Juegos Evolutivos
by: Pavlo Ubilla

Aplicación de teoría de juegos inspirado en las dinámicas de cambio de frecuencia genética de poblaciones.

Ayuda a explicar las conductas de distintas especies de animales y otros organismos.

Es importante tener en cuenta que no nos estamos refiriendo a una estrategia conscientemente ideada por el individuo. En biología, las estrategias son rasgos genéticamente heredados que controlan la acción de un individuo, de forma análoga a los programas informáticos. El éxito de una estrategia está determinado por cuán buena es la estrategia en presencia de estrategias competitivas (incluido ella misma) y de la frecuencia con la que se utilizan esas estrategias.

- Lectura recomendada: El gen egoísta (Richard Dawkins)

Estrategia Evolutivamente Estable

En teoría de juegos, una estrategia evolutivamente estable (o EEE) es una estrategia que, si es adoptada por una población, no puede ser invadida por ninguna otra estrategia alternativa.

Tiene que ser un equilibrio simétrico, es decir, todos los jugadores deben jugar la misma estrategia s.

Si (s,s) es un EN estricto entonces es EEE.

Si no es un EN estricto, para todas las estrategias s' tal que $u_i(s', s) = u_i(s, s)$ comparamos $u_i(s, s')$ con $u_i(s', s')$.

Si $u_i(s, s') > u_i(s', s')$ entonces (s, s) es EEE.
Si $u_i(s, s') \leq u_i(s', s')$, no es EEE

¿Cómo podemos confirmar que un EN en EM es EE?

Adoptamos Definición II para las estrategias mixtas.

Definición II: En un juego simétrico de dos jugadores, una estrategia mixta σ es evolutivamente estable si

(i) (σ, σ) es un EN simétrico, es decir $u_i(\sigma, \sigma) \geq u_i(\sigma', \sigma)$, $\forall\ \sigma'$

y

(ii) Si existe un $\sigma' \neq \sigma$ tal que $u_i(\sigma, \sigma) = u_i(\sigma', \sigma)$, entonces $u_i(\sigma, \sigma') > u_i(\sigma', \sigma')$.

P1

miércoles, 22 de septiembre de 2021 12:47

Halcón

Paloma

Analista

	H	P	A
H	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$	$R, 0$	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$
P	$0, R$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$	$\frac{R}{2}-a, \frac{R}{2}+a$
A	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$	$\frac{R}{2}+a, \frac{R}{2}-a$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$

R: recompensa
C: costo
a: pillería

$0 < R < C \qquad 0 \leq a < R/2$

¿Hay EEE en estrategias puras (para qué valores de a)?

$\sigma = (H,P)$ y (P,H) son EN no simétricos $\Rightarrow$ no son EEE

Analizamos (A,A): es EN estricto?

si $a > 0 \Rightarrow (A,A)$ es EN estricto
$\Rightarrow (A,A)$ es EEE

Si $a = 0$:

$U_1(P,A) = U_1(A,A)$

$U_1(A,P) > U_1(P,P)$

$R/2 + 0 > R/2$

Si (s,s) es un EN estricto entonces es EEE.

Si no es un EN estricto, para todas las estrategias s' tal que $u_i(s', s) = u_i(s, s)$ comparamos $u_i(s, s')$ con $u_i(s', s')$.

Si $u_i(s, s') > u_i(s', s')$ entonces (s, s) es EEE.
Si $u_i(s, s') \leq u_i(s', s')$, no es EEE

En este caso (A, A) no es EEE

Halcón

Paloma

Bully

	H	P	B
H	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$	$R, 0$	$R, 0$
P	$0, R$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$	$0, R$
B	$0, R$	$R, 0$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$

R: recompenza
C: costo
$R, C > 0$

a) $R > C$, encuentre EEE en puras. $(C > 0)$

	H	P	B
H	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$	$R, 0$	$R, 0$
P	$0, R$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$	$0, R$
B	$0, R$	$R, 0$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$

(H, H) es EN simétrico y como $\frac{R-C}{2} > 0$ es estricto $\Rightarrow$ es EEE.

b) $R < C$, ecuentre EEE.

		p (H)	q (P)	1-p-q (B)
p	H	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$	$R, 0$	$R, 0$
q	P	$0, R$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$	$0, R$
1-p-q	B	$0, R$	$R, 0$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$

(P, H); (H, P); (B, H); (H, B) son EN no simétricas $\Rightarrow$ no son EEE

$\sigma = (p, q, 1-p-q)$.

$\pi_1(H, \sigma) = \pi_1(P, \sigma) = \pi_1(B, \sigma)$

1) $\pi_1(H, \sigma) = p \cdot \frac{R-C}{2} + R(1-p)$

2) $\pi_1(P,\sigma) = \frac{R}{2} q$

3) $\pi_1(B,\sigma) = Rq + (1-p-q)\frac{R}{2}$

2)=3) $\frac{R}{2}q = Rq + (1-p)\frac{R}{2} - \frac{R}{2}\cdot q$

$$0 = (1-p)\cdot\frac{R}{2} \Rightarrow p = 1$$

1)=2) $p\cdot\frac{R-C}{2} + R(1-p) = \frac{R}{2}q$

$\Rightarrow \frac{R-C}{2} = \frac{R}{2}q \Rightarrow q = \frac{R-C}{R} \Rightarrow 1-p-q<0$ ← no satisface ser una dist de prob

CASO 2:

$\sigma = (p, 0, 1-p)$ ← Probamos el caso en que no se juega P

$\pi_1(H,\sigma) = \pi_1(B,\sigma) > \pi_1(P,\sigma)$ → No queremos que se elija la estrategia P

1) $\pi_1(H,\sigma) = \frac{R-C}{2}\cdot p + R\cdot(1-p)$

2) $\pi_1(B,\sigma) = \frac{R}{2}\cdot(1-p)$

		p	0	$1-p$
		H	P	B
p	H	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$	$R, 0$	$R, 0$
0	P	$0, R$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$	$0, R$
$1-p$	B	$0, R$	$R, 0$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$

1)=2) $\Rightarrow \frac{R-C}{2} p + R(1-p) = \frac{R}{2}(1-p)$

$$\frac{R-C}{2}\cdot p = -\frac{R}{2}(1-p)$$

$$\Rightarrow p = R/C$$

$$1-p = 1 - R/C$$

$\pi_1(P,\sigma) = 0 \Rightarrow \pi_1(H,\sigma) > \pi_1(P,\sigma)$ se cumple

$\sigma = (R/C, 0, 1-R/C)$ es un EN en EM

¿Cómo podemos confirmar que un EN en EM es EE?

Adoptamos Definición II para las estrategias mixtas.

Definición II: En un juego simétrico de dos jugadores, una estrategia mixta σ es evolutivamente estable si

(i) (σ,σ) es un EN simétrico, es decir $u_i(\sigma,\sigma) \geq u_i(\sigma',\sigma)$, $\forall\, \sigma'$

y

(ii) Si existe un $\sigma' \neq \sigma$ tal que $u_i(\sigma,\sigma) = u_i(\sigma',\sigma)$, entonces $u_i(\sigma,\sigma') > u_i(\sigma',\sigma')$.

← Revisamos definición

Hay que verificar que es EE

$\sigma' = (a, b, 1-a-b)$

$\pi_1(\sigma,\sigma) = \pi_1(\sigma',\sigma)$

$$\pi_1(\sigma,\sigma) = \frac{R}{C}\left(\frac{R}{C}\cdot\frac{R-C}{2} + 0\cdot R + \left(1-\frac{R}{C}\right)\cdot R\right)$$
$$+\left(1-\frac{R}{C}\right)\cdot\left(0\cdot\frac{R}{C} + 0\cdot R + \left(1-\frac{R}{C}\right)\frac{R}{2}\right)$$
$$= \frac{R}{2} - \frac{R^2}{2C}$$

$$\pi_1(\sigma',\sigma) = a\cdot\left(\frac{R}{C}\cdot\frac{R-C}{2} + \left(1-\frac{R}{C}\right)R\right)$$
$$+(1-a-b)\left(\left(1-\frac{R}{C}\right)\frac{R}{2}\right) = \frac{R}{2} - \frac{R^2}{2C} - \frac{R^2 b}{C} - \frac{Rb}{2}$$

$\pi_1(\sigma,\sigma) = \pi_1(\sigma',\sigma)$ ← caso en que se igualan ambos pagos

$$\cancel{\frac{R}{2}} - \cancel{\frac{R^2}{2C}} = \cancel{\frac{R}{2}} - \cancel{\frac{R^2}{2C}} - \frac{R^2 b}{C} - \frac{Rb}{2}$$
$$b\left(\frac{R^2}{C} + \frac{R}{2}\right) = 0$$

se cumple con $b=0$

se cumple con $\sigma' = (a, 0, 1-a)$ ← estrategia arbitraria

¿Cómo podemos confirmar que un EN en EM es EE?

Adoptamos Definición II para las estrategias mixtas.

Definición II: En un juego simétrico de dos jugadores, una estrategia mixta σ es evolutivamente estable si

(i) (σ,σ) es un EN simétrico, es decir $u_i(\sigma,\sigma) \geq u_i(\sigma',\sigma)$, $\forall\, \sigma'$

y

(ii) Si existe un $\sigma' \neq \sigma$ tal que $u_i(\sigma,\sigma) = u_i(\sigma',\sigma)$, entonces $u_i(\sigma,\sigma') > u_i(\sigma',\sigma')$.

		a	0	$1-a$
		H	P	B
a	H	$\frac{R-C}{2}, \frac{R-C}{2}$	$R, 0$	$R, 0$
0	P	$0, R$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$	$0, R$
$1-a$	B	$0, R$	$R, 0$	$\frac{R}{2}, \frac{R}{2}$

revisar $\pi_1(\sigma,\sigma') > \pi_1(\sigma',\sigma')$

$$\pi_1(\sigma,\sigma') = \frac{R}{C}\left(a\cdot\frac{R-C}{2} + (1-a)R\right)$$
$$+\left(1-\frac{R}{C}\right)\cdot\left(\frac{R}{2}\right) = -Ra + \frac{R^2}{2C} + \frac{R}{2}$$
$$\pi_1(\sigma',\sigma') = a\left(a\,\frac{R-C}{2} + (1-a)R\right)$$
$$+(1-a)\frac{R}{2} = -\frac{a^2 C}{2} + \frac{R}{2}$$

$$\pi_1(\sigma,\sigma') > \pi_1(\sigma',\sigma')$$
$$-Ra + \frac{R^2}{2C} + \cancel{\frac{R}{2}} > -\frac{a^2 C}{2} + \cancel{\frac{R}{2}}$$
$$-2RaC + R^2 + a^2C^2 > 0$$
$$(R-aC)^2 > 0 \;//$$

$\hookrightarrow = 0$ cuando $a = \frac{R}{C}$

Solo se cumple cuando $\sigma' = \sigma$

$\sigma = (R/C, 0, 1-R/C)$ es EEE

analizar los casos $(p, 1-p, 0)$ y $(0, p, 1-p)$