IN3221 - Teoría de Juegos y Estrategia
Profesor: Rahmi Ilkilic
Auxiliares: Daniel Abarca, Paz Montaño, Marco Olguín
Araceli Ramírez, Pavlo Ubilla

Pauta Auxiliar # 2

Equilibrio de Cournot y Bertrand

0.1. Pregunta 1: Equilibrio Bertrand

Enunciado: Suponga que hay 2 empresas que compiten a-la-Bertrand; es decir, compiten escogiendo precios. Estas empresas enfrentan una demanda igual $Q(P) = 250 - 0,5P$ y poseen una función de costos igual a $C(q_i) = 20q_i$, de forma tal que cada firma tiene un costo marginal constante e igual a 20.

(a) Suponga que los precios se eligen simultaneamente. Encuentre el equilibrio de Nash.

Respuesta:

- $I = \{1, 2\}$
- $P_i \in \mathbb{R}_+$

Definimos la demanda que enfrenta cada empresa con respecto a las decisiones de precios que toma en base a su competencia:

$$D_i(P_i, P_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } P_i > P_j \\ \frac{1}{2}Q & \text{si } P_i = P_j \\ Q_i & \text{si } P_i < P_j \end{cases} \tag{1}$$

Para este caso, el candidato para equilibrio de Bertrand será el par de precios $(P_i, P_j) = (20, 20)$ (Equilibrio en competencia perfecta), por lo tanto el beneficio de la firma i, será:

$$\Pi_i(P_i, P_j) = (20 - 20)\frac{(250 - \frac{1}{2}20)}{2} = 0 \tag{2}$$

De esta forma, si la firma i se desvía, sus beneficios cambiarán.

- Si la firma i se desvía hacia abajo: $(P_i, P_j) = (19, 20)$, la firma i no se desviará hacia abajo, ya que la utilidad es negativa

$$\Pi_i(P_i, P_j) = (19 - 20)(250 - \frac{1}{2}19) < 0 \tag{3}$$

- Si la firma i se desvía hacia arriba: $(P_i, P_j) = (21, 20)$, la firma i no tendrá demanda, dado que el precio de la firma j es menor.

$$\Pi_i(P_i, P_j) = (21 - 20)(0) = 0 \tag{4}$$

De esta forma, nos damos cuenta que no existen incentivos unilaterales a desviarse del par de precios $(20, 20)$ para ninguna firma. Finalmente, $(P_i, P_j) = (20, 20)$ es equilibrio de Nash.

(b) Suponga ahora que la empresa 1 decide utilizar la siguiente estrategia: "Cobraremos 260 a todos nuestros clientes. Si algún cliente encuentra un precio menor que el nuestro, no sólo le cobraremos ese precio menor, sino que además le devolveremos la mitad de la diferencia entre 260 y el precio menor encontrado". Así por ejemplo, si el cliente encontró un precio igual a x, donde $x < 260$, entonces este cliente paga $x - 0,5(260 - x)$. Encuentre la mejor respuesta de la firma 2 a esta estrategia adoptada por la firma 1.

Respuesta:

En este caso, planteamos la estrategia de precios para el jugador i.

$$D_i(P_i, P_j) = \begin{cases} 260 & \text{si } P_j \geq 260 \\ P_j - \frac{1}{2}(260 - P_j) & \text{si } P_j < 260 \end{cases} \tag{5}$$

Dada la función de precios definida por la nueva estrategia de la firma i, la mejor respuesta de la firma j es cobrar un precio igual a 260. Esto se demuestra a continuación:

- Para cualquier precio P_j mayor a 260 los beneficios de la firma j serán iguales a cero puesto que la totalidad del mercado demandará a la firma i con $P_i = 260$.
- Para el par de precios (260, 260), los beneficios de la firma j serán positivos:

$$\Pi_i = (260 - 20)\frac{(250 - \frac{1}{2}260)}{2} > 0 \tag{6}$$

- Para cualquier precio P_j menor a 260 habrá una guerra de precios, dada la estrategia de la firma i por cobrar siempre un precio menor, por lo tanto, esto llevará inevitablemente a reducir los precios hasta el costo marginal, al mismo tiempo que los beneficios se reducen hasta llegar a cero.

Por lo tanto, queda evidentemente demostrado que cobrar un precio $P_j = 260$ es la mejor respuesta de la firma j frente a la estrategia de la firma i.

(c) Es la estrategia adoptada por la firma 1 en conjunto con la mejor respuesta de la firma 2 un equilibrio de Nash. Demuestre.

Respuesta:

La función de mejor respuesta (FMR) de la firma j en conjunto con la estrategia adoptada con la firma i no constituyen un equilibrio de Nash, puesto que siempre existirá el incentivo de la firma i a seguir su FMR, esto quiere decir, a reducir marginalmente el precio por debajo de P_j y no reducir el precio según esa estrategia adoptada anteriormente, puesto que reduce considerablemente sus precios y beneficio, cuando en vez de eso podría llevarse toda la cuota de mercado con un precio $P_i = P_j - \varepsilon$ para todo $P_j > 20$ y $P_i = 20$ en otro caso.

0.2. Pregunta 2: Equilibrio Cournot

Hay dos firmas, Firma A y Firma B, que producen el mismo producto. Función de costo de Firma A es $c_A(q_A) = (q_A)^2$ y función de costo de Firma B es $c_B(q_B) = 20q_B$. La función de demanda inversa para el producto es $p = 50 - q$, donde q es la demanda total.

(a) Calcule el equilibrio (cantidades y precio) cuando las firmas están competiendo a la Cournot (competencia en cantidades).

Respuesta:

Se debe calcular las funciones de mejor respuesta para cada firma, planteando de forma correcta el problema de maximización de cada una como sigue:

Para la firma A tendremos que el problema de maximización es el siguiente

$$Max_{q_a}(50 - (q_a + q_b))q_a - (q_a)^2 \tag{7}$$

$$Max_{q_a}50q_a - (q_a)^2 - q_a q_b - (q_a)^2 \tag{8}$$

Usando la CPO para encontrar la función de mejor respuesta para la firma A:

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial q_a} = 50 - 2(q_a) - q_b - 2(q_a) = 0 \tag{9}$$

Despejando q_a tenemos que:

$$q_a = \frac{50 - q_b}{4} \tag{10}$$

Ahora, hacemos lo mismo para el caso de la firma B, maximizando la utilidad tenemos:

$$Max_{q_b}(50 - (q_a + q_b))q_b - 20(q_b) \tag{11}$$

Usando la CPO para encontrar la función de mejor respuesta para la firma B:

$$\frac{\partial \pi_b}{\partial q_b} = 50 - (q_a) - 2(q_b) - 20 = 0 \tag{12}$$

Despejando q_b tenemos que:

$$q_b = \frac{30 - q_a}{2} \tag{13}$$

Ahora remplazamos (13) en (10):

$$q_a(q_b) = \frac{50 - \frac{30 - q_a}{2}}{4} \Rightarrow q_a = 10 \tag{14}$$

$$q_b(q_a) = \frac{30 - 10}{2} \Rightarrow q_b = 10 \tag{15}$$

Se tienen las cantidades de equilibrio, por lo que sólo basta con reemplazar lo obtenido en la función de demanda inversa anteriormente para tener el precio.

$$p = 50 - 10 - 10 \Rightarrow p = 30 \tag{16}$$

(b) Ahora considere el caso donde las firmas compiten en precios pero pueden ofrecer solo números naturales como precio. Suponemos que si las firmas cobran el mismo precio todos los consumidores compran de Firma A y nadie compra de Firma B. Las firmas deben satisfacer toda la demanda que reciben. Encuentre todos los equilibrios de esta competencia en precios. (Puede ser que hay un solo equilibrio o hay múltiples equilibrios.)

Respuesta:

Para ver mejor cómo es el juego, se plantean las utilidades por casos de la firma A y B en función del precio (recordar que el precio está definido como $p = 50 - q$).

$$\pi_a = \begin{cases} p_a * Q(p_a) - CT_a(Q(p_a)) & \text{si } P_a < P_b \\ p_a * Q(p_a) - CT_a(Q(p_a)) & \text{si } P_a = P_b \\ 0 & \text{si } P_b < P_a \end{cases} \tag{17}$$

$$\pi_a = \begin{cases} p_a * (50 - p_a) - (50 - p_a)^2 & \text{si } P_a < P_b \\ p_a * (50 - p_a) - (50 - p_a)^2 & \text{si } P_a = P_b \\ 0 & \text{si } P_b < P_a \end{cases} \tag{18}$$

Reordenando las ecuaciones anteriores y factorizando llegamos a lo siguiente:

$$\pi_a = \begin{cases} (2p_a - 50)(50 - p_a) & \text{si } P_a < P_b \\ (2p_a - 50)(50 - p_a) & \text{si } P_a = P_b \\ 0 & \text{si } P_b < P_a \end{cases} \tag{19}$$

(Se desarrolla la función de utilidad de A ya que se necesitan sacar las raíces de la unidad de ésta para proceder al análisis clásico de Bertrand, en el caso de B no se necesita porque el costo marginal es constante)

Entonces, para que la utilidad sea mayor o igual a cero:

$$0 \leq 2p_a - 50 \tag{20}$$

$$0 \leq 50 - p_a \tag{21}$$

Con lo que obtenemos que para que la utilidad sea mayor o igual a cero, A tendrá que cobrar:

$$25 \leq p_a \leq 50 \tag{22}$$

En el caso de B, como el costo marginal es cte, lo mínimo que puede cobrar es $cmg = 20$. De este modo, si A cobra 25 (que es lo mínimo que puede cobrar), B tiene incentivos a cobrar 24, ante lo cual no tiene incentivo al desvío. De este modo se tiene el EN (25,24)

Luego viene una serie de EN que son los siguientes pares:

- (24, 23)
- (23, 22)
- (22, 21)
- (21, 20)

Estos se justifican ya que A a pesar de tener utilidades negativas si baja el precio por debajo de 25, si es que lo baja, B tiene incentivos a bajarlo a $p_a - 1$, de modo que A queda con utilidades cero (pierde toda la demanda) y B con utilidades mayores a cero, excepto en el caso (21,20), donde definitivamente a A no le conviene cobrar debajo de 21, pues B no puede seguir bajando el precio por debajo de su costo marginal (utilidades negativas) de modo que A ganaría toda la demanda y tendría utilidades negativas.