

b) Determine la magnitud y dirección de la corriente en la superficie del plano conductor.

MM-11 (E10-2016P) Un metal superconductor tiene la propiedad que tanto el campo eléctrico \vec{E} como el campo magnético \vec{B} se anulan en su interior. Un imán de volumen V y magnetización \vec{M} , orientado en un ángulo θ con respecto a la normal a la superficie, se ubica a una distancia d de una lámina superconductora infinita.



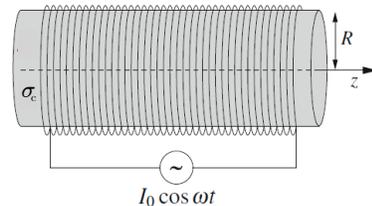
a) Determine las condiciones de borde que deben satisfacer \vec{E} y \vec{B} en la superficie del metal superconductor.

b) Explique brevemente un método para obtener el campo magnético en cualquier punto del espacio. Comente las aproximaciones, si las hace, que realiza.

c) Encuentre el torque sobre el imán. Deduzca los ángulos de equilibrio e indique aquéllos que son estables y cuáles son inestables.

d) Calcule la fuerza sobre el imán. ¿Es atraído o repelido por la lámina superconductora?

MM-12 (C2-2020P) Considere una bobina muy larga, con m vueltas por unidad de largo, enrollada alrededor de un material conductor cilíndrico de radio R y longitud $L \gg R$. El material tiene una conductividad $\sigma_c (\equiv g)$ y una permitividad magnética equivalente a la del vacío (μ_0). Una corriente alterna $I = I_0 \cos(\omega t)$ fluye por la bobina.



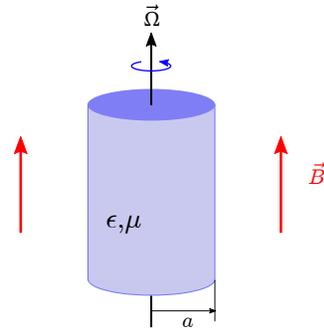
a) Encontrar el campo eléctrico inducido en conductor.

b) Explique porqué el cilindro se calienta y calcule la potencia disipada.

c) ¿Existe alguna modificación del campo magnético que genera la bobina por la presencia del conductor en su interior? Explique y, si es necesario, cuantifique su respuesta.

Importante: Suponga que efectos de borde y la corriente de desplazamiento son despreciables.

MM-13 (Examen-2021O) Un campo magnético uniforme \vec{B} es paralelo al eje de un cilindro de material dieléctrico, de radio a y con permeabilidades eléctrica ϵ y magnética μ , que gira en torno a su eje de simetría con velocidad angular $\vec{\Omega}$. Demostrar que el cilindro se polariza y calcular la carga eléctrica inducida por unidad de longitud en su superficie.



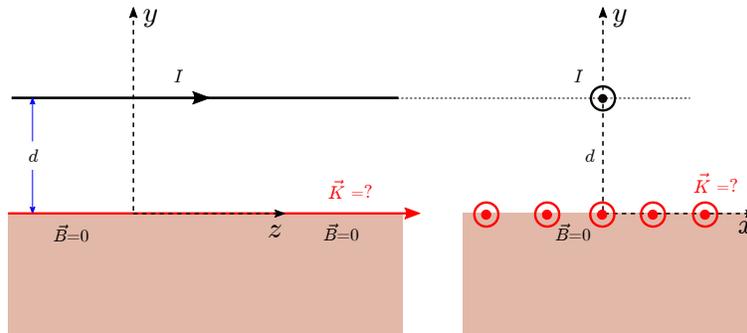
Respuesta (pág. 62)

MM-14 Un alambre conductor recto, muy largo, por el que circula una corriente I se ubica a la distancia d de un medio superconductor, extendido y cuya superficie (tan extensa como el alambre en la práctica) es plana.

El superconductor se caracteriza por tener campos eléctrico y magnético nulos en su interior.

a) Calcule la densidad de corriente superficial \vec{K} inducida en la superficie del medio (dirección es constante pero su magnitud varía según su distancia al alambre) tal que $\vec{B} = 0$ justo al interior del medio ($y = 0^-$).

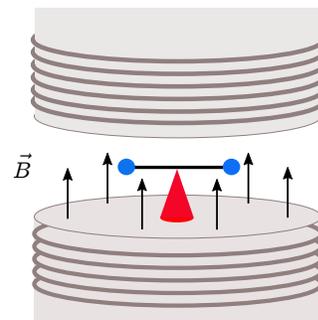
b) Calcule la fuerza por unidad de largo (magnitud y dirección) entre el alambre y y medio superconductor.



Capítulo 7

Ecuaciones de Maxwell - Ondas electromagnéticas

O-1 (Examen-2016P) Una barra aislante, de masa despreciable y largo $2a$, tiene su punto medio fijo a una rótula universal sin roce. En sus extremos hay sendas esferitas conductoras, de masa m y carga Q cada una de ellas. El sistema se encuentra en el entrehierro de un electroimán, como se indica en figura. En $t = 0$ se inicia el paso de una corriente de modo que el campo magnético uniforme en el entrehierro crece linealmente con el tiempo, $\vec{B}(t) = B_0 \frac{t}{\tau} \hat{k}$, con B_0 y τ conocidos.



- Calcule la fuerza neta y el torque sobre la barra.
- Si existe movimiento de la barra, ¿cómo variaría en el tiempo la variable angular que describe el movimiento?
- Calcule el vector de Poynting en el volumen del entrehierro. Explique su significado.
- Comente si hizo aproximaciones en los cálculos previos. Sea explícito.

O-2 (Examen-2017P) Considere un condensador de placas planas y paralelas, con un medio dieléctrico lineal y homogéneo entre ellas. El condensador se carga mediante una corriente $I(t)$. Despreciando efectos de borde, calcular la densidad instantánea de corriente de desplazamiento y la corriente de desplazamiento en el dieléctrico. Ud. aporte cualquier dato que estime relevante.

O-3 Suponga que existe una carga magnética q_m que produce un campo magnético radial, análogo al campo eléctrico que produce una carga eléctrica q_e ,

$$q_e \longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}; \quad q_m \longrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^2} \hat{r}.$$

Calcule la componente z del momentum angular en el campo producido por una carga eléctrica y una carga magnética separadas una distancia d . Conociendo que las partículas elementales llevan asociado un momentum angular intrínseco (spin) que es un múltiplo de $\frac{\hbar}{2}$ y que $|q_e| = e$, ¿cuál sería la magnitud de la carga magnética ... si existiera?

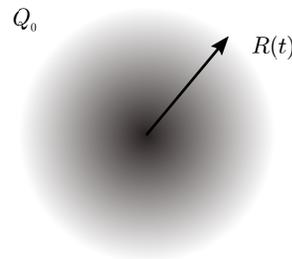
- O-4 a) Demuestre que en una región V del espacio libre de cargas, el campo eléctrico inducido por un campo magnético variable en el tiempo se puede calcular a partir de

$$E(\vec{r}; t) \sim \int_V \frac{\dot{\vec{B}}(\vec{r}'; t) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

donde $\dot{\vec{B}}(\vec{r}'; t) = \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}'; t)}{\partial t}$. Determine la constante de proporcionalidad.

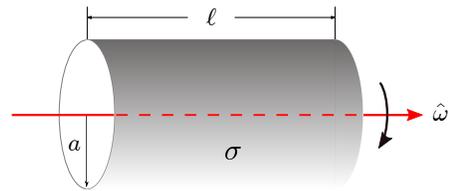
- b) Considere el caso en que \vec{B} tiene simetría cilíndrica, es decir, no depende del ángulo azimutal ϕ alrededor del eje z . En este caso, encuentre una expresión para el campo eléctrico, expresada en función de la derivada temporal del flujo magnético $\Phi_m (= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S})$ a través de una superficie S correspondiente a un círculo de radio r .
- c) Sea $\vec{B}(\vec{r}; t) = B(\vec{r}; t) \hat{z}$ el campo en el plano $z = 0$. Considere una partícula de carga q y masa m describiendo en ese plano una órbita circular de radio a bajo la influencia de ese campo. Determine el valor de $\dot{\Phi}_m(t)$ para que el radio de la órbita permanezca estacionario. ¿Qué momentum adquiere la partícula?
- O-5 La Tierra recibe, a mediodía y dependiendo de la latitud, alrededor de $1300 [W/m^2]$ de energía radiante proveniente del sol. Suponiendo que esta energía es transportada por ondas planas monocromáticas, que tienen incidencia normal sobre la Tierra, estime la magnitud del campo eléctrico y el campo magnético de la luz solar.
- O-6 Una onda electromagnética tiene una frecuencia de 100 MHz y se propaga en el vacío. El campo magnético viene dado por $\vec{B}(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{i}$ con $B_0 = 10^{-8} \text{ T}$.
- a) Encuentre la frecuencia angular, la longitud de onda y la dirección de propagación de la onda.
- b) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}(z, t)$
- c) Encuentre el vector de Poynting y la intensidad de la onda.

- O-7 (Examen-2016P) Se tiene una distribución uniforme de cargas, con simetría esférica, que puede oscilar radialmente. El radio que limita la distribución varía armónicamente en el tiempo, $R(t) = R_0 + a \cos(\omega t)$, con $R_0 > a$. La carga total de la distribución es Q_0 .



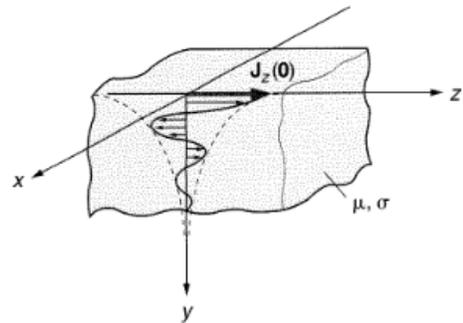
- a) Calcule la densidad de corriente de conducción en la distribución oscilante de carga. Puede suponer que $\vec{J} = J(r) \hat{r}$ y que esta densidad es finita en el centro de la distribución.
- b) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio y la corriente de desplazamiento.
- c) ¿Genera campo magnético la distribución de cargas oscilante? De ser afirmativa su respuesta, determínelo. En todo caso, justifique su respuesta.
- O-8 Considere un alambre cilíndrico recto de conductividad σ_c y de sección transversal A . Conduce una corriente I uniformemente distribuida.
- a) Determine la dirección y la magnitud del vector de Poynting en la superficie del alambre.
- b) Integre la componente normal del vector de Poynting sobre la superficie del alambre para un segmento de longitud L y compare con el resultado esperado de acuerdo al Efecto Joule. ¿Se corresponden?

O-9 (Examen-2018P) Una cáscara delgada cilíndrica, de largo ℓ y radio a ($\ell \gg a$), tiene una densidad de carga eléctrica σ uniformemente distribuida en su superficie. La cáscara rota alrededor de su eje con una velocidad angular $\vec{\omega}$ que aumenta lentamente en el tiempo, $\vec{\omega} = kt\hat{\omega}$, donde k es una constante conocida, $t \geq 0$ y $\hat{\omega}$ es el vector unitario que indica la dirección del eje. Depreciando los efectos de borde, determine:



- El campo magnético en el interior del cilindro.
- El campo eléctrico en el interior del cilindro.
- El vector de Poynting (en magnitud y dirección) y el flujo de energía electromagnética por unidad de tiempo a través de las paredes del cilindro. Compare con la energía eléctrica y magnética contenida en el volumen del cilindro, por unidad de tiempo.

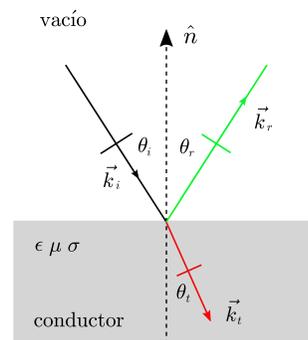
O-10 Considere un caso idealizado de una corriente sinusoidal en un semi-espacio conductor homogéneo. Sea la frecuencia angular de la corriente ω y el medio tiene conductividad σ y permeabilidad magnética μ . Finalmente, asuma que la densidad de corriente es paralela al borde de la superficie, y que tiene una sola componente, por ejemplo $\vec{J} = J_z\hat{z}$, que depende de la coordenada y (distancia desde la interfaz).



Usando las ecuaciones de Maxwell y un ansatz para los campos de la forma $\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x})e^{i\omega t}$ y $\vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$, obtener una expresión para $J_z(y)$ y estimar la profundidad máxima donde habrá corriente.

O-11 La intensidad con la cual la luz del sol incide sobre la tierra es aproximadamente $1300 [W/m^2]$. Si la luz incide sobre una superficie que absorbe perfectamente, ¿cuánta presión le ejerce? ¿Y si incide sobre un reflector perfecto? ¿Cómo se compara esto con la presión atmosférica?
Respuesta (pág. 62)

O-12 (Examen-2016P) Considere una lámina delgada conductora, no magnética, sobre la cual incide una onda electromagnética plana, monocromática y frecuencia angular ω . Considerando que la conductividad del medio conductor es σ (ó g) y que la corriente de conducción es mucho mayor que la corriente de desplazamiento,



- Para un ángulo de incidencia θ_i dado, determine el ángulo θ_t de refracción de la onda transmitida. En particular, cuál es su valor límite cuando la conductividad de la lámina es grande ($\sigma \rightarrow \infty$) y la frecuencia de la onda incidente es baja. Interprete su resultado.
- En las condiciones previas, demuestre que el campo en el interior de un conductor ideal es puramente magnético. ¿Qué fracción de la energía incidente, por unidad de área y tiempo, es reflejada en la superficie conductora?

O-13 (Examen-2017P) Se trata de entender la propagación de ondas electromagnéticas en la ionósfera, capa de la atmósfera terrestre que se extiende entre los 80 y los 500 Km de altitud aproximadamente, y que físicamente corresponde a un plasma. En particular, consideremos que este plasma es un medio conductor formado por iones de masa m , carga e , con una densidad N_i de iones por unidad de volumen y libres de moverse bajo la acción de campos eléctricos. En este plasma, la ecuación de propagación del campo eléctrico es

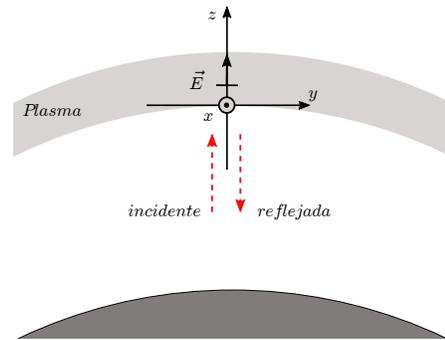
$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma_P \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

donde σ_P se identifica como la conductividad del plasma y c es la velocidad de la luz.

a) Suponga que la ecuación de onda tiene soluciones del tipo onda plana monocromática de frecuencia angular ω ,

$$\vec{E} = E_0 e^{i\omega(t - \frac{z}{v})} \hat{x}.$$

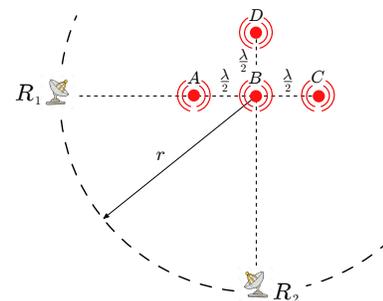
- (i) Interprete la magnitud v en la fase de la onda.
- (ii) Obtenga una expresión para el índice de refracción del plasma que contenga σ_P .
- b) Cálculo de la conductividad del plasma σ_P . Para ello se sugiere,
 - (i) Escriba la ecuación de movimiento de los iones. De las fuerzas que actúan, desprecie las interacciones entre iones y las fuerzas magnéticas. También suponga que no hay disipación de energía. Resuelva la ecuación de movimiento para la velocidad de los iones.
 - (ii) Escriba la densidad de corriente de conducción iónica usando el resultado obtenido previamente.
 - (iii) Deduzca del punto anterior una expresión para la conductividad del plasma σ_P . Expresé su resultado en función de la frecuencia del plasma $\omega_P^2 = \frac{N_i e^2}{\epsilon_0 m}$. Comente el resultado obtenido.
- c) Calcule el índice de refracción con el σ_P calculado en (b). Discuta el resultado obtenido. Dependiendo del valor de la frecuencia ω , ¿es siempre posible propagar la onda electromagnética en la ionósfera? Explique.



O-14 (Examen-2018P) Cuatro fuentes idénticas, coherentes, de ondas electromagnéticas monocromáticas A , B , C y D (ver figura), emiten ondas de la misma longitud de onda λ e igual intensidad I . La distancia entre las fuentes es $\frac{\lambda}{2}$.

Dos receptores R_1 y R_2 están a una gran distancia r (pero iguales) de la fuente B .

- a) ¿Cuál receptor capta la señal más intensa (fuerte)?
- b) ¿Cuál receptor, si corresponde, capta la señal más fuerte si la fuente B se apaga?
- c) Idem caso (b) si la fuente D se apaga.
- d) ¿Cuál receptor puede indicar qué fuente, B o D , ha sido apagada?



Observación: La señal captada por un receptor corresponde a la intensidad de la onda resultante recibida.

O-15 En la mayoría de los casos las componentes de \vec{E} y \vec{B} de las ondas electromagnéticas son perpendiculares entre sí y la dirección de propagación. Considere los siguientes casos A y B en el vacío, donde \vec{E} y \vec{B} son paralelos:

$$\begin{aligned}\vec{E}_A(\vec{r}; t) &= E_0 \sin(\omega t) [\sin(kz)\hat{x} + \cos(kz)\hat{y}] \\ \vec{B}_A(\vec{r}; t) &= E_0 \cos(\omega t) [\sin(kz)\hat{x} + \cos(kz)\hat{y}] \\ \vec{E}_B(\vec{r}; t) &= E_0 \cos(kz) [\cos(\omega t)\hat{x} - \sin(\omega t)\hat{y}] \\ \vec{B}_B(\vec{r}; t) &= -E_0 \sin(kz) [\cos(\omega t)\hat{x} - \sin(\omega t)\hat{y}]\end{aligned}$$

- Verifique que los campos satisfacen la ecuación de onda de un campo electromagnético.
- Calcule el vector de Poynting y la densidad de energía.
- Describa estas ondas con palabras y esquemas. Refiérase a la polarización, y comente sobre por qué no cumplen la propiedad “típica” de ortogonalidad entre \vec{E} y \vec{B} . ¿Siguen siendo perpendiculares a la dirección de propagación?

O-16 Considere una onda plana propagándose en el vacío. Demuestre que la razón entre la magnitud del campo eléctrico y el campo magnético es

$$\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{H}\|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ } [\Omega]$$

y recibe el nombre de impedancia del espacio libre. ¿Hay una explicación realmente física para definir esta cantidad en el vacío?

O-17 Considere una superposición de ondas viajando en la dirección del eje z ,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}; t) &= \text{Re} [E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + E_2 e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}] \\ \vec{B}(\vec{r}; t) &= \text{Re} \left[\frac{E_1}{c} e^{i(kz-\omega t)}\hat{y} - \frac{E_2}{c} e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} \right]\end{aligned}$$

donde E_1 y E_2 pueden ser complejos,

$$E_1 = C_1 e^{i\phi_1}, \quad E_2 = C_2 e^{i\phi_2}, \quad C_1 \text{ y } C_2 \text{ reales.}$$

- Calcule el flujo promedio de energía por unidad de área y tiempo, $\langle \vec{S} \rangle$.
- Suponga que $E_1 = C$ y $E_2 = iC$, es decir, $C_1 = C_2 = C$ y $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$. Determine la dirección de \vec{E} en función de t , en un punto de plano (x, y) . Describa el resultado mediante palabras y dibujos.
- Para el mismo campo en la parte (b), determine la dirección de \vec{E} en función de z , para el instante en $t = 0$. Describe el resultado en palabras y dibujos.

O-18 Una corriente dependiente del tiempo, $I(t) = I_0 t/\tau$, circula por un solenoide cilíndrico infinitamente largo de radio a y n vueltas por unidad de largo.

- Determinar los campos eléctrico y magnético, \vec{E} y \vec{B} , dentro del solenoide.
- Verificar la ley de conservación de la energía electromagnética (teorema de Poynting), para una superficie interna, cerrada y cilíndrica, coaxial al solenoide.
- Verificar ahora el teorema de Poynting para una superficie externa, cilíndrica y coaxial al solenoide (recordar que $\vec{B} = 0$ fuera de un solenoide infinito).

O-19 Ondas gravitacionales.

Se han detectado ondas gravitacionales emitidas por colisiones entre agujeros negros. Para analizar dicho fenómeno es necesario recurrir a la relatividad general; sin embargo, se puede intentar utilizar gravitación newtoniana para intentar entender las ondas gravitacionales.

a) La fuerza gravitacional que ejerce una partícula con masa m' en posición \vec{r}' , sobre otra con masa m en posición \vec{r} , está dada por

$$\vec{F}_m = -G m m' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}.$$

y donde G es la constante de gravitación universal. Análogo al camino seguido en electrostática,

- defina el campo gravitacional \vec{E}_g debido a una partícula de masa m ;
- usando el principio de superposición, encuentre el campo gravitacional producido por una densidad de masa $\rho(\vec{r}')$ en un punto \vec{r} ;
- encuentre el rotor y la divergencia de \vec{E}_g producido por una densidad de masa ρ . Estas serían el equivalente, para la gravitación (versión estática), a dos de las leyes de Maxwell.

b) Hay un campo análogo al campo magnético, un campo gravitomagnético \vec{B}_g , que se produce por el movimiento de la masa (“corriente de masa”). Se tiene que para una masa m con velocidad \vec{v} , la fuerza debida al campo gravitomagnético es $F_m = m \vec{v} \times \vec{B}_g$.

- Se define una corriente de masa como $I = \frac{dm}{dt}$. Además, se define la densidad volumétrica de corriente \vec{J} a través de $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$. Entonces, el campo \vec{B}_g producido por una densidad \vec{J} es

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_g}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV',$$

con μ_g una constante a determinar. Calcular el rotor y la divergencia de \vec{B}_g : dos nuevas leyes de Maxwell!

- Exprese la conservación de la masa a través de ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

c) Si el campo gravitomagnético \vec{B}_g cambia en el tiempo, se tiene $\nabla \times \vec{E}_g = -\frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t}$. Complete sus ecuaciones de Maxwell, justificando cualquier cambio que haga.

d) Derive algunas conclusiones

- Encuentre la ecuación que describe ondas gravitacionales.
- Si las ondas gravitacionales viajan a la velocidad de la luz c , determine la constante μ_g .
- ¿Cuál es el vector de Poynting asociado a ondas gravitacionales? ¿Y la intensidad de las ondas?
- Describa en palabras por qué dos agujeros negros que colisionan emiten ondas gravitacionales.
- La fórmula de Larmor indica la potencia irradiada por una carga q con aceleración a :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

¿Cuál es la ecuación análoga en gravitación? Considere agujeros negros de 36 y 29 masas solares, orbitando uno en torno al otro. Cuando están a una distancia de 2×10^5 [m], ¿aproximadamente, qué potencia irradiaba el sistema? Se observó este sistema en la vida real y su máxima emisión fue 3×10^{49} [W]. Comente.



Respuestas

1. Electrostática

E-5

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{F} &= \frac{4\pi}{3} \rho (a^3 - b^3) \vec{E}_0 \\ b) \quad \vec{\tau} &= -\frac{4\pi}{3} \rho b^3 \vec{d} \times \vec{E}_0 \quad \text{con respecto a } O_a, \\ c) \quad \vec{E} &= \vec{E}_0 + \frac{1}{3\epsilon_0} \rho \vec{d} \end{aligned}$$

E-6

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{F} &= -Q \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{[z^2+a^2]^{3/2}} \right\} \hat{z} & v_{max} &= \sqrt{\left(\frac{Q\lambda}{m\epsilon_0} \right)} \quad \text{en } z=0 \\ b) \quad \vec{F} &= -Q \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{[z^2+a^2]^{3/2}} - \frac{(z-L)}{[(z-L)^2+a^2]^{3/2}} \right\} \hat{z} & \text{velocidad nula en } z^* &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

E-9

$$\begin{aligned} r \geq R : \quad V(r) &= \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r} \\ r < R : \quad V(r) &= \frac{2\rho_0 R^2}{15\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{6} (r^2 - R^2) - \frac{1}{20R^2} (r^4 - R^4) \right] \end{aligned}$$

E-10

$$\begin{aligned} r < a : \quad \vec{E} &= 0, & \text{no cambia el resultado;} \\ a < r < b : \quad \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \hat{r}, & \text{el campo invierte su direcci3n;} \\ r > b : \quad \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2+b^2}{r^2} \right) \hat{r}, & \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{b^2-a^2}{r^2} \right) \hat{r}. \end{aligned}$$

E-11

$$\vec{F} = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R(R+d)} \hat{r}$$

E-20

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{E} &= \frac{Nqe}{3\epsilon_0} \vec{r} & b) \quad \eta &= \frac{m_H}{e} \sqrt{4\pi G \epsilon_0} \simeq 8,7 \times 10^{-19} \\ c) \quad v_r(r) &= r \sqrt{\lambda} & \left(\lambda = \frac{N(qe)^2}{3m_H \epsilon_0} - \frac{4\pi G N m_H}{3} \right) & \quad d) \quad T = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

E-23

$$a) \quad \vec{E}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{Ne}{\epsilon_0} z \hat{z} & 0 \leq x \leq \eta \\ \frac{Ne}{\epsilon_0} \eta \hat{z} & \eta \leq x \leq h \\ -\frac{Ne}{\epsilon_0} (z - [h + \eta]) \hat{z} & h \leq x \leq (h + \eta) \\ 0 & x > (h + \eta) \end{cases} \quad \begin{aligned} b) \quad \vec{F} &= \frac{(NeL)^2}{\epsilon_0} \left[-h\eta + \frac{1}{2}\eta^2 \right] \hat{z} \\ c) \quad \omega &= NeL \sqrt{\frac{h}{\epsilon_0 M}} \end{aligned}$$

E-27

$$W = -\frac{\sigma_0 \lambda l^2}{4\epsilon_0}$$

E-31

$$\begin{aligned} a) \quad & \rho_N = e N_P \frac{a^2}{b^2 - a^2} \\ b) \quad & \vec{E}(r < a) = \frac{\rho_P r}{2\epsilon_0} \hat{r}; \quad \vec{E}(a \leq r \leq b) = \frac{\rho_N (r^2 - b^2)}{2r\epsilon_0} \hat{r}; \quad \vec{E}(r > b) = 0; \\ c) \quad & W = \frac{(eab)^2}{2\epsilon_0 (b^2 - a^2)} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

E-32

$$x(x_0; t) = x_0 \left[1 + \frac{q^2 n_0}{m\epsilon_0} t^2\right] \quad \text{donde } x_0 \text{ es la posición de la partícula en } t = 0$$

E-34

$$W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

E-41

$$\begin{aligned} a) \quad & \text{---} \\ b) \quad & d = \frac{4\pi\epsilon_0 E_0 R^3}{Ze} \quad \text{restricción: } E_0 \ll \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R^2} \\ c) \quad & \|\vec{p}\| = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0 \quad V(r, \theta) = \frac{Zed \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

2. Campos eléctricos en materiales: Conductores y Dieléctricos

CD-7

$$\vec{T} = \frac{Q^2 ab}{4\pi\epsilon_0 L^2 (a+b)^2} \hat{r}$$

CD-8

$$\sigma(\theta) = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{\left[\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 1\right]}{\left[\left(\frac{d}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{a}\right) \cos\theta + 1\right]^{3/2}} \quad \|\vec{F}\| = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ad}{(a^2 - d^2)^2} \quad (\text{atractiva})$$

CD-19

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{(b)} \\ \rho_P(r) = -\frac{2P_0}{r} & \rho_P(r) = -\frac{2P_0}{r} \\ \sigma_P(a) = -P_0 & \sigma_P(a) = -P_0 \\ \sigma_P(b) = P_0 & \sigma_P(b) = P_0 \\ \sigma_\ell(a) = 0 & \sigma_\ell(a) = -P_0 \left(\frac{b}{a}\right) \\ \sigma_\ell(b) = 0 & \sigma_\ell(b) = P_0 \left(\frac{a}{b}\right) \\ \sigma_\ell(c) = 0 & \sigma_\ell(c) = -P_0 \left(\frac{ab}{c^2}\right) \\ V(b) - V(a) = \frac{P_0}{\epsilon_0} (b - a) & V(b) - V(a) = 0 \end{array}$$

CD-22

$$\begin{aligned} a) \quad & \vec{E}(r) = 2k_e \frac{Q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2} \hat{r} \quad \sigma_{tot} = \frac{Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \\ & \sigma_{\ell_1} = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad \sigma_{\ell_2} = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \\ & \sigma_{P_1} = -\frac{(\epsilon_1 - 1)Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad \sigma_{P_2} = -\frac{(\epsilon_2 - 1)Q}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \\ b) \quad & Q = \sqrt{\frac{4\pi R^5 (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho)g}{3k_e(\epsilon_1 - \epsilon_2)}} \end{aligned}$$

3. Corrientes estacionarias

I-2

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \\
 V(a < r < b) = V_0 + \frac{I}{4\pi c} \ln\left(\frac{r}{b}\right) & Q(r = a) = -I \frac{\epsilon_0 a}{c} & R = \frac{1}{4\pi c} \ln(b/a) \\
 V(r > b) = V_0 \frac{b}{r} & Q(a < r < b) = -I \frac{\epsilon_0}{c} (b - a) & \\
 & Q(r = b) = I \frac{\epsilon_0 b}{c} + V_0 \frac{\epsilon_0}{b} &
 \end{array}$$

I-3

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & t^* = \frac{(b-x)\epsilon_0 + x\epsilon}{\sigma_c x} \ln 2 \\
 \text{b)} & \vec{F} = \frac{Q_0^2 (\epsilon - \epsilon_0) s}{2b[\epsilon_0(b-x) + \epsilon x]^2} \hat{x} \\
 \text{c)} & W(0) - W(\infty) = \frac{Q_0^2 s}{2b[\epsilon_0(b-x) + \epsilon x]}
 \end{array}$$

I-9

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} \quad \vec{J}(a < r < b) = \begin{cases} \frac{\sigma_2 V}{r \ln(b/a)} & \text{si } 0 < z < d_2 \\ \frac{\sigma_1 V}{r \ln(b/a)} & \text{si } d_2 < z < (d_1 + d_2) \end{cases} \\
 \text{b)} \quad R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)}; \quad C = \frac{2\pi(\epsilon_1 d_1 + \epsilon_2 d_2)}{\ln(b/a)}; \\
 \text{c)} \quad W = \frac{1}{2} C V^2; \quad P = \frac{V^2}{R}
 \end{array}$$

I-19

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad C = 4\pi\epsilon \frac{ab}{a+b} & \text{c)} \quad W(t) = \frac{Q_0^2}{2C} e^{-2\sigma_c t/\epsilon}
 \end{array}$$

4. Magnetostática

M-2

$$\vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d \sin \alpha} [\cos \alpha - 1] \hat{z} \quad \longrightarrow \quad \vec{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d} \hat{z}$$

M-5

$$\frac{V_0}{I} = \frac{1}{cC_\ell} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 300,000 \left[\frac{Km}{s}\right]$$

M-10

$$\vec{B}(y) = \begin{cases} 0 & y < -b \\ -\mu_0 J_0 (y + b) \hat{x} & -b < y < b \\ 0 & y > b \end{cases}$$

M-32

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{h} = 1,77 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2 & \\
 \text{b)} \quad \vec{B}_c = \mu_0 \sigma \omega a \hat{k} = 1,4 \times 10^{-9} \text{ T} & B_r = \mu_0 \sigma \omega r \\
 \text{c)} \quad \theta \simeq \frac{B_C}{B_*} = 2,8 \times 10^{-5} \text{ rad} &
 \end{array}$$

M-35

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad z = \left[\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi m_d g} \right]^{\frac{1}{4}} & \text{b)} \quad \text{si } \delta \equiv \frac{x}{y} \quad \delta \text{ solución de } \frac{1}{\delta^4} + \frac{1}{(\delta+1)^4} = 2 \quad (\delta \simeq 0,85\dots)
 \end{array}$$

5. Inducción electromagnética

F-4

$$\begin{aligned}
 a) \quad \theta(t) &= \frac{\pi}{4} + \omega_0 \tau [1 - e^{-t/\tau}] & \text{con } \tau &= \frac{4RJ}{B_0^2 a^4} \\
 b) \quad I_{OA}(t) &= I_{OB}(t) = \omega_0 \frac{B_0^2 a^2}{2R} e^{-t/\tau} & I_{arcoAB} &= I_{arcoBA} = \frac{1}{2} I_{AB} \\
 c) \quad I_{OA}(t) &= \frac{B_0 a^2}{2} \left[\frac{1}{2R + \frac{R_a \theta}{2\pi}} + \frac{1}{2R + R_a - \frac{R_a \theta}{2\pi}} \right] \dot{\theta}(t)
 \end{aligned}$$

F-13

$$a) \quad \vec{J} = -\frac{1}{2} B_0 \sigma_c \omega r \cos(\omega t) \hat{\theta} \quad b) \quad P = \frac{\pi}{8} \sigma_c h [B_0 \omega R^2 \cos(\omega t)]^2$$

F-14

$$a) \quad \phi(z) = \frac{1}{2} \mu_0 m \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 1,96 \times 10^{-2} \text{ Tm}^2 \quad c) \quad \vec{F} = \frac{9\mu_0^2 m^2 a^4 t^2 v^3}{4R(a^2 + v^2 t^2)^5}$$

F-22

$$\begin{aligned}
 a) \quad V_1 &= \pi a^2 \dot{B} \frac{R_1}{R_1 + R_2} & V_2 &= -\pi a^2 \dot{B} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & V_A - V_B &= \begin{cases} V_1 & (\text{trayec. iz.}) \\ |V_2| & (\text{trayec. der.}) \end{cases} \\
 b) \quad V_2 &= V_1 & V_A - V_B &= 0 \\
 c) \quad & \text{No hay falla en la teoría}
 \end{aligned}$$

F-31

$$M \approx \mu_0 \frac{(\pi a^2)^2}{2\pi b^3}$$

6. Campos magnéticos en materiales

MM-13

$$\vec{P}(\rho) = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\mu}{\mu_0} B \Omega \vec{\rho} \quad \lambda_P(\rho = a) = 2\pi a^2 (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\mu}{\mu_0} B \Omega$$

7. Ecuaciones de Maxwell - Ondas electromagnéticas

O-11

$$P_{abs-total} \simeq 4,3 \times 10^{-6} \text{ [Pa]} \quad P_{reflex-total} = 2P_{abs-total}$$