FI3106-1 Electrodinámica
Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliar: Nicolás Parra
Ayudante: Lucas González

Pauta Examen

P2. **(a)** Si la lámina se ha movido desde siempre, las ecuaciones de Maxwell estacionarias son válidas,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{2}$$

Donde

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sigma v \delta(z)\hat{y} \tag{3}$$

Notemos que como la lámina es infinita y tiene densidad uniforme, tenemos simetría respecto a traslaciones en las direcciones $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Esto implica que $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(z)$. La regla de la mano derecha nos sugiere que $\vec{B}(z) = B(z)\hat{x}$, y como debe cumplirse arriba y abajo del plano se tiene $\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)$. Podemos determinar la forma del campo mediante la ley de Ampere considerando un circuito rectangular paralelo al plano xz, de altura $2z$, largo l y centrado en $z = 0$. Solo contribuyen a la integral los caminos paralelos la plano $z = 0$ y se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}l = \int_0^l B(z)\,\mathrm{d}x + \int_l^0 B(-z)\,\mathrm{d}x = 2lB(z) \tag{4}$$

$$= \mu_0 l \sigma v \tag{5}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 \sigma v}{2}\hat{x} & z > 0 \\ -\dfrac{\mu_0 \sigma v}{2}\hat{x} & z < 0 \end{cases} \tag{6}$$

(b) En la nueva situación, debemos trabajar con las ecuaciones de Maxwell completas. Para nuestra suerte, sabemos que en el Gauge de Lorenz tenemos una fórmula bien bonita para el potencial vector

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t - |\vec{r}-\vec{r'}|/c)}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{7}$$

Como aún conservamos la simetría de traslación en el plano xy, podemos afirmar que solo hay dependencia en z y el timepo $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(z,t)$. Determinar $\vec{J}$ s sencillo: para $t < 0$ no hay corriente, y para $t > 0$ la corriente es la descrita en (3). Es decir

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \begin{cases} \sigma v \delta(z)\hat{y} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \sigma v \delta(z)\Theta(t)\hat{y} \tag{8}$$

donde $\Theta(t)$ es la función escalón de Heaviside. Ingresando esto en la fórmula (evaluada en $\vec{r} = z\hat{z}$)

$$\begin{aligned} \vec{A}(z,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\sigma v \int \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z' \, \delta(z') \frac{\Theta(t - |\vec{r}-\vec{r'}|/c)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\hat{y} && (9) \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{4\pi}\int \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \frac{\Theta(t - \sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}/c)}{\sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}}\hat{y} && (10) \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{4\pi}\int \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \rho \frac{\Theta(t - \sqrt{z^2+\rho^2}/c)}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\hat{y} && (11) \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}\rho \, \frac{\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\Theta\left(t - \frac{\sqrt{z^2+\rho^2}}{c}\right)\hat{y} && (12) \end{aligned}$$

Ahora nos queremos deshacer de la función de Heaviside. Esta función es distinta de 0 solo si su argumento es positivo. De inmediato deducimos que $\vec{A}$ es distinto de 0 solo para $t > 0$. Asumiendo esto, también se debe cumplir la condición:

$$\begin{aligned} ct &> \sqrt{z^2+\rho^2} && (13) \\ \implies c^2t^2 &> z^2+\rho^2 && (14) \\ \implies \rho &< \sqrt{c^2t^2 - z^2} && (15) \end{aligned}$$

Para que esto tenga sentido es necesario que $|z| < c|t|$. Vamos a incluir esto en el potencial vector agregando un factor $\Theta(ct - |z|)$ (notemos que esto asegura que $t > 0$). La condición (15) restringe los valores de ρ, modificando los límites de integración. De esta manera

$$\begin{aligned} \vec{A}(z,t) &= \frac{\mu_0 \sigma v}{2}\Theta(ct - |z|) \int\limits_0^{\sqrt{c^2t^2 - z^2}} \mathrm{d}\rho \, \frac{\rho}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\hat{y} && (16) \\ &= \frac{\mu_0 \sigma v}{2}\Theta(ct - |z|)\,(ct - |z|)\,\hat{y} && (17) \end{aligned}$$

(c) Asumiré $z > 0$ por simplicidad. El campo magnético será

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{x} \tag{18}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma v}{2}\Theta(ct - z)\hat{x} + \frac{\mu_0 \sigma v}{2}(ct - z)\delta(ct - z)\hat{x} \tag{19}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma v}{2}\Theta(ct - z)\hat{x} \tag{20}$$

Para el campo eléctrico también consideramos la contribución de σ, que es el cálculo electrostático usual:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{21}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} - \frac{\mu_0 \sigma v}{2}c\Theta(ct - z)\hat{y} - \frac{\mu_0 \sigma v}{2}\delta(ct - z)c(ct - z)\hat{y} \tag{22}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} - \frac{\mu_0 \sigma v}{2}c\Theta(ct - z)\hat{y} \tag{23}$$

Para el caso $z < 0$ se reemplaza $z \to -z$, $\vec{B}$ cambia de signo y E_y se mantiene igual.

P3. (a) En la zona de radiación, podemos usar la siguiente expresión para el potencial vector

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathrm{d}^3 r'\, \vec{J}(\vec{r'}, t - |\vec{r} - \vec{r'}|/c) \tag{24}$$

Podemos describir la distribución de carga y corriente en coordenadas esféricas como

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(r-a)\frac{\delta(\phi - \Omega_0 t)\delta(\theta - \pi/2)}{r^2 \sin\theta} \tag{25}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{v}\rho(\vec{r}, t) = qa\Omega_0\delta(r-a)\frac{\delta(\phi - \Omega_0 t)\delta(\theta - \pi/2)}{r^2 \sin\theta}\hat{\phi} \tag{26}$$

Notemos que el argumento temporal viene en la combinación $\Omega_0 t$, lo que significa que en (24) tendremos la expresión $\frac{\Omega_0}{c}|\vec{r} - \vec{r'}|$. Si consideramos que $\Omega_0 a \ll c$ y $r' \sim a$, podemos hacer la aproximación:

$$\frac{\Omega_0}{c}|\vec{r} - \vec{r'}| = \sqrt{\left(\frac{\Omega_0 r}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_0 r'}{c}\right)^2 - 2\frac{\Omega_0 r}{c}\frac{\Omega_0 r'}{c}\hat{r}\cdot\hat{r'}} \sim \frac{\Omega_0}{c} r \tag{27}$$

Esto nos aproximar el potencial vector en la zona de radiación como

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathrm{d}^3 r'\, \vec{J}(\vec{r'}, t - r/c) && (28)\\
&= \frac{\mu_0 q\Omega_0 a}{4\pi r}\int \mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{d}\theta'\,\delta(r'-a)\delta(\phi' - \Omega_0 t + \Omega_0 r/c)\delta(\theta' - \pi/2)\hat{\phi} && (29)\\
&= \frac{\mu_0 q\Omega_0 a}{4\pi r}\int \mathrm{d}\phi'\,\delta(\phi' - \Omega_0 t + \Omega_0 r/c)(-\sin\phi'\ \hat{x} + \cos\phi'\ \hat{y}) && (30)\\
&= \frac{\mu_0 q\Omega_0 a}{4\pi r}\left[-\sin(\Omega_0(t - r/c))\ \hat{x} + \cos(\Omega_0(t - r/c))\ \hat{y}\right] && (31)\\
&= \frac{\mu_0 q\Omega_0 a}{4\pi r}[\ (-\sin(\Omega_0 t_r)\sin\theta\cos\phi + \cos(\Omega_0 t_r)\sin\theta\sin\phi)\hat{r}\\
&\qquad (-\sin(\Omega_0 t_r)\cos\theta\cos\phi + \cos(\Omega_0 t_r)\cos\theta\sin\phi)\hat{\theta}\\
&\qquad\qquad (\sin(\Omega_0 t_r)\sin\phi + \cos(\Omega_0 t_r)\cos\phi)\hat{\phi}\ ] && (32)\\
&= \frac{\mu_0 q\Omega_0 a}{4\pi r}\left[\sin\theta\sin(\phi - \Omega_0 t_r)\hat{r} + \cos\theta\sin(\phi - \Omega_0 t_r)\hat{\theta} + \cos(\phi - \Omega_0 t_r)\hat{\phi}\right] && (33)
\end{aligned}$$

donde $t_r = t - r/c$. Tomando el rotor y conservando solo los términos con dependencia $1/r$

$$\begin{aligned}
\vec{B} = \nabla\times\vec{A} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\hat{\phi} + \text{terminos}\ \frac{1}{r^2} && (34)\\
&= \frac{\mu_0 q\Omega_0 a}{4\pi r}\frac{\Omega_0}{c}\left(\sin(\phi - \Omega_0 t_r)\hat{\theta} + \cos\theta\cos(\phi - \Omega_0 t_r)\hat{\phi}\right) && (35)
\end{aligned}$$

Para obtener el campo eléctrico en la zona de radiación utilizamos la relación (ver Jackson sección 9.2):

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= Z_0\vec{H}\times\hat{r} && (36)\\
&= \frac{Z_0 q\Omega_0^2 a}{4\pi c r}\left(\cos\theta\cos(\phi - \Omega_0 t_r)\hat{\theta} - \sin(\phi - \Omega_0 t_r)\hat{\phi}\right) && (37)
\end{aligned}$$

(b) La potencia radiada por unidad de ángulo sólido se obtiene mediante

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = r^2\hat{r}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) \tag{38}$$

$$= Z_0\left(\frac{q\Omega_0^2 a}{4\pi c}\right)^2\Big(\cos^2\theta\cos^2(\phi-\Omega_0 t_r)+\sin^2(\phi-\Omega_0 t_r)\Big) \tag{39}$$

Promediando sobre un periodo

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle = \frac{Z_0}{2}\left(\frac{q\Omega_0^2 a}{4\pi c}\right)^2\Big(1+\cos^2\theta\Big) \tag{40}$$

Y la potencia total radiada es

$$\langle P\rangle = \frac{Z_0}{2}\left(\frac{q\Omega_0^2 a}{4\pi c}\right)^2\int \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\sin\theta\Big(1+\cos^2\theta\Big) \tag{41}$$

$$= \frac{Z_0}{2}\left(\frac{q\Omega_0^2 a}{4\pi c}\right)^2\frac{16\pi}{3} \tag{42}$$

$$= \frac{Z_0 q^2\Omega_0^4 a^2}{6\pi c^2} \tag{43}$$

$$= \frac{q^2\Omega_0^4 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{44}$$

donde $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 1/\epsilon_0 c$ es la impedancia del vacío. Este resultado coincide con el que se encuentra usando la fórmula de Larmor.