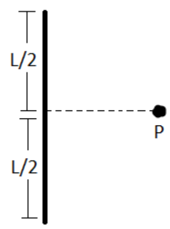
FI2002-7 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

Desarrollo Auxiliar 2: Campo eléctrico (parte 2).

01 de Septiembre del 2021

P1. Campo eléctrico de un alambre finito:

a) El sistema de nuestra pregunta es algo así:



Para una densidad de carga lineal, el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r'})\lambda}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dl$$

En esta expresión $\vec{r}$ representa el punto donde queremos encontrar el campo eléctrico, $\vec{r'}$ es el vector que parametriza nuestra distribución de carga (es decir, es la posición de un punto arbitrario del alambre), y dl es el diferencial de línea asociado a nuestra parametrización. En este caso como queremos el campo eléctrico en algún punto arbitrario del plano XY, podemos decir que $\vec{r} = r\hat{\rho}$ en coordenadas polares (donde implícitamente estarán x e y), por otro lado notemos que $\vec{r'} = z\hat{k}$, con $z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, puesto que estamos recorriendo una línea que está justo en el eje z. Finalmente, notemos que $dl = dz$, ya que es el diferencial que está asociado a nuestra parametrización. De esta forma tendremos que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(r\hat{\rho}-z\hat{k})\lambda}{|r\hat{\rho}-z\hat{k}|^3}dz$$

Como $\hat{k}$ y $\hat{\rho}$ son vectores unitarios de la misma base (cilíndrica), podemos calcular el módulo directamente como la raíz cuadrada de la suma de las componentes al cuadrado, es decir:

$$|h\hat{k}-r\hat{\rho}| = \sqrt{h^2+r^2}$$

Reemplazando y reordenando, tendremos:

$$\Rightarrow\ \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(r\hat{\rho}-z\hat{k})}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz \ \Rightarrow\ \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{r\hat{\rho}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z\hat{k}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz\right]$$

Notemos que estamos integrando con respecto a z en un intervalo simétrico. La integral asociada a $z\hat{z}$ es la integral de una función impar en un dominio simétrico, entonces tendremos que:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z\hat{k}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz = 0$$

Por otro lado, la integral asociada a $r\hat{\rho}$ no depende de un ángulo (es decir, $\hat{\rho}$ es constante para esta integral), además es una integral de una función par asociada a un dominio simétrico, por lo tanto podemos integral entre 0 y $\frac{L}{2}$ multiplicando la integral por dos, de esta forma:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{2\lambda r\hat{\rho}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dz}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para resolver esta integral usamos un cambio de variable hiperbólico $z = r\sinh(u)$, donde:

$$dz = r\cosh(u)du \quad ; \quad z=0 \Rightarrow u=0 \quad ; \quad z=\frac{L}{2} \Rightarrow u=\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)$$

Entonces:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda r\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)} \frac{r\cosh(u)}{r^3(1+\sinh^2(u))^{\frac{3}{2}}}du$$

Usamos la identidad hiperbólica $\cosh^2(u)-\sinh^2(u)=1$, entonces notamos que $1+\sinh^2(u)=\cosh^2(u)$, de esta forma:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda r\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)} \frac{r\cosh(u)}{r^3\cosh^3(u)}du$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)} \frac{du}{\cosh^2(u)} = \frac{\lambda\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0 r}\left[\tanh(u)\right]\Big|_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)}$$

Recordamos que[1]:

$$\tanh(0)=0 \quad ; \quad \tanh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)\right) = \frac{L}{\sqrt{L^2+4r^2}}$$

Entonces, reemplazando, tendremos que el campo eléctrico generado por este alambre finito en el plano XY es:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda L\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{L^2+4r^2}}$$

Recordando que $r=\sqrt{x^2+y^2}$, entonces obtenemos el campo eléctrico en la posición (x,y):

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(x,y) = \frac{\lambda L\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{L^2+4(x^2+y^2)}}}$$

b) Recordamos la expresión que obtuvimos con la coordenada r:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda L\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{L^2+4r^2}}$$

Si $r >> L$ entonces $4r^2 >> L^2$, de esta forma podemos ignorar el término L^2 dentro de la raíz, de tal forma que:

$$\Rightarrow \vec{E}(r) \approx \frac{\lambda L\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{4r^2}} = \frac{\lambda L\hat{\rho}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

[1] Para el cálculo del factor $\tanh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)\right)$ deben apoyarse en el anexo del desarrollo de la clase auxiliar 1.

Por último, la carga total de nuestra línea será $Q = \lambda L$, dado la definición de densidad lineal de carga, entonces:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) \approx \frac{Q\hat{\rho}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Notamos entonces que recuperamos el campo eléctrico para una carga puntual, lo cual tiene sentido si pensamos que al movernos muy lejos de nuestra línea finita, esta se verá como una carga puntual (su largo será despreciable).

P2. Planos infinitos cruzados:

Aprovecharemos el principio de superposición, es decir, vamos a calcular el campo eléctrico generado por cada uno de los planos, y luego sumaremos sus contribuciones para encontrar el campo eléctrico total. Partiremos con el plano que es paralelo al plano XY. Existen diversas formas de calcular el campo eléctrico de un plano infinito, acá discutiremos dos:

I) **Por integración directa**:

Por definición de campo eléctrico, para una distribución superficial de carga σ tendremos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\sigma}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dS \tag{1}$$

Donde $\vec{r}$ es el punto donde queremos encontrar el campo eléctrico, $\vec{r}'$ es el vector que parametriza nuestra distribución de carga (es decir, es la posición de un punto arbitrario del plano), σ es la densidad superficial de carga, y dS es el diferencial de superficie de nuestra distribución. A pesar de que podemos hacer este ejercicio usando $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ en coordenadas cartesianas, las integrales involucradas se vuelven más manejables si usamos coordenadas polares.

Primero, notemos que por simetría el campo eléctrico NO puede depender de las coordenadas x o y, ya que donde sea que nos paremos en este plano infinito estaremos viendo la misma imagen hacia cualquier lado, entonces, podría depender a lo más de la altura medida desde el plano, entonces tendremos que $\vec{r} = z\hat{k}$. Por otro lado, notemos que como el plano es paralelo al plano XY podemos usar la coordenada polar r para recorrerlo completamente, entonces, $\vec{r}' = r\hat{\rho}$ y $dS = rdrd\theta$, donde $r \in [0,\infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Entonces, reemplazando en la expresión (1) para el campo eléctrico, tendremos que:

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{(z\hat{k}-r\hat{\rho})}{|z\hat{k}-r\hat{\rho}|^3}\sigma r d\theta dr$$

Recordamos que $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$, entonces:

$$|z\hat{k}-r\hat{\rho}| = |z\hat{k} - r\cos(\theta)\hat{\imath} - r\sin(\theta)\hat{\jmath}| = \sqrt{z^2 + r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)}$$
$$\Rightarrow\ |z\hat{k}-r\hat{\rho}| = \sqrt{z^2+r^2}$$

Entonces:

$$\Rightarrow\ \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{z\hat{k}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}rdrd\theta - \int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r\hat{\rho}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}rdrd\theta\right]$$

Desarrollemos la parte angular de la segunda integral:

$$\int_0^{2\pi}\hat{\rho}d\theta = \int_0^{2\pi}\cos(\theta)d\theta\hat{\imath} + \int_0^{2\pi}\sin(\theta)d\theta\hat{\jmath}$$

Ya que $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son constantes (no cambian su dirección ni sentido) estos pueden salir de las integrales. Por otro lado las funciones trigonométricas $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ integradas en un período completo (es decir, en un intervalo de tamaño 2π) dan como resultado una integral nula, y entonces:

$$\Rightarrow\ \int_0^{2\pi}\hat{\rho}d\theta = 0$$

Entonces el campo eléctrico $\vec{E}$ es:

$$\Rightarrow \ \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{z\hat{k}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}rdrd\theta$$

Integramos con respecto al ángulo y sacamos de la integral el término $z\hat{k}$, ya que es una constante con respecto a la variable de integración r, entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{E}(z) = \frac{2\pi\sigma z\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr \tag{2}$$

Podemos resolver esta integral usando el cambio de variable $u = z^2 + r^2$, con lo cual:

$$du = 2rdr \ \Rightarrow \ dr = \frac{du}{2r}$$

$$r = 0 \ \Rightarrow \ u = z^2 \quad ; \quad r \to \infty \ \Rightarrow \ u \to \infty$$

Entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{k}}{2\varepsilon_0}\int_{z^2}^\infty\frac{r}{2ru^{\frac{3}{2}}}du = \frac{\sigma z\hat{k}}{4\varepsilon_0}\int_{z^2}^\infty\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \ \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{k}}{4\varepsilon_0}\left(-2\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\Bigg|_{z^2}^\infty = -\frac{\sigma z\hat{k}}{2\varepsilon_0}\left(\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)$$

Vemos que el límite se anula, mientras que usamos que $\sqrt{z^2} = |z|$, entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0|z|}\hat{k}$$

Podemos notar que el término $\frac{z}{|z|}$ es simplemente el signo de la coordenada z, lo cual nos dice que el campo eléctrico siempre sale del plano infinito (ya que σ es positivo), entonces será positivo en las alturas positivas, y negativo en alturas negativas, así:

$$\Rightarrow \ \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & ; \quad z \geq 0 \\ \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & ; \quad z \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Es interesante notar que el campo eléctrico que genera el campo infinito es uniforme (no depende de la posición), lo cual tiene sentido si pensamos que, al alejarnos, sólo estamos encontrando más puntos del plano en el horizonte, con lo cual jamás dejamos de ver el plano infinito como tal.

II) **Usando el campo eléctrico de un anillo**:
El campo eléctrico generado por un anillo de radio R y densidad lineal de carga λ en una altura z está dado por[2]:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

[2]El desarrollo para esta distribución de carga puede consultarse en `http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/anillo/anillo.htm`

Notemos que al sumar infinitos anillos infinitesimales con radios desde $r = 0$ hasta $r \to \infty$ estaremos construyendo un plano infinito[3]. Si usamos $R = r$ (ahora variable) y usamos que la carga q del anillo es simplemente λ por el perímetro, es decir, $q = 2\pi r\lambda$, entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{2\pi r\lambda z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k} \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

Si tomamos un pequeño diferencial de carga, tendremos que:

$$d\vec{E} = \frac{zdq}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

Donde ahora tomamos $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$, entonces:

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{\sigma z\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta$$

Integramos para obtener el campo eléctrico:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta dr$$

Integramos en el ángulo, y entonces tendremos que:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{k}}{2\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr$$

Notamos que obtenemos la misma integral que en (2), por lo tanto, el desarrollo de acá en adelante es análogo a lo que hicimos anteriormente.

Con lo demostrado anteriormente (campo eléctrico de un plano infinito es constante), tendremos que la magnitud (con el signo de la carga) de los campos eléctricos es:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad E_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Donde el subíndice 1 hace referencia al plano paralelo a XY, y el subíndice 2 hace referencia al plano inclinado en un ángulo α (el cual es negativo porque la densidad es $-\sigma$). Ahora, la dirección del campo de cada plano es perpendicular al plano correspondiente, por lo tanto está claro que para el plano 1 la dirección es $\pm\hat{k}$ dependiendo en qué lado del plano nos encontremos, mientras que para el plano 2 debemos encontrar el vector normal con geometría a partir de lo mostrado en la Figura 1. Notamos que:

$$\hat{c} = -\sin(\alpha)\hat{i} + \cos(\alpha)\hat{k}$$

Entonces, $\mp\hat{c}$ será la dirección del campo eléctrico $\vec{E}_2$. Ahora, notemos que por la naturaleza de la dirección de los campos tendremos combinaciones distintas en los signos de $\hat{k}$ y $\hat{c}$ cuando estemos en distintas zonas del sistema, tal como se ilustra en la Figura 2. Entonces, calculemos los campos en cada caso partiendo por el cuadrante (I):

$$\vec{E}_I = E_1\hat{z} + E_2(-\hat{c}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\hat{z}+\hat{c}) \Rightarrow \vec{E}_I = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1+\cos(\alpha))\hat{z}) \tag{4}$$

[3] Con la misma estrategia, pero integrando hasta $r = R$, se puede encontrar el campo eléctrico de un disco de radio R

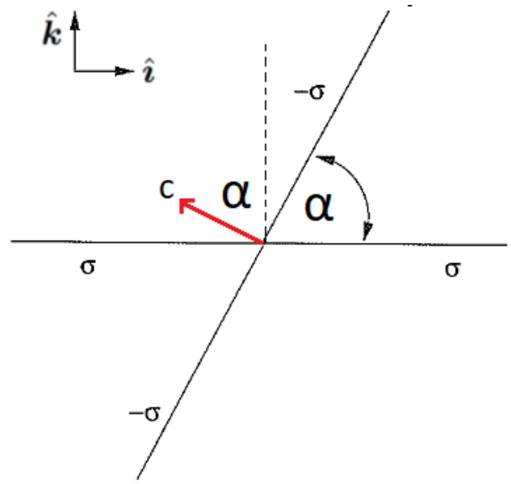


Figura 1: Dirección normal al plano inclinado.

Para el cuadrante (II):

$$\vec{E}_{II} = E_1\hat{z} + E_2\hat{c} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\hat{z} - \hat{c}) \;\Rightarrow\; \vec{E}_{II} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1 - \cos(\alpha))\hat{z}) \tag{5}$$

Para el cuadrante (III):

$$\vec{E}_{III} = E_1(-\hat{z}) + E_2\hat{c} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{z} - \hat{c}) \;\Rightarrow\; \vec{E}_{III} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1 + \cos(\alpha))\hat{z}) \tag{6}$$

Por último, para el cuadrante (IV):

$$\vec{E}_{IV} = E_1(-\hat{z}) + E_2(-\hat{c}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{z} + \hat{c}) \;\Rightarrow\; \vec{E}_{IV} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1 - \cos(\alpha))\hat{z}) \tag{7}$$

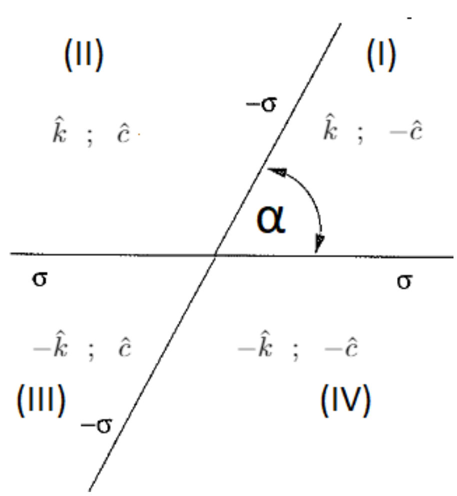


Figura 2: Diferencia de signo para los vectores $\hat{c}$ y $\hat{k}$.

Entonces, resumiendo tendremos que:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1+\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z > 0 \ , \ c < 0 \\ \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1-\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z > 0 \ , \ c > 0 \\ \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1+\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z < 0 \ , \ c > 0 \\ \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1-\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z < 0 \ , \ c < 0 \end{cases}}$$