Resumen Algebra y Cálculo para Opti V_1

Modelamiento y Optimización

Autor: **Matías Muñoz Flores**, matias.srs@gmail.com

1 Matrices

Una **matriz** A, de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{R}$, se representa como una tabla de doble entrada $\mathbb{R}_{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.1 suma

La suma de matrices cumple todas las propiedades normales, excepto que requiere que ambas matrices sean de la misma dimención, es decir que tengan **la misma cantidad de filas y columnas**.

1.2 multiplicación

La multiplicación de matrices se define de la siguiente manera. Dadas A $\in \mathbb{R}_{m\times r}$ y B $\in \mathbb{R}_{r\times n}$, se define $C = AB$ como

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde C$\in \mathbb{R}_{m\times n}$. Se debe notar que la coordenada $c_{\mathbf{ij}} = \sum_{k=1}^{r} a_{\mathbf{i}k} b_{k\mathbf{j}},\ \mathbf{i} = 1, \dots, m,\ \mathbf{j} = 1, \dots, n.$

Esto se traduce como que las filas de la matriz A, se multiplican, componente a componente, por las columnas de la matriz B. es decir, el producto punto entre el vector fila 1 de A, por el vector columna 1 de B, nos da la entrada 1,1 de la matriz c. El vector fila 2 de A, por el vector columna 1 de B, nos da la entrada 2,1 de la matriz c, y así sucesivamente.

ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

1.3 Propiedades producto de matrices

El producto de matrices cumple la propiedad de Asociatividad $(AB)C = A(BC)$, distributividad$A(B + C) = AB + AC$, pero no conmutatividad $(AB \neq BA)$.

Las matrices se pueden escribir con sub matrices, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a & |b & c| \\ d & |e & f| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$$

Con B y C siendo las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Lo que es bastante útil, pues el producto $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$,$b \in \mathbb{R}_m$ y $x \in \mathbb{R}_n$ se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} A_b & A_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ x_n \end{pmatrix} = A_b \cdot x_b + A_n \cdot x_n$$

O aplicando un caso aún más extremo, que $Ax = \sum_{j=1}^{n} A_j \cdot x_j$ donde A_j son las columnas de la matriz A y x_j es la componente j-ésima del vector x.

1.4 Matriz Identidad, Inversa e Invertible

Antes de partir con todas estas definiciones, se debe definir lo que es una **matriz cuadrada**. Una matriz cuadrada es la matriz que tiene la misma cantidad de filas y de columnas, es decir, pertenece al espacio $\mathbb{R}_{n\times n}$.

Dentro de las matrices cuadrada, existe una matriz particular que se conoce como **Matriz Identidad**. Esta matriz es la que se conoce como **Neutro multiplicativo** y es de la siguiente forma:

Esta de aquí es la identidad de 3x3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz cumple con la caracteristicas que son puros 1 en la diagonal, y 0 en el resto de sus entradas y además que si se multiplica una matriz cuadrada A por su identidad, obtenemos la misma matriz cuadrada A. Dado lo esto, surge la duda, si existe neutro, debería existir el inverso!.

Definimos una matriz **invertible** como una matriz A que pertenece al conjunto $\mathbb{R}_{n\times n}$ que cumple con la propiedad de que **AB=BA=I**. La matríz B tendra como nombre A^{-1} y se conocerá como **Matriz Inversa de A**.

Esta definición es bastante útil para el curso, pues a futuro, un sistema de ecuaciones tendra solución solamente si la matriz de los parámetros que acompañan a los x_i es invertible. un ejemplo de esto sería:

$$x1 + x_2 = 5$$
$$x1 = 3$$

solamente si la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene inversa, es decir, es invertible. **OBS: No toda matriz cuadrada es invertible, solamente lo serán si su determinante de distinto de 0**

1.5 Matriz Diagonal y Matriz Transpuesta

Se define **Matriz diagonal** como una matríz A que cumple la siguiente definición: $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$. Solo tiene elementos en su diagonal. Es facil notar que su inversa sería una matriz diagonal, cuyos elementos en su diagonal serían de la forma $\frac{1}{a_{ij}}$.

Se define **matriz transpuesta**de la matriz A, como A^t, a la matriz que cumple la siguiente definición.

- $(A^t)_{ij} = a_{ji}$ Es decir, la coordenada (i,j) de la matriz transpuesta es igual a la coordenada (j,i) de la matriz original.
- Si la matriz A pertenece al conjunto de las matrices $\mathbb{R}_{m\times n}$ entonces, la matriz A^t pertenece al conjunto de las matrices $\mathbb{R}_{n\times m}$

Propiedades matriz transpuesta:

- $()A^t)^t = A$
- $(AB)^t = B^t \cdot A^t$
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- La mejor manera de entender la traspuesta, es que las filas de la matriz A pasan a ser las columnos.
- Se conoce como **Matriz Simetrica** a la matriz que $A = A^t$

2 Espacios Vectoriales

Un **Espacio Vectorial** es un espacio algebraico que admite una operación interna y una externa, como también un producto punto y uno cruz. Estós últimos definidos por normas.

Los **vectores** se definen como Matrices fila, es decir de $\mathbb{R}_{n\times 1}$, y dentro de su espacio se definé lo siguiente:

- **Operación interna** es la suma de vectores, donde se suma coordenada a coordenada.
- **Operación externa** que es el producto entre un vector y un escalar
- **neutro** que corresponde al vector 0 del espacio.
- **Composición Interna**, es decir operatoria de vectores que genera un escalar, esta la conoceremos como **producto punto**
- **Sub espacios vectoriales** Se comporta como un espacio vectorial, con las mismas propiedades, excepto que este es cerrado dentro de sus operaciones internas y externas.

2.1 Combinación lineal, L.I y L.D

Sea V un espacio vectorial con una colección de vectores y escalares v_i y λ_i, se define la **combinación lineal** como:

$$CL(v_1, v_2, \ldots, v_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$$

Se puede definir el conjunto de todas las combinaciones lineales como $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$
Teniendo lo anterior definimos que un set de vectores $v_1, \cdots, v_n$ es **L.I** $\Leftrightarrow \sum \lambda_i \cdot v_i = 0 \rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$ y también el caso contrario, es decir que un set de vectores se dice **L.D** $\Leftrightarrow \exists \lambda_i \neq 0$ talque $\sum \lambda_i \cdot v_i = 0$
Propiedades:

- Agregar vectores a un conjunto l.d seguirá siendo l.d
- quitar vectores a un conjunto l.i seguirá siendo l.i
- en $\mathbb{R}_m$, un conjunto con más de m vectores,es decir un conjunto de cardinalidad n¿m, siempre será un conjunto l.d

2.2 Generador Espacio Vectorial y Base

Sea V espacio vectorial con un cuerpo $\mathbb{K}$, se dice que un set de vectores $v_1, \cdots, v_n$ **genera** V $\Leftrightarrow \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = V$ es decir, se puede construir cualquier vector de V utilizando cualquier **combinacion lineal** de los vectores que lo generan.
Se dice que un set de vectores $v_1, \cdots, v_n$ es la base de V, si estos son el conjunto de cardinalidad más pequeña que genera V.
Un conjunto de vectores se dice **Base Canónica** si el conjunto de vectores v_i esta compuesto por los vectores canónicos $e_i =$ un 1 en la coordenada i, ceros en el resto.
Propiedades:

- Los vectores generados se escriben de manera única.
- Siempre de un conjunto que genera se puede extraer una base
- 2 bases de un espacio siempre tienen la misma cardinalidad

La cardinalidad es útil, pues se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones lineales, dado que si sus columnas generan, la matriz es invertible. Esta es la introducción al siguiente concepto

2.3 Rango de una Matriz

Sea A matriz que pertenece al conjunto $\mathbb{R}_{qp}$, se define **rango** de A, como el número de columnas o filas l.i. de la matriz (el rango fila y rango columna son iguales). rango siempre es $\leq \min numerofilas, numerocolumnas$.
Una matriz se dice **rango completo** si su rango es igual al máximo posible, es decir, una matriz que pertenece a $\mathbb{R}_{nn}$, si tiene rango(n), entonces es de rango completo, y por lo tanto, es Invertible.
Finalmente podemos introducir la siguiente serie de **propiedades**:

- La matriz A es invertible.
- La matriz $A^{'}$ es invertible.
- El determinante de A es distinto de 0.
- Las filas de A son linealmente independientes.
- Las columnas de A son linealmente independientes.
- Para cada vector b, el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única.
- Existe algún vector b tal que el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única.

3 Normas y Productos Escalares

Cuando se trabaja en espacios vectoriales en $\mathbb{R}_n$, se debe recordar que existe un concepto conocido como **distancia o longitud**. Esta distancía viene dada por lo que se conoce como el operador **norma**. Si se introduce el conepto de distancia, tambin se debe introducir conceptos como **ángulos** y finalmente, **ortogonalidad**. Para esto último se utiliza el concepto de **Producto Punto o Escalar**.

3.1 Normas en $\mathbb{R}_n$

Nosotros trabajamos en un espacio "medible" donde las distancias son vistas de manera euclideana, es decir, usando el confiable teorema de pitagoras. En el espacio Vectorial que nosotros vemos se asocia la Norma a la longitud de un vector. Una norma debe cumplir con las siguientes caracteristicas:

- Siempre es No negativa e independiente del sentido del vector
- la longitud debe ser directamente proporcional al tamaño (si el vector crece a su doble, la norma también)
- Desigualdad triangular, es decir La longitud entre dos puntos será siempre menor o igual que la suma de longitudes desde esos mismos dos puntos a un tercero diferente de ellos (desigualdad triangular: la suma de dos lados de un triángulo nunca es menor que el tercer lado, también generalizada en la desigualdad de **Cauchy-Schwarz**)

es decir,

- $\|X\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|aX\| = \|a\| \, \|X\|$ para todo a no infinito.
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Nosotros distinguiremos 3 tipos de norma:

3.1.1 Norma 1 o valor absoluto

La norma 1 aplicada a un X que pertenece a $\mathbb{R}_n$ se define como

$$|X|_1 = |X_1| + |X_2| + \ldots + + |X_n|$$

Su representación gráfica de $|X|_1 = 1$ se ve como un rombo.

3.1.2 Norma 2 o norma euclideana

La norma 2 del mismo x anterior se define como:

$$|X|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}$$

Su representación gráfica de $|X|_2 = 1$ se ve como un círculo.

3.1.3 Norma ∞ o norma del supremo

La norma ∞ del mismo X anterior se define como: $|X|_\infty = sup|x_i|_{i\in[1,\ldots,n]}$ Su representación gráfica de $|X|_\infty = 1$ es un cuadrado.

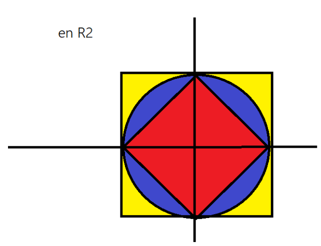

Fig. 1: Gráficos norma(x)=1, en rojo norma 1, en azul norma 2, en amarillo norma infinito

3.2 Producto Escalar

Cada espacio normado, tiene su propio producto punto, por ejemplo, el producto punto entre matrices es la traza. Nosotros veremos el **Producto Vectorial** definido de la siguiente manera.

Sea 2 vectores X e Y, ambos pertenecientes a $\mathbb{R}_n$ entonces se define el producto punto entre X e Y como

$$\langle X, Y \rangle = X^t Y = Y^t X = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i$$

3.2.1 propiedades PP

Usando mayusculas para vectores y minusculas para escalares:

- $\langle X, Y \rangle \geq 0$
- $\langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$
- Es una transformación lineal, es decir, $\langle aX + bY, Z \rangle = a \cdot \langle X, Z \rangle + b \cdot \langle Y, Z \rangle$
- $|\langle X, Y \rangle|^2 \leq (\langle X, X \rangle) \cdot (\langle Y, Y \rangle)$ Desigualdad cauchy schwarz
- $\langle X, Y \rangle = |X||Y|cos(\theta)$
- Esta última, nos indica que $\langle X, Y \rangle =$ si son vectores ortogonales y $\langle X, Y \rangle = |X||Y|$ si son paralelos. Notar que vectores ortogonales, también son **l.i.**. Un ejemplo de esto son los vectores canonicos.