Pauta C2 electro F. Brieva

Lucas González.

P1)

a) Recordamos que la definición de capacidad en un condensador es:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

, la presencia del dieléctrico "debilita" el campo entre las placas pero mantiene las cargas constantes, esto ya que la polarización del material "ayuda" al campo. Ahora, la diferencia de potencial entre las placas del condensador será:

$$\Delta V' = \int \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \int \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \int \vec{E} \cdot dr = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \Delta V$$

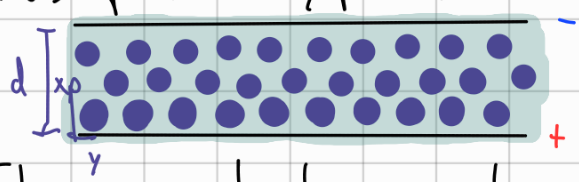
$$\Rightarrow C' = \frac{Q}{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\Delta V} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} C = \underbrace{K}_{\text{cte. dieléctrica}} C$$

+1

Este hecho es relevante porque nos permite almacenar mas carga (energía) en las placas con la misma diferencia de potencial, por otra parte permite que las placas tengan una distancia de separación menor obteniendo mayores capacidades y, a su vez, evitando que se produzcan cortocircuitos entre las placas (choques dieléctricos)

+0,5

b) Para simplificarnos la vida podemos pensar en un condensador de placas paralelas y planas:



los impurezas son esferas conductoras

El campo eléctrico entre 2 placas conductoras es uniforme, podemos calcular la diferencia de potencial entre sus placas con una integral de línea:

$$\Delta V = \int_0^d \vec{E} \cdot dy = \int_0^d E\, dy$$

; al tener esferas conductoras estas tendrán campo eléctrico nulo en su interior, por lo que cada vez que pasamos, entre 0 y d, por una de estas esferas estas no aportarán a la integral:

Asumiendo que nos encontramos con una "linea" de n esferas

$$\Delta V' = \int_0^d \vec{E}\cdot dy = \int_0^{y_1} E\,dy + n\underbrace{\cancel{\int_{y_1}^{y_1+D} E_c\,dy}}_{0} + \int_{y_1+nD}^{d} E\,dy$$; donde $E_c = 0$ y D el diametro de las esferas

$$\Rightarrow \Delta V' = E\cancel{y_1} + E[d - \cancel{y_1} - nD] = E(d-nD) < Ed = \Delta V$$ la diferencia de potencial sin esferas

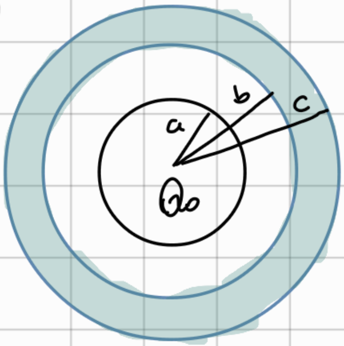
De esta forma, si Q es constante la nueva capacidad será:

$$C' = \frac{Q}{\Delta V'} = \frac{Q}{E(d-nD)} > \frac{Q}{Ed} = C$$

+1,5

$$\Rightarrow \quad C' > C$$ la capacidad aumenta.

c)



Tenemos un material con ε y σ_c, por lo que actúa como conductor y dieléctrico al mismo tiempo. De esta forma podemos decir que puede mover cargas libres. Debido a esto el sistema evoluciona en el tiempo.

Diremos que en $r=b$ con $t>0$ hay carga libre (como en el Aux #7) $q_\ell(t)$ inicialmente nula $q_\ell(t=0)=0$. En $r=c$ con $t>0$ en consecuencia exista $-q_\ell(t)$ ya que el medio sigue siendo neutro aunque haya movimiento de cargas.

Así, al calcular los campos hay que considerar estas cargas.

$b<r<c$:

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_\ell \Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_0 + q_\ell(t) \qquad t>0$$ imponiendo simetría esférica

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_0 + q_\ell(t)}{4\pi r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r};t) = \frac{Q_0 + q_\ell(t)}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

además por ley de Ohm hay densidad de corriente:

$$\vec{J} = \sigma_c\vec{E} \Rightarrow \vec{J}(\vec{r};t) = \frac{\sigma_c}{\varepsilon}\frac{Q_0 + q_\ell(t)}{4\pi r^2}\hat{r}$$

+0,5

Al igual que en el aux #7 usamos la ec. de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} = 0 \Rightarrow \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}(Q_0 + q_\ell(t)) = \frac{dq_\ell}{dt} \Rightarrow \frac{\sigma_c}{\varepsilon}(Q_0 + q_\ell) = \frac{dq_\ell}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{\sigma_c}{\varepsilon}}_{\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{dq_\ell}{dt} + \frac{1}{\tau} q_\ell = -\frac{1}{\tau} Q_0 \quad \text{con solución: } q_\ell(t) = -Q_0\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \quad +0,5$$

es fácil notar que en $t \to \infty$ $q_\ell \to -Q_0$ y por tanto $\vec{E} = 0$

Ahora las cargas superficiales serán:

$$Q_{Total}(r=b) = q_\ell(t) + q_p = q_\ell(t) + 4\pi b^2 \sigma_p\Big|_{r=b} = q_\ell(t) + \vec{P}\Big|_{r=b} \cdot (-\hat{r}) \cdot 4\pi b^2$$

$$\Rightarrow Q_{Total}(r=b) = q_\ell - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon}(Q_0 + q_\ell) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} q_\ell - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} Q_0 = -Q_0\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

y recordar que $Q_{total}(r=b) = -Q_{total}(r=c)$.

Notar que con $\sigma_c = 0$, $Q_{total}((r=b) \to q_p(r=b) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} Q_0$ solo la polarización en $r=b$

Por tanto los campos son:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & a < r < b \\ \frac{Q_0 + q_\ell(t)}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} & b < r < c \end{cases} \quad +0,5$$

d)

$$U_i = \frac{1}{2} Q_0 V_0 \quad \text{esfera sin nada} \Rightarrow \Delta U = U_i - U_f = \frac{1}{2} Q_0 (V_0 - V)$$

$$U_f = \frac{1}{2} Q_0 V < U_i$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$$

$$\Delta U = W_{polarizar} + W_{Joule}$$

$$W_{polarizar} = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon)\int_b^c |\vec{E}|^2 dV = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

$$W_{Joule} = \int_0^\infty \int \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV\, dt = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

igual que lo otro !! :)

+1,5

de cualquiera de las 2 formas

P2 Como tenemos polarización en $\hat{k}$ veamos las cargas de polarización

a) $\vec{P} = P_0\hat{k} \Rightarrow \cdot\ \sigma_1 = \vec{P}\big|_{z=\frac{L}{2}}\cdot\hat{k} = P_0 \qquad \cdot\ \rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = 0$

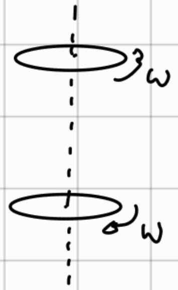
$\cdot\ \sigma_2 = \vec{P}\big|_{z=-\frac{L}{2}}\cdot(-\hat{k}) = -P_0$

$\cdot\ \sigma_3 = \vec{P}\big|_{r,\theta}\cdot\hat{r} = 0$

*Solo hay cargas en las tapas del material.

análisis de las cargas +0,5

Gracias a esto el problema se reduce a 2 discos con carga opuesta girando separados por una distancia L:



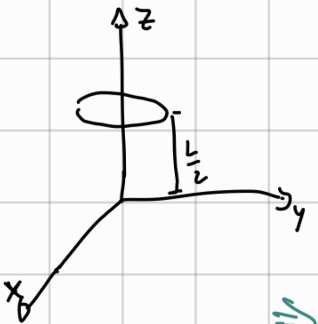
$$K_1 = \frac{P_0\,\omega r\,\hat{\theta}}{\pi R^2}$$

$$K_2 = -\frac{P_0\,\omega r\,\hat{\theta}}{\pi R^2}$$

Lo único que nos queda hacer es calcular el campo que genera un disco a lo largo de su eje: corrientes +0,5

Usando B-S: $\vec{r} = z\hat{z}$; $\vec{r}\,' = \rho\hat{\rho} \pm \frac{L}{2}\hat{z}$; $\vec{K}_i = \sigma_i\omega r\hat{\theta}$; $dS = \rho\,d\rho\,d\theta$

+ para el de arriba
- para el de abajo



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{\sigma_i\omega\rho\hat{\theta}\times\left(z\hat{z}-\rho\hat{\rho}\mp\frac{L}{2}\hat{z}\right)}{\left(\left(z\mp\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2\right)^{3/2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

plantear la integral +0,5

$\hat{\theta}\times\hat{z} = \hat{\rho}$; $\hat{\theta}\times\hat{\rho} = -\hat{z}$

integra 0 ya que $\int_0^{2\pi}\hat{\rho}(\theta)\,d\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\sigma_i\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[\cancel{\frac{\rho^2\left(z\mp\frac{L}{2}\right)\hat{\rho}}{\left(\left(z\mp\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2\right)^{3/2}}} + \frac{\rho^3\hat{z}}{\left(\left(z\mp\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2\right)^{3/2}}\right]d\rho\,d\theta$$

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0\sigma_i\omega}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{R}\frac{\rho^3}{\left(\left(z\mp\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2\right)^{3/2}}\,d\rho\,\hat{z} = \frac{\mu_0\sigma_i\omega}{2}\left(\frac{R^2+2\left(z\mp\frac{L}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(z\mp\frac{L}{2}\right)^2+R^2}} - 2\left(z\mp\frac{L}{2}\right)\right)\hat{z}$$

Así $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 P_0\omega}{2\pi R^2}\left(\dfrac{R^2+2\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+R^2}} - 2\left(z-\frac{L}{2}\right)\right)\hat{z}$

ya que $\sigma_1 = \dfrac{P_0}{\pi R^2}$ y $\vec{r}\,' = \rho\hat{\rho}+\frac{L}{2}\hat{z}$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 P_0 \omega}{2\pi R^2}\left(\frac{R^2+2\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}{\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2+R^2}} - 2\left(z+\frac{L}{2}\right)\right)\hat{z}$$

ya que $\sigma_2 = \frac{-P_0}{\pi R^2}$
y $\vec{r}\,' = \rho\hat{\rho} - \frac{L}{2}\hat{z}$

y $\vec{B}_{Tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ //

resolución +0,5

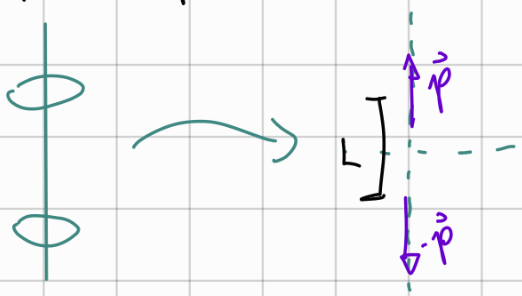
b) Por cosas de simetría y mano derecha es posible (sin calcular) que $\vec{B}$ apunta en $\hat{z}$. Nosotros igual lo calculamos pero si lo argumentaron tabien.

Al estar la corriente en $\hat{z}$ y $\vec{B}$ tambien la fuerza será

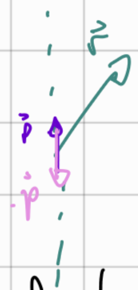
$$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B} = \int I\, dz\, \hat{z} \times B\hat{z} = 0$$ La fuerza es nula.

+2

c) Un disco es equivalente a una colección de espiras y sabemos que una espira es equivalente a un dipolo en su momento dipolar magnético. Con este analisis podemos concluir que ambos discos son equivalentes a 2 dipolos apuntando en direcciones opuestas: +1



Así, si estamos a distancias lejanas $|\vec{r}| >> L$ es como ver a ambos dipolos en el mismo punto:



de esta forma es facil notar que ambos dipolos se "cancelan" a largas distancias y en el espacio es como que no hay nada que afecte a la corriente

$\Rightarrow$ $\vec{B} = 0$ y por tanto $\vec{F} = 0$ en cualquier punto del espacio

+1