FI2002-7 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

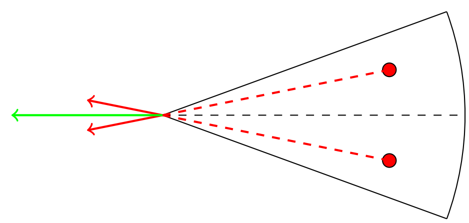
Desarrollo Auxiliar 1: Campo eléctrico.

25 de Agosto del 2021

P1. Carga atada a una barra infinita:

P2. Campo eléctrico de una distribución de carga no uniforme:

a) Para acercarnos a lo que queremos interpretar, nos conviene primero comentar sobre el campo eléctrico en el origen. Tomando una de las secciones angulares, veamos que por simetría el campo eléctrico en ese plano debe ir en la dirección del eje de simetría de la sección angular, apuntando en el mismo sentido de la *punta* de nuestra superficie. Esto es así ya que si consideramos el campo eléctrico generado en la punta por un diferencial de superficie arbitrario, la componente que es perpendicular al eje de simetría se cancela con la misma componente, pero asociada al diferencial de superficie del lado opuesto, esto hace que sólo las contribuciones paralelas al eje de simetría se sumen entre si, tal como se ilustra en el siguiente dibujo, donde la flecha verde indica la suma vectorial de ambas contribuciones individuales:



Entonces, como la sección angular que está en el eje x apunta en $-\hat{\imath}$ y la sección angular que está en el eje y apunta en $-\hat{\jmath}$, tendremos que la dirección del campo eléctrico en el origen debe ser $-(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$. Ahora, si queremos el campo eléctrico en un punto *sobre* el origen, notemos que la discusión anterior sigue siendo válida para las componentes paralelas al plano de la sección angular, además de que aparecerá una componente vertical no nula, dado que ambas flechas (contribuciones) de cada diferencial apuntarán hacia arriba, es decir, se sumarán en vez de cancelarse. De esta forma el campo eléctrico en un punto sobre el origen tendrá una dirección $-(\hat{\imath}+\hat{\jmath})+\hat{k}$.

b) Haremos uso del *principio de superposición*, el cual nos dice que el campo eléctrico generado por N distribuciones es la suma de la contribución de cada distribución, por lo tanto podemos calcular el campo eléctrico generado por cada una de las porciones angulares, y luego sumarlos. Recordamos la definición de campo eléctrico para una densidad superficial de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\sigma}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS$$

En esta expresión $\vec{r}$ es el punto del espacio en donde queremos obtener el campo eléctrico, $\vec{r}'$ es el vector que parametriza nuestra distribución de carga (es decir, indica la posición de un punto arbitrario del sector angular), y dS es el diferencial de superficie asociado a nuestra parametrización. En este caso, como queremos el campo a una altura h por sobre el origen, tendremos que $\vec{r} = h\hat{k}$, mientras que, al estar nuestras porciones angulares en el plano XY, podemos usar coordenadas polares para parametrizarlas, es decir, $\vec{r}' = r\hat{\rho}$, donde r y $\hat{\rho}$ son la coordenada radial y el vector unitario radial, respectivamente. Como trabajamos en coordenadas polares, tendremos que $dS = rdrd\theta$, donde $r \in [0,R]$ y $\theta \in \left[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right]$ para el sector que está en el eje x y $\theta \in \left[\frac{\pi-\alpha}{2},\frac{\pi+\alpha}{2}\right]$ para el sector que está en el eje y. Partiremos calculando el campo generado por la sección que está en el eje x, entonces:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{(h\hat{k}-r\hat{\rho})\sigma_0 r^2}{R|h\hat{k}-r\hat{\rho}|^3}d\theta dr$$

Como $\hat{k}$ y $\hat{\rho}$ son vectores unitarios de la misma base (cilíndrica), podemos calcular el módulo directamente como la raíz cuadrada de la suma de las componentes al cuadrado, es decir:

$$|h\hat{k} - r\hat{\rho}| = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{E}_1(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{(h\hat{k} - r\hat{\rho})r^2}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr$$

$$\Rightarrow \ \vec{E}_1(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{hr^2\hat{k}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr - \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^3\hat{\rho}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr\right] \tag{1}$$

Desarrollemos la primera integral. Notemos que nada depende del ángulo θ, por lo tanto podemos integrar en ese ángulo y obtendremos $\frac{\alpha}{2} - (-\frac{\alpha}{2}) = \alpha$. Por otro lado como el vector $\hat{k}$ es constante (no cambia su dirección) entonces:

$$I_1 = \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{hr^2\hat{k}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr = h\alpha\hat{k}\int_0^R \frac{r^2}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

Podemos resolver este tipo de integrales[1] usando una sustitución hiperbólica del tipo $r = h\sinh(u)$, donde:

$$dr = h\cosh(u)du \quad ; \quad r = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \quad ; \quad r = R \ \Rightarrow \ u = \sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)$$

Entonces:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{k}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \frac{h^2\sinh^2(u)}{h^3(1+\sinh^2(u))^{\frac{3}{2}}} h\cosh(u)du$$

Usamos la identidad hiperbólica $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$, entonces notamos que $1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u)$, de esta forma:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{k}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \frac{h^2\sinh^2(u)}{h^3\cosh^3(u)} h\cosh(u)du = h\alpha\hat{k}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \tanh^2(u)du$$

Usando la identidad hiperbólica $\tanh^2(u) = 1 - \text{sech}^2(u)$, entonces:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{k}\left[\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} du - \int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \text{sech}^2(u)du\right]$$

Notamos que ambas integrales son directas (recordando que la integral de $\text{sech}^2(u) = \tanh(u)$), entonces:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{k}\left[\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - 0\right) - \left(\tanh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right) - \tanh(0)\right)\right]$$

[1]En el caso en que uno de los límites de la integral tienda a infinito se usa un cambio de variable con $\tan(u)$.

$$\Rightarrow \; I_1 = h\alpha\hat{k}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{\sinh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right)}{\cosh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right)}\right]$$

Por definición de función inversa tendremos que $\sinh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right) = \frac{R}{h}$, mientras que, por otro lado, es posible demostrar[2] la siguiente propiedad:

$$\cosh\left(\sinh^{-1}(x)\right) = \sqrt{x^2+1}$$

Entonces, aplicando a nuestro resultado, tenemos finalmente que:

$$\Rightarrow \; I_1 = h\alpha\hat{k}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{\frac{R}{h}}{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+1}}\right] \;\Rightarrow\; I_1 = h\alpha\hat{k}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right] \tag{2}$$

Ahora debemos calcular la segunda integral de la expresión (1), es decir:

$$I_2 = \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^3\hat{\rho}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr$$

Dentro de la integral lo único que depende del ángulo es el vector unitario $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$, donde los vectores de la base cartesiana $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son constantes, por lo tanto pueden salir de la integral. Entonces:

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \hat{\rho} d\theta = \hat{\imath}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\theta)d\theta + \hat{\jmath}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \sin(\theta)d\theta$$

Como el seno es una función impar y se está integrando en un dominio simétrico, entonces la integral asociada a $\sin(\theta)$ se anula. Entonces:

$$\Rightarrow \; \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \hat{\rho} d\theta = \hat{\imath}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \hat{\imath}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \; \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \hat{\rho} d\theta = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\imath}$$

Entonces, reemplazando en la integral I_2:

$$\Rightarrow \; I_2 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\imath}\int_0^R \frac{r^3}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

Ahora, para resolver la integral con respecto a r usaremos el cambio de variable $u = h^2 + r^2$, de tal forma que:

$$du = 2rdr \;\Rightarrow\; dr = \frac{du}{2r} \quad ; \quad r = 0 \;\Rightarrow\; u = h^2 \quad ; \quad r = R \;\Rightarrow\; u = h^2 + R^2$$

Entonces:

[2] Ver anexo al final de este documento.

$$\Rightarrow\; I_2 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\imath}\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{r^3}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{2r}$$

Notamos que el r del denominador se cancela con un r del numerador, mientras que usando el cambio de variable sabemos que $r^2 = u - h^2$, entonces:

$$\Rightarrow\; I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\imath}\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{u-h^2}{u^{\frac{3}{2}}}du$$

Separamos las integrales, y entonces:

$$\Rightarrow\; I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\imath}\left[\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{u}{u^{\frac{3}{2}}}du - \int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{h^2}{u^{\frac{3}{2}}}du\right] \Rightarrow I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\imath}\left[\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} - h^2\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Podemos integrar directamente estas expresiones, entonces:

$$\Rightarrow\; I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\imath}\left[2\left(\sqrt{R^2+h^2}-\sqrt{h^2}\right)+2h^2\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}-\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)\right]$$

Como escogemos $h > 0$ entonces $\sqrt{h^2} = |h| = h$, entonces desarrollando un poco la expresión anterior llegaremos a:

$$\Rightarrow\; I_2 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)\hat{\imath} \tag{3}$$

Entonces, reemplazando las expresiones para I_1 e I_2 encontradas en (2) y (3) (respectivamente) en la expresión para el campo eléctrico $\vec{E}_1$ encontrada en (1), tendremos que el campo eléctrico generado por la sección angular que está en el eje x es:

$$\vec{E}_1(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)\hat{\imath} + h\alpha\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\hat{k}\right] \tag{4}$$

Vemos que, efectivamente, la dirección es la discutida en la parte (a). Ahora, por simetría notemos que al calcular el campo eléctrico para la otra sección angular aparecerán las mismas integrales, y lo único que cambiará será la dirección en la cual apunte el campo eléctrico, dado que ahora integraríamos entre $\frac{\pi-\alpha}{2}$ y $\frac{\pi+\alpha}{2}$ el vector $\hat{\rho}$, es decir:

$$\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{\rho}d\theta = \hat{\imath}\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\cos(\theta)d\theta + \hat{\jmath}\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\sin(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow\; \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{\rho}d\theta = \hat{\imath}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \hat{\jmath}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\; \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{\rho}d\theta = \hat{\imath}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \hat{\jmath}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\; \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{\rho}d\theta = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\jmath}$$

Entonces, podemos concluir que:

$$\vec{E}_2(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)\hat{\jmath} + h\alpha\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\hat{k}\right] \tag{5}$$

Entonces, sumando los resultado encontrado en las expresiones (4) y (5) tendremos que el campo eléctrico total generado por nuestra distribución de carga a una altura h del origen es:

$$\boxed{\vec{E}(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)(\hat{\imath}+\hat{\jmath}) + 2h\alpha\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\hat{k}\right]}$$

Notemos que en el caso $h = 0$ el campo eléctrico sólo posee dirección $-(\hat{\imath}+\hat{\jmath})$, es decir, tiene dirección planar, lo cual tiene sentido y concuerda con lo discutido en la parte (a).