GF5017 - Geodesia Aplicada a la Tectónica Activa

Repaso de Conceptos Básicos de Álgebra Lineal

Versión Abril 2020

Preparado por
Francisco Hernán Ortega Culaciati (ortega.francisco@uchile.cl)
Departamento de Geofísica
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

1. Álgebra Lineal

En esta sección se plantean definiciones básicas del álgebra lineal, de operaciones y propiedades vectoriales y matriciales. A modo de ejemplo, estas definiciones permiten plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

1.1. Definición de vector

Se llama vector $\mathbf{V}$ de dimensión n a una tupla de n números reales, llamados componentes del vector. El conjunto de todos los vectores posibles de dimensión n se denomina $I\!R^n$. Luego un vector $\mathbf{V} \in I\!R^n$ se representa como

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

1.2. Definición de espacio vectorial lineal

Sea $F \in I\!R$ un campo escalar y $\mathbf{V} \in I\!R^n$ un conjunto de n elementos $V_i \in I\!R$. Un espacio vectorial lineal sobre F es un conjunto de elementos $\mathbf{V}$ junto a una función llamada "adición" que transforma valores en el dominio $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ a valores en el rango $\mathbf{V}$; y una función llamada "multiplicación escalar" que transforma valores en el dominio $F \times \mathbf{V}$ a valores en el rango $\mathbf{V}$, que satisfacen las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in \mathbf{V}$ y para todo $\alpha, \beta \in F$

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
3. Existe $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$
4. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ existe un elemento $-\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
7. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = \alpha\beta\mathbf{x}$
8. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

1.3. Definición de matriz

Se denomina una matriz $\mathbf{A}$ de dimensiones $n \times m$ (n por m), denotada por $\mathbf{A}_{n\times m}$, a un arreglo bidimensional de números reales A_{ij}, llamadas componentes de la matriz. La representación de la matriz es de la forma

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

En A_{ij}, el primer índice (i) indica la fila y el segundo índice (j) indica la columna de la matriz $\mathbf{A}$. Notar que los índices de la matriz son números naturales, es decir, $i, j \in I\!N$.

Las matrices tienen múltiples aplicaciones, entre los cuales se puede destacar, por ejemplo, para representar los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales o para definir transformaciones lineales de un sistema de coordenadas a otro.

En particular, un vector de dimensión n se puede entender como una matriz de dimensiones $n \times 1$, con la salvedad que en el caso de matrices se puede hablar de un **vector columna** $\mathbf{a}$ o un **vector fila** $\mathbf{b}$ de dimensión n como se muestra a continuación,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{vector columna;} \qquad \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n] \quad \leftarrow \text{vector fila} \tag{3}$$

1.4. Operaciones básicas

1.4.1. Producto interno entre dos vectores

Sean los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in I\!R^n$. Se define el producto interno entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como la función que toma dos vectores de $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$y entrega un valor en la recta real $I\!R$,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \tag{4}$$

Este producto entre dos vectores se conoce también como "producto escalar", o "producto punto". Notar que el producto interno es conmutativo, es decir, que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ y que el producto interno entre dos vectores se puede interpretar también como el tamaño de la proyección de un vector en otro.

1.4.2. Norma de un vector

Se define la norma euclidiana de un vector $\mathbf{a} \in I\!R^n$ como:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \tag{5}$$

La norma euclidiana de un vector define el "tamaño" o longitud de un vector.

1.4.3. Ángulo entre dos vectores

El ángulo θ entre dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I\!R^n$, se define como:

$$cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \qquad \text{ó} \qquad \theta = \text{acos}\left(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\right) \tag{6}$$

donde cos() es la función trigonométrica coseno, y acos() es la función arcoseno (la función inversa de la función coseno).

1.4.4. Producto cruz o producto vectorial entre dos vectores

Sean los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in I\!R^3$. Se define el producto vectorial o producto cruz entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como la función $\mathbf{w}$ que toma dos vectores de $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ y entrega un vector en $\mathbf{V}$, tal que:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Se tiene que el producto vectorial no es conmutativo. De hecho, es válida la siguiente identidad:

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \tag{8}$$

1.4.5. Identidades que involucran el producto interno y el producto vectorial

Sean los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in I\!R^3$, se tiene las siguientes identidades y/o propiedades:

1. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son dos vectores ortogonales (i.e., el ángulo entre los dos vectores es de 90 grados sexagesimales), se tiene que $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= 0$
2. $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$
3. $\langle \mathbf{a}, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \rangle = 0$, es decir, el producto vectorial entre dos vectores es ortogonal a ambos vectores
4. Si $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, esto es equivalente a que los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos entre sí (i.e., el ángulo entre ellos es cero)
5. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{a} \in I\!R^n$
6. El producto vectorial no es asociativo, es decir, $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$
7. El producto vectorial es asociativo con respecto a un factor escalar $\lambda \in I\!R$, es decir, se tiene la identidad $\lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\lambda\mathbf{b})$
8. $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)^2}$
9. $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| sin\theta$ donde θ es el ángulo menor entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$

1.4.6. Suma de matrices

La suma de matrices se define para dos matrices de igual dimensiones $n \times m$. Sean $\mathbf{A}_{n\times m}$ y $\mathbf{B}_{n\times m}$ dos matrices de igual dimensiones, la matriz $\mathbf{C}$ que resulta de la suma de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tiene dimensiones $n \times m$ y se define como la suma de las componentes respectivas de las matrices, es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ es tal que:

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \tag{9}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

La operación se define de manera similar para la suma de dos vectores, en que el vector resultante es la suma de las componentes respectivas de los vectores sumados.

1.4.7. Multiplicación de matrices

Sean las matrices $\mathbf{A}_{n\times m}$ y $\mathbf{B}_{m\times q}$, se define la multiplicación de las matrices $\mathbf{A}_{n\times m}$ y $\mathbf{B}_{m\times q}$ como la matriz de dimensiones:

$$\mathbf{C}_{n\times q} = \mathbf{A}_{n\times m}\mathbf{B}_{m\times q} \qquad \text{donde} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} \tag{10}$$

donde el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas de $\mathbf{B}$, ambos m, y $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, q$.

Notar que para el caso de la multiplicación de una matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$ por un vector columna $\mathbf{b}_{m\times 1}$, se necesita que la cantidad de columnas de $\mathbf{A}$ sea igual a la dimensión del vector $\mathbf{b}$ para hacer la multiplicación $\mathbf{Ab}$.

Además, notar que la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir, si se tiene las matrices $A_{n\times m}$ y $B_{m\times n}$, en general $(\mathbf{AB})_{n\times n} \neq (\mathbf{BA})_{m\times m}$. La igualdad sólo se cumple en el caso particular donde las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son cuadradas, de igual dimensión (i.e., $n = m$) y ambas son matrices simétricas (ver definición más adelante).

1.4.8. Matriz diagonal

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en que sólo los elementos de su diagonal son distintos de cero. Por ejemplo, una matriz diagonal de dimensión 4×4 es la siguiente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \tag{11}$$

1.4.9. Matriz Identidad

Es una matriz diagonal, denotada por la letra $\mathbf{I}$, en que los elementos de la diagonal son todos iguales a la unidad (i.e., el número entero 1). Por ejemplo, una matriz identidad de 4×4 es la siguiente:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

La matriz identidad tiene la siguiente propiedad: para una matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$, vector $\mathbf{x}_{n\times 1}$ y matriz identidad $\mathbf{I}_{n\times n}$ se cumple que:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{13}$$

$$\mathbf{xI} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x} \tag{14}$$

1.4.10. Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$, denotada por $\mathbf{A^T_{m\times n}}$, esta dada por:

$$(\mathbf{A^T})_{ij} = A_{ji} \qquad \text{donde } i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m \tag{15}$$

Por ejemplo:

$$Si \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A^T} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \tag{16}$$

Una propiedad de la trasposición de matrices: dadas las matrices $\mathbf{A}_{n\times m}$ y $\mathbf{B}_{m\times q}$, se tiene la siguiente propiedad

$$(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \mathbf{B^T A^T}$$

1.4.11. Matriz Simétrica

Una matriz $\mathbf{A}$ es simétrica si se tiene que $\mathbf{A^T} = \mathbf{A}$, es decir, que $A_{ji} = A_{ij}$.

1.4.12. Matriz Antimétrica

Una matriz $\mathbf{A}$ es antimétrica si se tiene que $\mathbf{A^T} = -\mathbf{A}$, es decir, que $A_{ji} = -A_{ij}$. Notar que los elementos de la diagonal de la matriz $\mathbf{A}$ son nulos si dicha matriz es antimétrica.

1.4.13. Matriz ortogonal

Una matriz $\mathbf{Q}_{n\times n}$ se dice matriz ortogonal, si

$$\mathbf{Q^T Q} = \mathbf{Q Q^T} = \mathbf{I}_{n\times n}$$

Se tiene la siguiente propiedad: dada una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ y un vector $\mathbf{x}$,

$$(\mathbf{Qx})^\mathbf{T}(\mathbf{Qx}) = \mathbf{x^T x}$$

Las matrices ortogonales son utilizadas para definir rotaciones del sistema de coordenadas.

1.4.14. Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$ es un número escalar denotado por $det(\mathbf{A})$ o $|A|$ en que para una matriz de 2×2 es:

$$det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc \tag{17}$$

Para una matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ se utiliza la fórmula de Laplace:

$$det\,(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} M_{ij} \qquad \text{para cualquier } i \in \{1,\ldots,n\} \tag{18}$$

donde M_{ij} es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz $\mathbf{A}$.

Por ejemplo, si se tiene una matriz $\mathbf{A}_{3\times3}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{19}$$

el determinante de dicha matriz se calcula como:

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\right) \tag{20}$$

$$= A_{11}\det\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\right) - A_{12}\det\left(\begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}\right) + A_{13}\det\left(\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}\right) \tag{21}$$

$$= A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) + A_{12}(A_{31}A_{23} - A_{21}A_{33}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}) \tag{22}$$

1.4.15. Matriz Singular

Una matriz cuadrada es singular si su determinante es cero, es decir, $det(\mathbf{A}) = 0$.

1.4.16. Matriz definida positiva

Sea una matriz cuadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$ y un vector columna $\mathbf{x}_{n\times1}$. La matriz $\mathbf{A}$ es definida positiva si para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in I\!R^n$, se tiene que:

$$\mathbf{x^T A x} > \mathbf{0}$$

Las matrices definidas positivas no son matrices singulares.

1.4.17. Definición de Matriz Inversa

Sea la matriz cuadrada y no singular $\mathbf{A}_{n\times n}$. Se define la matriz inversa de $\mathbf{A}$, denotada por $\mathbf{A^{-1}}$, como la matriz que cumple la siguiente propiedad:

$$\mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I_{n\times n}} \tag{23}$$

La matriz inversa se puede calcular usando la fórmula de los cofactores:

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{det(\mathbf{A})}\mathbf{C^T} \tag{24}$$

donde $\mathbf{C}$ es la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$, cuyos elementos son tales que:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

y M_{ij} es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz $\mathbf{A}$.

Por ejemplo, la matriz inversa de una matriz $\mathbf{A}_{2\times2}$ se calcula como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{25}$$

1.5. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Sea el sistema lineal de ecuaciones algebraicas de n ecuaciones y n incógnitas representado por:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = b_1 \tag{26}$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n = b_2 \tag{27}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{28}$$

$$A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n = b_n \tag{29}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son sus incógnitas.

El sistema de ecuaciones anterior se puede escribir de manera matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde se tiene la matriz:

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \ldots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \qquad (\text{ una matriz cuadrada de } n \times n\ ) . \tag{30}$$

y los vectores columnas de dimension n:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{31}$$

Si la matriz $\mathbf{A}$ es no singular, la solución del sistema de ecuaciones esta dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Luego, la mayor dificultad para resolver el sistema de ecuaciones lineales está en encontrar los coeficientes de $\mathbf{A}^{-1}$, es decir, calcular la matriz inversa de $\mathbf{A}$. Para ello existen numerosas técnicas, tales como:

- Fórmula de los Cofactores
- Métodos de eliminación de Gauss
- Métodos iterativos para la estimación de $\mathbf{A}^{-1}$

Asimismo, existen técnicas que permiten resolver el sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sin encontrar de manera explícita la matriz inversa de $\mathbf{A}$. El detalle de las técnicas para encontrar la solución al sistema de ecuaciones escapa el alcance de este tutorial y, por lo tanto, no serán explicadas (De hecho son parte del curso de Métodos Inversos GF5013).