SEMANA 1

Subsucesiones y Continuidad

1.1 Subsucesiones

DEFINICIÓN (SUBSUCESIÓN) Sea (s_n) una sucesión. Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión (u_n), definida por:

$$u_n = s_{\varphi(n)}.$$

Ejemplo 1.1.

- Si $\varphi(n) = 2n$, entonces $u_n = s_{2n}$. $(u_n) = (s_0, s_2, s_4, s_6, s_8 \ldots)$.
- Si $\varphi(n) = 2n+1$, entonces $u_n = s_{2n+1}$. $(u_n) = (s_1, s_3, s_5, s_7, \ldots)$.

  En general, $(u_n) = (s_{\varphi(n)}) = (s_{\varphi(0)}, s_{\varphi(1)}, s_{\varphi(2)}, \ldots)$.

Observación: Aceptaremos que la función φ no este definida para un número finito de términos como por ejemplo $\varphi(n) = n - 5$.

$$(s_{n-5}) = (\nexists, \nexists, \nexists, \nexists, \nexists, s_0, s_1, \ldots).$$

El siguiente teorema caracteriza la convergencia de una sucesión vía la de sus subsucesiones, mostrando que además éstas no pueden tener un límite distinto al de la original.

Teorema 1.1. *Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s_n \to \ell \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } \ell.$$

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Basta tomar $\varphi(n) = n$, con lo que $s_{\varphi(n)} = s_n \to \ell$.

($\Rightarrow$) Sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, estrictamente creciente y eventualmente no definida en un número finito de casos.

P.d.q. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0,\ |s_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$. Efectivamente, como φ no es acotada superiormente (¿por qué?), $\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \varphi(k_0) \geq n_0$. Y luego:

$$\forall k \geq k_0,\ \varphi(k) \geq \varphi(k_0) \geq n_0,$$

de donde $\forall k \geq k_0$ $|s_{\varphi(k)} - \ell| \leq \varepsilon$. $\square$

Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Demostración. La demostración se realiza mediante un método de *dicotomía.*

Sea (s_n) una sucesión acotada. Existen entonces $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leq s_n \leq b_0.$$

Llamemos $I_0 = [a_0, b_0]$.

Sea a continuación $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Es claro que en alguno de los intervalos $[a_0, c_0]$ y $[c_0, b_0]$, hay una infinidad de términos de la sucesión (s_n). Llamemos $I_1 = [a_1, b_1]$ a dicho intervalo.

Definimos entonces $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Nuevamente, debe haber una infinidad de términos de (s_n) en alguno de los intervalos $[a_1, c_1]$ y $[c_1, b_1]$. Llamamos a dicho intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$ y proseguimos de la misma manera.

Así, se formará una colección de intervalos $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots$ con las siguientes propiedades:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, el intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ contiene una cantidad infinita de términos de la sucesión (s_n).

- $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$.

- $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \supseteq I_{n+1}$. Cuando esta condición se satisface, se habla de una colección de intervalos *encajonados.*

Definamos entonces la siguiente subsucesión de (s_n) (denotada $(s_{\varphi(n)})$):

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \text{mín}\{k \in \mathbb{N} \mid s_k \in I_1\} \\
\varphi(2) &= \text{mín}\{k > \varphi(1) \mid s_k \in I_2\} \\
\varphi(3) &= \text{mín}\{k > \varphi(2) \mid s_k \in I_3\} \\
\varphi(n+1) &= \text{mín}\{k > \varphi(n) \mid s_k \in I_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Con esto la subsucesión $(s_{\varphi(n)})$ tiene la siguiente propiedad:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_{\varphi(n)} \in I_n,\ \text{o sea, } a_n \leq s_{\varphi(n)} \leq b_n. \tag{1.1}$$

Finalmente, es claro que las sucesiones (a_n) y (b_n) son monótonas ($a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$) y acotadas ($a_n, b_n \in [a_0, b_0]$), luego convergen a los reales a y b, respectivamente. Además como $a_n \leq b_n$, entonces $a \leq b$.

Por último, ya que $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, entonces tomando límite se tiene que $b - a = 0$ o sea, $a = b$.

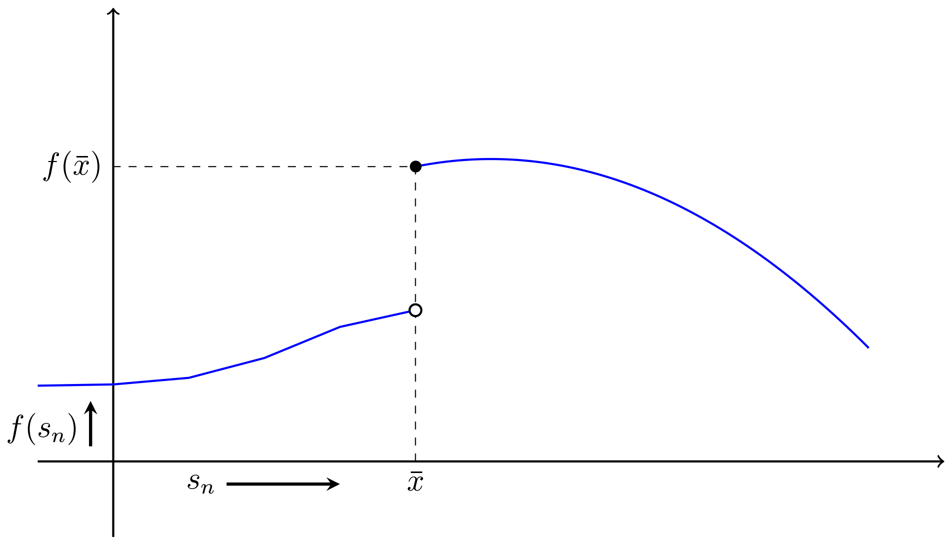
Luego, aplicando sandwich en la desigualdad de (1.1), se obtiene que $s_{\varphi(n)} \to a = b$. $\square$

1.2 Funciones continuas

Sabemos, del semestre anterior, que si tenemos una sucesión $s_n \to \bar{x}$, entonces $\operatorname{sen}(s_n) \to \operatorname{sen}(\bar{x})$. Es decir, la función seno satisface la siguiente propiedad:

$$s_n \to \bar{x} \;\Rightarrow\; f(s_n) \to f(\bar{x}).$$

Pero, ¿se tiene esta propiedad para cualquier función? Veamos la Figura 1.



Para esta función f y la sucesión (s_n), $s_n \to \bar{x}$ pero $f(s_n) \not\to f(\bar{x})$.

En la función dibujada, si uno toma cualquier sucesión s_n que converge a $\bar{x}$ por la derecha, la sucesión de las imágenes $f(s_n)$ converge sin problemas al valor $f(\bar{x})$. Sin embargo, al tomar una sucesión s_n que converge a $\bar{x}$ por la izquierda, se tiene que la sucesión $f(s_n)$ converge a un valor $h < f(\bar{x})$.

La intuición nos dice que este fenómeno está relacionado de algún modo con el "salto" o *discontinuidad* que la función f posee. Formalicemos esto vía la siguiente definición.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN CONTINUA EN UN PUNTO) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función **función continua en** $\bar{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A,\; x_n \to \bar{x} \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(\bar{x}).$$

Observación: Notemos que en la definición, la propiedad de ser verificada **para toda sucesión** que converge a $\bar{x}$ y con valores en A. Es decir, si somos capaces de probar que la propiedad es válida para alguna sucesión, eso no es suficiente para que la función sea continua.

Sin embargo, los valores de la sucesión deben estar en el dominio de la función, luego si el dominio es reducido, entonces el número de sucesiones test es pequeña.

Ejercicio 1.1: ¿Cómo se podría restringir el dominio de la función en la Figura 1, para que fuere continua en $\bar{x}$?

Ejemplo 1.2.
Consideremos la función f definida por la ley

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

1. Probemos que f es continua en $\bar{x} = 0$ y en $\bar{x} = 1$.
2. Probemos que f no es continua en $\bar{x}$ si $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Solución:

1. Consideremos el caso $\bar{x} = 0$. Sea (x_n) una sucesión arbitraria que converge a 0.

   $$\text{P.D.Q: } f(x_n) \to f(0) = 0.$$

   En efecto, se tiene que

   $$f(x_n) = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & \text{si } x_n \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

   donde se puede realizar el acotamiento siguiente:

   $$0 \leq |f(x_n)| \leq |x_n| + x_n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Usando esta mayoración y el teorema del sandwich de sucesiones se obtiene el resultado buscado.

   Ahora consideremos el caso $\bar{x} = 1$. Sea (x_n) una sucesión arbitraria que converge a 1.

   $$\text{P.D.Q: } f(x_n) \to f(1) = 1.$$

   En efecto, se tiene que

   $$f(x_n) = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ x_n^2 & \text{si } x_n \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

   de donde se deduce que

   $$|f(x_n) - 1| = \begin{cases} |x_n - 1| & \text{si } x_n \in \mathbb{Q} \\ |x_n^2 - 1| & \text{si } x_n \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

   Por lo tanto, usando un acotamiento similar al del caso anterior, se obtiene:

   $$0 \leq |f(x_n) - 1| \leq |x_n - 1| + |x_n^2 - 1|, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   El resultado buscado es nuevamente una consecuencia directa de esta mayoración y del teorema del sandwich de sucesiones.

2. Consideremos el caso $\bar{x} \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$. En este caso se tiene que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

   Para demostrar que la función no es continua en este punto, debemos mostrar alguna sucesión (x_n) que converja a $\bar{x}$ pero para la cual se tenga que $f(x_n) \not\to \bar{x}$.

   Dada la fórmula de la función f, esto último lo hacemos con una sucesión de números irracionales.

   Sea $x_n = \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Claramente esta sucesión converge a $\bar{x}$. Sin embargo, la sucesión de las imágenes
$$f(x_n) = \left(\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 \to \bar{x}^2$$
   y como $\bar{x} \notin \{0, 1\}$ se tiene que $\bar{x}^2 \neq \bar{x}$.

   El caso $\bar{x} \in \mathbb{I}$ se propone como ejercicio. Para formar una sucesión de racionales que converja a $\bar{x}$, use para cada $n \in \mathbb{N}$ la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{n})$.

Ejemplos: No es difícil probar que las siguientes funciones son continuas:

- $f(x) = c$ (constante) es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \cos(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = e^x$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \ln(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

Las demostraciones se proponen como ejercicios personales de comprensión.

Teorema 1.3 (Álgebra de funciones continuas). *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

1. *$f + g$.*
2. *$f - g$.*
3. *λf, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
4. *$f \cdot g$.*
5. *f/g, cuando $g(\bar{x}) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la continuidad sólo para 1 y 5, el resto se proponen como ejercicios.

Para 1, debemos probar que si (x_n) es una sucesión en $\operatorname{Dom}(f + g) = A \cap B$ que converge a $\bar{x}$, entonces $(f + g)(x_n)$ converge a $(f + g)(\bar{x})$.

Esto último es cierto ya que $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$. Pero como f y g son continuas en $\bar{x}$, entonces $f(x_n) \to f(\bar{x})$ y $g(x_n) \to g(\bar{x})$, y por el teorema de álgebra de sucesiones

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = (f+g)(\bar{x}).$$

Para 5, sea (x_n) una sucesión con valores en $\mathrm{Dom}(f/g) = (A \cap B) \setminus Z(g)$ ($Z(g)$ es el conjunto de ceros de g), que converge a $\bar{x}$.

Nuevamente, por continuidad de f y g, $f(x_n) \to f(\bar{x})$ y $g(x_n) \to g(\bar{x})$ y usando el teorema de álgebra de sucesiones, resulta:

$$(f/g)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = (f/g)(\bar{x}).$$

$\square$

Teorema 1.4 (Composición de funciones continuas). *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión con valores en $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ que converge a $\bar{x}$.

Recordemos que $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$. Con esto, como $x_n \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, se tiene que $x_n \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(x_n) \in \mathrm{Dom}(g)$.

Por un lado, tenemos que, $x_n \in \mathrm{Dom}(f)$ y $x_n \to \bar{x}$. Luego, usando la continuidad de f en $\bar{x}$ se concluye que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$.

Ahora, tenemos que la sucesión $(f(x_n))$ cumple que $f(x_n) \in \mathrm{Dom}(g)$ y $f(x_n) \to f(\bar{x})$. Luego, por continuidad de g en $f(\bar{x})$, se deduce que

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(\bar{x})) = (g \circ f)(\bar{x}).$$

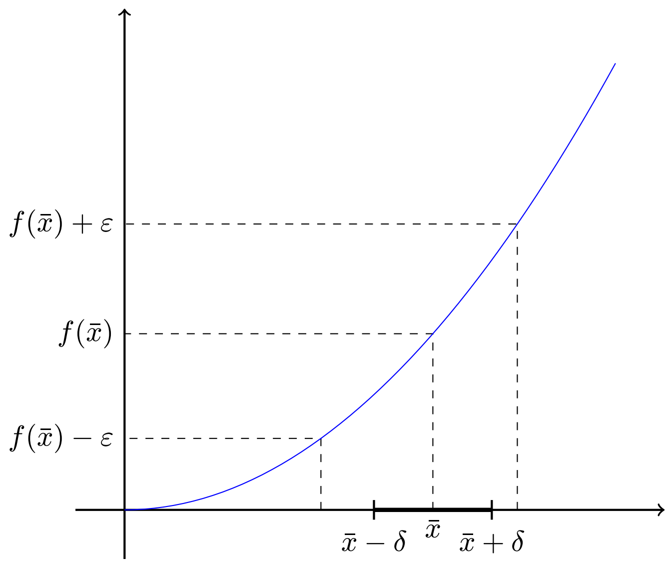
$\square$

Ejemplos: Gracias a los teoremas anteriores, se concluye que las siguientes funciones son continuas (pruébelo):

1. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)$.
3. $f(x) = a^x$, con $a > 0$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$, es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.
5. $f(x) = x^x$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
6. $f(x) = x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.
7. $f(x) = \tan(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 1.5 (Caracterización $\varepsilon - \delta$). *Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ ssi se cumple que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A \left\{ |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon \right\} \tag{1.2}$$



Demostración. ($\Rightarrow$) Razonemos por contradicción. Si la propiedad fuese falsa, significaría que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $x \in A$ con $|x - \bar{x}| \leq \delta$ y $|f(x) - f(\bar{x})| > \epsilon$.

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $\delta = 1/n$ y encontrar $x_n \in A$ que cumple las propiedades

$$|x_n - \bar{x}| \leq 1/n \qquad \text{y} \qquad |f(x_n) - f(\bar{x})| > \varepsilon.$$

Claramente la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia $\bar{x}$ y sin embargo $f(x_n) \not\to f(\bar{x})$ lo cual contradice la continuidad de f en $\bar{x}$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que la propiedad es cierta y probemos la continuidad. Tomemos una sucesión cualquiera (x_n) con valores en A, tal que $x_n \to \bar{x}$. Debemos probar que $f(x_n) \to f(\bar{x})$. Para ello consideremos $\epsilon > 0$ arbitrario y sea $\delta > 0$ dado por la propiedad. Dado que $x_n \to \bar{x}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \bar{x}| \leq \delta$ para todo $n \geq n_0$. Usando la propiedad, se sigue que $|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \epsilon$ para $n \geq n_0$ con lo cual $f(x_n) \to f(\bar{x})$. □

Observación: Esta propiedad permite entre otras cosas, hacer la conexión entre los conceptos de continuidad y límite de funciones. En efecto, las caracterizaciones $\varepsilon - \delta$ de ambos conceptos son prácticamente los mismos, cambiando ℓ por $f(\bar{x})$ y autorizando a la variable x a tomar el valor $\bar{x}$.

De este modo podemos establecer que si el dominio de la función permite estudiar el límite de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ y $\bar{x} \in A$ se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ ssi } \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Definición (Función continua) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.

Guía de Ejercicios

1. ¿Cómo se podría restringir el dominio de la función en la Figura 1 de la tutoría, para que sea contínua en $\bar{x}$?

2. Dadas $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Probar que las funciones $f - g$, λf (con $\lambda \in \mathbb{R}$) y $f \cdot g$ son continuas en $\bar{x}$.

3. Usando los teoremas de álgebra y composición de funciones continuas, pruebe que las siguientes funciones son continuas:

a) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)$.

c) $f(x) = a^x$, con $a > 0$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$, $a \neq 1$, es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

e) $f(x) = x^x$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.

f) $f(x) = x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}}$, es continua $\forall \bar{x} > 0$.

g) $f(x) = \tan(x)$ es continua $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Consideremos la función f definida por la ley

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Termine el ejemplo de la tutoría , probando que f no es continua $\forall x \in \mathbb{I}$. Recuerde la indicación: Para formar una sucesión de racionales que converja a $\bar{x}$, use para cada $n \in \mathbb{N}$ la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{n})$.

5. Probar que la función $f(x) = x \operatorname{sen}(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

6. Determinar el valor que debemos dar a $f(0)$ para que $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ sea continua en $\bar{x} = 0$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = \alpha$. Demuestre que independiente del valor de α, f no es continua en 0.

8. Estudiar la continuidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Analice por separado los casos $\bar{x} = 0$ y $\bar{x} \neq 0$.

9. Probar que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es continua en $\mathbb{R}$.

10. Determinar el dominio y puntos de continuidad de las siguientes funciones

(a) $x \mapsto \operatorname{sen}(x)/\ln(1 + \exp(x))$

(b) $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1 + x^3)}$

(c) $x \mapsto \exp(x) x^{3/2}/\tan(x)$

11. Estudiar dominio y continuidad de las funciones $\cot(x), \sec(x), \operatorname{cosec}(x)$.

12. (a) Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in A$. Demuestre que la función $h(x) = g(x)^{f(x)}$ está bién definida y es continua en A.

(b) Estudiar la convergencia de la sucesión $y_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\exp(1/n)}$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) < 0$ para todo $x < c$ y $f(x) > 0$ para $x > c$. Demuestre que $f(c) = 0$.

P2. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que existe una constante $L \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in A$ (una tal función se dice Lipschitziana de parámetro L). Probar que f es continua en A.

P3. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $r_n > 0$ una sucesión tal que $r_n \to 0$. Probar que f es continua en $\bar{x}$ si y solamente si la sucesión

$$s_n := \sup_x \{|f(x) - f(\bar{x})| : |x - \bar{x}| \leq r_n\},$$

converge a cero.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, p, q primos relativos, y $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Probar que f es continua en todo punto $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$ y discontinua en todo $\bar{x} \in \mathbb{Q}$.

P5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $\bar{x} \in \mathbb{R}$, con $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$. Probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$. Indicación: puede ser conveniente analizar primeramente el caso $g \equiv 0$.

P6.
a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Probar que
   (a) si $f(x + y) = f(x) + f(y), \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = ax$ con $a = f(1)$.
   (b) si $f(x + y) = f(x)f(y), \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = a^x$ con $a = f(1)$.

b) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in (0, \infty)$. Demuestre que $f(x) = \log_a(x)$ con $a = f^{-1}(1)$.

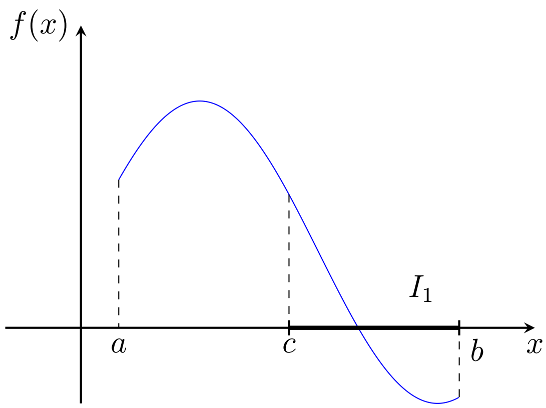
Continuidad. Los grandes teoremas

2.1 El teorema de los valores intermedios

Una propiedad muy útil para estudiar el recorrido de una función continua, es el hecho que una tal función que toma un par de valores, está obligada a tomar todos los valores intermedios. La esencia de esta propiedad la enunciamos en el siguiente resultado de existencia de raíces de ecuaciones.

Teorema 2.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.*

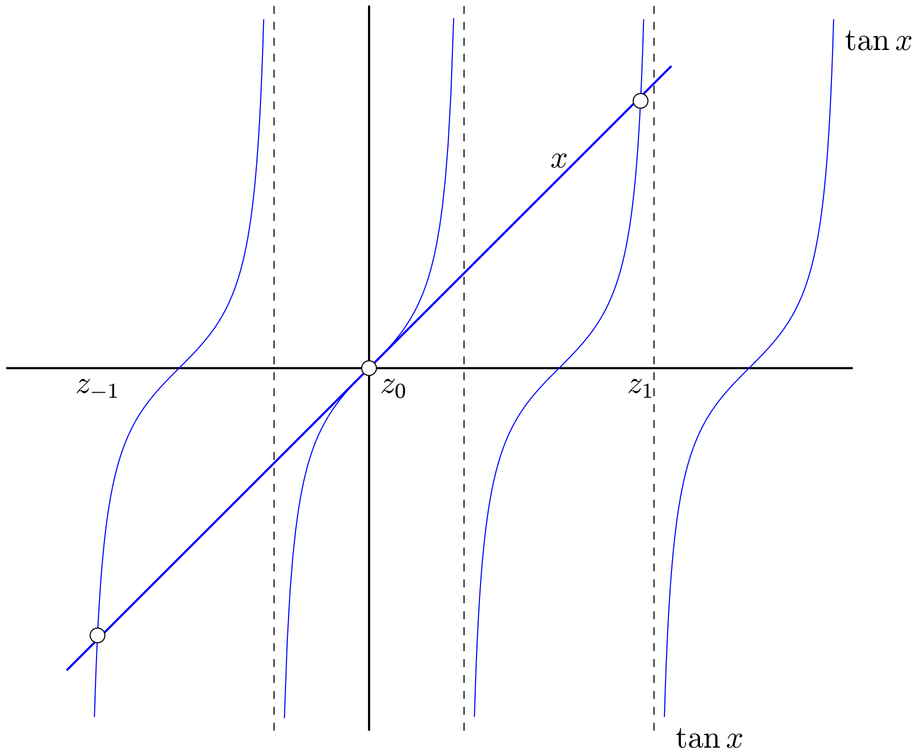
DEMOSTRACIÓN. Consideremos el intervalo $I_0 = [a, b]$ y $c = (a + b)/2$ su punto medio.



Tomando $I_1 = [a, c]$ si $f(a)f(c) \leq 0$ ó $I_1 = [c, b]$ si $f(c)f(b) \leq 0$, obtenemos un intervalo $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0$ con $f(a_1)f(b_1) \leq 0$ y diámetro $(b_1 - a_1) = (b - a)/2$. Iterando este procedimiento se obtiene una sucesión decreciente de intervalos $I_n = [a_n, b_n] \subset I_{n-1}$ tal que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ y $(b_n - a_n) = (b - a)/2^n$. Por el Teorema de Intervalos Encajonados las sucesiones a_n y b_n convergen hacia un mismo punto $\bar{x} \in [a, b]$, y pasando al límite en la desigualdad $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ se deduce $f(\bar{x})^2 \leq 0$, es decir $f(\bar{x}) = 0$.

$\square$

Ejemplo 2.1.
Estudiemos las soluciones de la ecuación $\tan(x) = x$. Gráficamente, se trata de encontrar las intersecciones de los gráficos de las funciones $x \mapsto \tan(x)$ y $x \mapsto x$ y, como muestra la siguiente figura, resulta intuitivo que la ecuación tiene infinitas soluciones $\cdots < z_{-2} < z_{-1} < z_0 = 0 < z_1 < z_2 < \cdots$.



Como las funciones $x \mapsto \tan(x)$ y $x \mapsto x$ son impares, es claro que si z es una solución de la ecuación, entonces $-z$ también. En el gráfico esto corresponde al hecho que $z_{-1} = -z_1, z_{-2} = -z_2, \ldots$. Probemos la existencia de una raíz z_1 en $(\pi/2, 3\pi/2)$. Para ello consideremos la función $f(x) = \tan(x) - x$ y notemos que $f(\pi) = -\pi < 0$. Por otra parte, tomando la sucesión $x_n = 3\pi/2 - 1/n$ se observa que $f(x_n) \to +\infty$ de modo que para algún $\bar{n} \in \mathbb{N}$ se tendrá $f(x_{\bar{n}}) > 0$. El teorema anterior nos permite concluir la existencia de un número $z_1 \in [\pi, x_{\bar{n}}]$ tal que $f(z_1) = 0$, esto es $\tan(z_1) = z_1$. Intentemos estimar z_1 con 6 decimales usando el algoritmo sugerido en la demostración del Teorema 2.1. Partamos con $a_0 = 4{,}4; b_0 = 4{,}5$ para los cuales se tiene $f(a_0) = -1{,}30$ y $f(b_0) = 0{,}14$.

n	$[a_n, b_n]$	$c_n = (a_n + b_n)/2$	$f(c_n)$
0	[4.400000,4.500000]	4.450000	-7.3e-01
1	[4.450000,4.500000]	4.475000	-3.4e-01
2	[4.475000,4.500000]	4.487500	-1.2e-01
3	[4.487500,4.500000]	4.493750	6.9e-03
4	[4.487500,4.493750]	4.490625	-5.5e-02
5	[4.490625,4.493750]	4.492188	-2.5e-02
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	[4.493409,4.493410]	4.493409	6.6e-07
21	[4.493409,4.493409]	4.493409	1.8e-07

Así, luego de 21 iteraciones obtenemos la estimación $z_1 \sim 4{,}49340946674347$ la cual posee al menos 6 decimales exactos. Como ejercicio haga un programa para estimar z_2 con 6 decimales.

Ejemplo 2.2.
Probar que todo polinomio cúbico tiene al menos una raíz real. En efecto, sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ con $d \neq 0$ un polinomio cúbico cualquiera. Observemos que $p(n)/n^3 \to d$ mientras que $p(-n)/n^3 \to -d$. De aquí se sigue que para n suficientemente grande $p(n)$ tiene el mismo signo que d, mientras que $p(-n)$ tiene el signo contrario. Como consecuencia del teorema anterior el polinomio debe tener una raíz en el intervalo $[-n, n]$. Generalice el argumento para probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real. Analice que ocurre en el caso de polinomios de grado par.

Como corolario inmediato del Teorema 2.1 se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

Teorema 2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.*

Demostración. Sean a_0 y b_0 tales que $f(a_0) = c$ y $f(b_0) = d$. Sin perder generalidad podemos suponer $a_0 \leq b_0$. Aplicando el teorema anterior a la función $g : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - e$ se obtiene la existencia de x tal que $g(x) = 0$, vale decir $f(x) = e$. $\square$

Ejemplo 2.3.
El Teorema 2.2 permite demostrar, por ejemplo, que el recorrido de la función exp es $(0, +\infty)$. En efecto, dado que las sucesiones $\exp(-n)$ y $\exp(n)$ convergen hacia 0 y $+\infty$ respectivamente, cualquiera sea el número real $y > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\exp(-n) < y < \exp(n)$. La propiedad de los valores intermedios nos asegura la existencia de $x \in [-n, n]$ tal que $\exp(x) = y$. Por otra parte, como ya sabemos que $\exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se concluye que $\mathrm{Rec}(f) = (0, +\infty)$.

Recordemos que exp es estrictamente creciente con lo cual es inyectiva, de modo que $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ es biyectiva. Su inversa, como ya vimos en capítulos anteriores, es la función $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

En esta sección probaremos otra propiedad importante de las funciones continuas: en un intervalo cerrado y acotado el máximo y el mínimo son alcanzados. Exactamente se tiene:

Teorema 2.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.*

Demostración. Probemos la propiedad del mínimo (la propiedad del máximo se prueba de manera análoga y se deja como ejercicio para el lector).

Sea $m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, eventualmente $m = -\infty$. Probaremos que existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = m$ lo cual establece simultáneamente que el ínfimo es finito y que es alcanzado. Para ello consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(x_n)$ converge hacia m. En virtud del Teorema de Weierstrass podemos extraer una subsucesión convergente $x_{n_k} \to \bar{x} \in [a, b]$. Por continuidad se tiene $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$, de donde se deduce que $m = f(\bar{x})$ probando simultáneamente que m es finito (es decir, f es acotada inferiormente) y que el ínfimo es alcanzado (en el punto $\bar{x}$). $\square$

Observemos que en el resultado anterior todas las hipótesis son necesarias. La función $x \mapsto \exp(x)$, si bien tiene un ínfimo finito sobre $\mathbb{R}$, éste no es alcanzado: $\mathbb{R}$ no es acotado. Por otra parte, la función $x \mapsto x^2$ alcanza su mínimo pero no así el máximo en el intervalo $[0, 1)$, el cual no es cerrado. Finalmente, la función definida por $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ no es acotada y no alcanza ni el mínimo ni el máximo en el intervalo $[-1, 1]$. La dificultad en este caso proviene de la falta de continuidad en $\bar{x} = 0$.

2.3 Continuidad de las funciones inversas

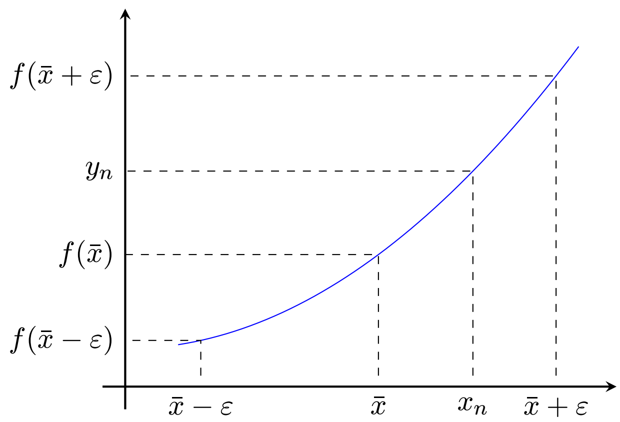
Para finalizar el estudio de las funciones continuas, probaremos un resultado de gran utilidad para establecer la continuidad de una función que es la inversa de una función continua.

Consideremos $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo (finito o infinito, abierto o cerrado o semi-abierto) y sea $J = f(I)$ su recorrido. Recordemos que si f es estrictamente monótona (creciente o decreciente) entonces es inyectiva y en consecuencia posee una inversa $f^{-1} : J \to I$ (la cual tiene el mismo tipo de monotonía que f). El resultado anunciado es el siguiente:

Teorema 2.4. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

Demostración. El hecho que J es un intervalo se demuestra usando el Teorema 2.2 (ejercicio). Probemos que f^{-1} es continua en todo punto $\bar{y} \in J$. La demostración se separa en distintos casos según si f es creciente o decreciente, y según si $\bar{y}$ es un extremo del intervalo J o se encuentra en su interior. En todos los casos la idea de la demostración es básicamente la misma, de modo que nos limitaremos a analizar la situación más simple en que f es creciente e $\bar{y}$ se encuentra en el interior del intervalo J.

Sea $\bar{y}_n \in J$ tal que $y_n \to \bar{y}$. Sea $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ y $x_n = f^{-1}(y_n)$. Notemos que $\bar{x}$ se encuentra en el interior del intervalo I (ejercicio, usar la monotonía de f). Debemos probar que $x_n \to \bar{x}$, para lo cual usaremos la definición de convergencia.

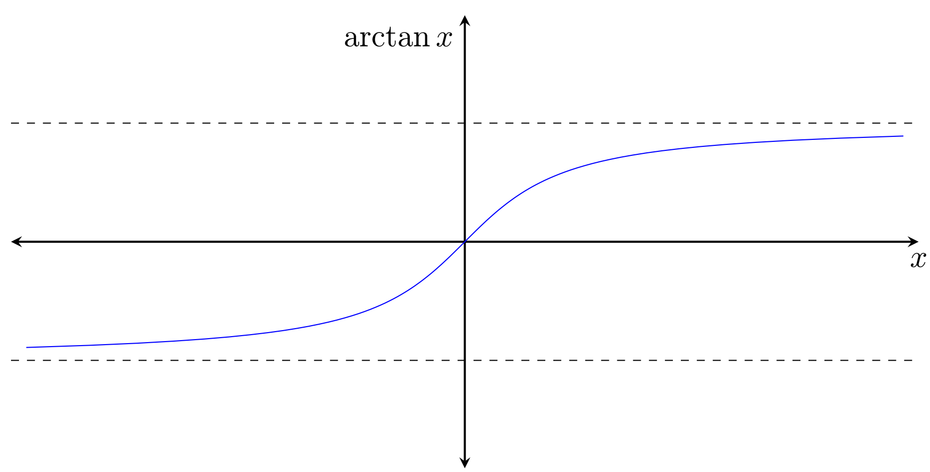


Sea $\varepsilon > 0$ pequeño tal que $[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon] \subset I$. Como $\bar{x}-\varepsilon < \bar{x} < \bar{x}+\varepsilon$, la monotonía de f implica $f(\bar{x}-\varepsilon) < \bar{y} < f(\bar{x}+\varepsilon)$ y por lo tanto, dado que $y_n \to \bar{y}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(\bar{x}-\varepsilon) < y_n < f(\bar{x}+\varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Como f^{-1} es también creciente, resulta $\bar{x}-\varepsilon < f^{-1}(y_n) < \bar{x}+\varepsilon$, es decir $x_n \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$.

$\square$

Ejemplo 2.4.
La función $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es la inversa de la función exp, y en consecuencia es continua. Esta es una demostración alternativa de la continuidad del logaritmo, que ya habíamos demostrado antes.

Ejemplo 2.5.
La función $x \mapsto \tan(x)$ no es biyectiva. Sin embargo su restricción al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es continua y estrictamente creciente con recorrido $\text{Rec}(\tan) = \mathbb{R}$. En consecuencia posee una inversa que resulta ser continua, la cual denotaremos $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Aparte de ser continua, esta función es impar, creciente, $\arctan(0) = 0$, y satisface $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A partir del gráfico de tan obtenemos un gráfico aproximado para arctan:



Ejemplo 2.6.
La función $\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ es continua y creciente, con recorrido igual a $[-1, 1]$. Su inversa es en consecuencia continua y creciente. Se denota $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. Similarmente, $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua y decreciente, con recorrido $[-1, 1]$. Su inversa $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ es por lo tanto continua y decreciente.

Ejemplo 2.7.
La función $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y creciente y su recorrido es todo $\mathbb{R}$. Su inversa $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es por lo tanto continua y creciente. Del mismo modo, $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y creciente con $\mathrm{Rec}(\tanh) = (-1, 1)$. Luego, su inversa $\tanh^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ es continua y creciente.

2.4 Continuidad uniforme

A lo largo de este capítulo hemos analizado la noción de continuidad en términos de sucesiones: una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $\bar{x} \in A$ si toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ que converge hacia $\bar{x}$ es transformada por f en una sucesión $f(x_n)$ que converge hacia $f(\bar{x})$, es decir

$$x_n \in A, x_n \to \bar{x} \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(\bar{x}).$$

Vimos además, una caracterización sin usar sucesiones en el Teorema 1.5. Usando dicha carateri-zación $\varepsilon - \delta$, es posible definir un criterio de continuidad más fuerte.

A modo de motivación, veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.8.
Ilustremos la caraterización $\varepsilon - \delta$ en un caso sencillo. Consideremos la función $f(x) = x^3$ y un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Sabemos que f es continua en $\bar{x}$ de modo que se debe tener la propiedad (1.2). Verifiquemos esta última de manera directa. Tomemos $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |x^3 - \bar{x}^3| \leq \varepsilon.$$

La condición $|x^3 - \bar{x}^3| \leq \varepsilon$ puede escribirse como $\sqrt[3]{\bar{x}^3 - \varepsilon} \leq x \leq \sqrt[3]{\bar{x}^3 + \varepsilon}$, la cual a su vez es equivalente a (ejercicio)

$$|x - \bar{x}| \leq \sqrt[3]{|\bar{x}|^3 + \varepsilon} - |\bar{x}|$$

de tal forma que basta tomar $\delta = \sqrt[3]{|\bar{x}|^3 + \varepsilon} - |\bar{x}|$.

Vale la pena notar que en general δ depende de ε pero también del punto $\bar{x}$ en consideración, vale decir, $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x})$. En particular en el ejemplo anterior se observa que la cantidad δ se hace más pequeña a medida que se reduce $\varepsilon > 0$ y, asimismo, para un valor fijo de ε se tiene que δ tiende a 0 a medida que $|\bar{x}|$ crece. Esto último no siempre ocurre y para ciertas funciones es posible encontrar $\delta > 0$ que satisface la propiedad (1.2) *independientemente* del punto $\bar{x}$ en consideración.

Ejemplo 2.9.
Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$ definida en $[0, \infty)$ y $\bar{x} \geq 0$. Como f es continua en $\bar{x}$ se tiene la propiedad (1.2). Explícitamente, dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \varepsilon.$$

La condición $|\sqrt{x}-\sqrt{\bar{x}}|\leq\varepsilon$ es equivalente a $|x-\bar{x}|\leq\varepsilon^2+2\varepsilon\sqrt{\bar{x}}$ (ejercicio) de tal forma que basta tomar $\delta=\varepsilon^2+2\varepsilon\sqrt{\bar{x}}$. Este es el *mayor* valor de δ que garantiza la propiedad (1.2). Sin embargo, nada impide escoger δ más pequeño como por ejemplo $\delta=\varepsilon^2$. En este caso observamos que δ no depende de $\bar{x}$ y la implicancia

$$|x-\bar{x}|\leq\delta(\varepsilon)=\varepsilon^2 \quad\Rightarrow\quad |\sqrt{x}-\sqrt{\bar{x}}|\leq\varepsilon$$

se satisface independientemente del $\bar{x}$ considerado. Esta propiedad de uniformidad de δ respecto del punto $\bar{x}$ se conoce como *continuidad uniforme*.

DEFINICIÓN La función $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se dice *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que

$$(\forall x,y\in A)\quad |x-y|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon. \tag{2.1}$$

En virtud del Teorema 1.5 es claro que una función uniformemente continua resulta ser continua en todo su dominio. La recíproca no es cierta en general como lo muestra el ejemplo 2.8, a menos que el dominio de la función sea cerrado y acotado como probamos a continuación.

Teorema 2.5. *Sea $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\bar{x}\in A$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar la implicación $\Leftarrow$. Supongamos por contradicción que f es continua en todo punto $\bar{x}\in A$ pero que no es uniformemente continua, esto es, existe $\varepsilon>0$ tal que para cada $\delta>0$ podemos encontrar puntos $x,y\in A$ tales que $|x-y|\leq\delta$ y $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$. En particular, tomando $\delta=1/n$ encontraremos $x_n,y_n\in A$ tales que $|x_n-y_n|\leq1/n$ y $|f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon$. Ahora bién, puesto que A es cerrado y acotado podemos extraer una subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_{n_k}\to\bar{x}\in A$. En virtud de la desigualdad triangular se sigue que $y_{n_k}\to\bar{x}$. Con esto, usando la continuidad de f en el punto $\bar{x}$ obtenemos

$$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\to|f(\bar{x})-f(\bar{x})|=0$$

lo que constituye una contradicción evidente con el hecho que $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|>\varepsilon$ para todo $k\in\mathbb{N}$. $\square$

Guía de Ejercicios

1. Pruebe el Teorema de Weierstrass en su versión para máximo. Es decir, dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su máximo en $[a, b]$.

2. Probar las propiedades de la función arctan enunciadas en el Ejemplo 1.6.

3. Pruebe que si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo.

4. Probar la siguiente variante del Teorema 1.9: si $f : I \to J$ es estrictamente monótona y biyectiva con I y J intervalos, entonces f y f^{-1} son continuas.

5. Complete los ejemplos 1.9 y 1.10 de la tutoría.

6. Encuentre el recorrido de las funciones

$$f(x) = \ln(2 + \exp(x)) \ \text{ y } \ f(x) = \operatorname{sen}\left((x^2 - 1)/(x^2 + 1)\right).$$

7. Demuestre que la ecuación $x \operatorname{sen}(x) = 2$ posee infinitas soluciones. Haga un programa para estimar una solución positiva de esta ecuación, con al menos 6 decimales de precisión.

8. Demostrar que la ecuación $\exp(x)\cos(x) + 1 = 0$ tiene infinitas raíces reales.
Indicación: Considere intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ para aplicar el teorema del valor intermedio.

9. Si $h(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique.

10. Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio de grado n, tal que $c_0 c_n < 0$. Demostrar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$.

(a) Pruebe que existen $\underline{x}, \overline{x} \in [a,b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b].$$

(b) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a,b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a,b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

P2. Dado $a > 0$, sea $f\colon [0,2a] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que $\exists \bar{x} \in [0,a]$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{x}+a)$.

P3. Definimos la función en $\mathbb{R}$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

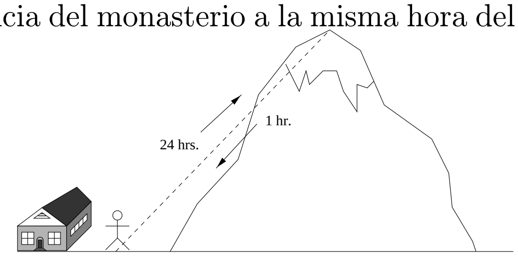
(a) Verifique que tanh es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$.

(c) Usando el Teorema del Valor Intermedio demuestre que $\forall y \in (-1,1)$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicación: analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

(d) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.

P4. Un monje vive en un monasterio a los pies de una montaña. El día 7 de cada mes a las 00:00 hrs., el monje comienza una caminata de 24 horas hasta la cumbre de la montaña. Una vez ahí, medita durante 6 horas y luego baja la montaña de vuelta al monasterio. La bajada le toma 1 hora. Demuestre que existen dos instantes, uno en el día 7 y otro en el día 8, en los que el monje se encuentra a la misma distancia del monasterio a la misma hora del día.



P5. Un conductor demora 5 horas en recorrer los (aproximadamente) 500 kms. que separan Santiago y Concepción. Pruebe que existe un tramo del viaje, de una longitud de 100 kms., que es recorrido en exactamente 1 hora.

P6. Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$.Demuestre que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(x-b)^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a,b]$.

P7. (a) Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(b) Considere F y G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$. Demuestre que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ F(x) < G(x)$.

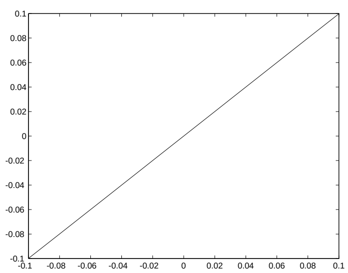
P8. Sea $f\colon [a,b] \to [a,b]$ una función continua. Demuestre que existe $x \in [a.b]$ tal que $f(x) = x$ (un tal punto se llama *punto fijo* para la función $f(\cdot)$).
Indicación: Considere $g(x) = f(x) - x$.

SEMANA 3

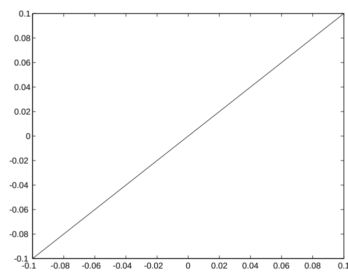
Derivadas

3.1 Funciones derivables

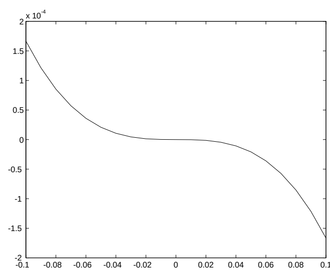
Las funciones más simples de analizar son las funciones afines $a(x) = n + mx$. Ahora bién, muchas funciones no lineales son "aproximadamente afines" cuando se las observa en una pequeña vecindad en torno a un punto. Por ejemplo, a simple vista, el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en el intervalo $[-0{,}1, 0{,}1]$ es prácticamente indistinguible del gráfico de $a(x) = x$. De hecho, la diferencia máxima entre ambas funciones es del orden de 1.7e-04, vale decir menos del 0.1 % del largo del intervalo.



$f(x) = \operatorname{sen}(x)$



$a(x) = x$



$o(x) = \operatorname{sen}(x) - x$

El mismo ejercicio en el intervalo $[-0{,}01, 0{,}01]$ arroja diferencias inferiores al 0.001 % del largo del intervalo. Observando intervalos más y más pequeños en torno a 0 las discrepancias se hacen cada vez menos perceptibles, de manera que la función afín $a(x) = x$ es una muy buena aproximación de la función $\operatorname{sen}(x)$ cerca de 0. Esto corresponde simplemente al hecho que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$, lo cual se puede escribir también en la forma

$$\operatorname{sen}(x) = x + o(x)$$

donde el *"error"* $o(x)$ es pequeño comparado con x: $\lim\limits_{x\to 0} o(x)/x = 0$.

Más generalmente consideremos una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in (a, b)$. Supongamos que deseamos encontrar una función afí n $a(x) = n + mx$ que sea una "buena" aproximación de $f(x)$ en torno a $\bar{x}$, es decir

$$f(x) \sim a(x) \quad \text{para} \quad x \sim \bar{x}.$$

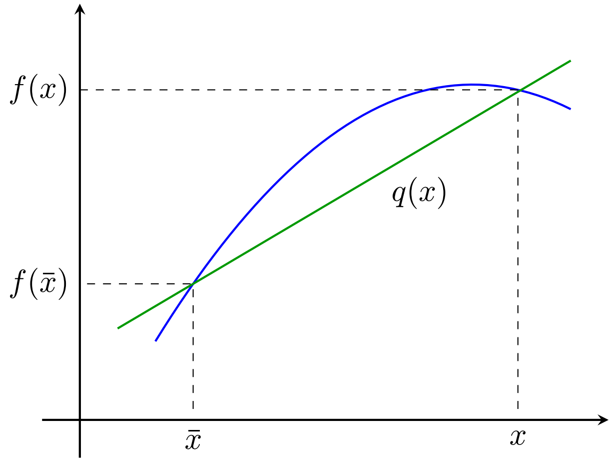
Es razonable imponer de partida que ambas funciones entreguen el mismo valor para $x = \bar{x}$, vale decir, a debe ser de la forma $a(x) = f(\bar{x}) + m(x - \bar{x})$. Con esto, la propiedad de aproximación se escribe

$$f(x) \sim f(\bar{x}) + m(x - \bar{x})$$

y por lo tanto la pendiente m debe ser tal que

$$m \sim q(x) := \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Dado que nos interesa la propiedad de aproximación para x cercano a $\bar{x}$, es razonable escoger m como el lí mite de los cuocientes $q(x)$ cuando x tiende a $\bar{x}$. Geométricamente, $q(x)$ corresponde a la pendiente de la recta secante al gráfico de f como muestra la figura, y el proceso lí mite se interpreta como la búsqueda de la recta tangente al gráfico de f en $\bar{x}$.



Definición Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$, si existe el lí mite

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Dicho lí mite se denota $f'(\bar{x})$ o bién $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ y se llama *derivada de* f *en* $\bar{x}$.

De manera equivalente, f es derivable en $\bar{x}$ si existe una pendiente $m = f'(\bar{x})$ tal que la función afín $a(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ es una aproximación de f en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$$

con $\lim_{h \to 0} o(h)/h = 0$. Usando el cambio de variable $h = x - \bar{x}$, lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

o también

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si f es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en dicho punto pues

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} [f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})] = f(\bar{x}).$$

Ejemplo 3.1.
Una función afín $f(x) = a + bx$ es obviamente derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $f'(\bar{x}) = b$. En particular las funciones constantes son derivables con derivada nula en todo punto.

Ejemplo 3.2.
La función $f(x) = |x|$ es derivable en todo punto $\bar{x} \neq 0$. De hecho, si $\bar{x} > 0$ la función f coincide con la función $g(x) = x$ en un entorno de $\bar{x}$ y por lo tanto $f'(\bar{x}) = 1$. Similarmente se tiene $f'(\bar{x}) = -1$ si $\bar{x} < 0$. Para $\bar{x} = 0$ la función $|x|$ no es derivable pues $\lim_{h \to 0} |h|/h$ no existe (los lí mites laterales son distintos).

Ejemplo 3.3.
La función definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, es continua en $\bar{x} = 0$ pero no es derivable en dicho punto pues $[f(h) - f(0)]/h = \operatorname{sen}(1/h)$ no converge cuando $h \to 0$.

Ejemplo 3.4.
La función $f(x) = x^2$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, pues

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = \frac{(\bar{x}+h)^2 - \bar{x}^2}{h} = \frac{2\bar{x}h + h^2}{h} = 2\bar{x} + h \longrightarrow 2\bar{x}$$

de modo que $f'(\bar{x}) = 2\bar{x}$.

Ejemplo 3.5.
El ejemplo de motivación del capí tulo muestra que la función $\operatorname{sen}(x)$ es derivable en $\bar{x} = 0$ con $\operatorname{sen}'(0) = 1$. Más generalmente, esta función es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y se tiene

$$\operatorname{sen}'(\bar{x}) = \cos(\bar{x}).$$

En efecto, la fórmula del seno de una suma de ángulos nos da

$$\frac{\operatorname{sen}(\bar{x}+h) - \operatorname{sen}(\bar{x})}{h} = \frac{\operatorname{sen}(\bar{x})(\cos(h) - 1) + \cos(\bar{x})\operatorname{sen}(h)}{h}$$

de modo que la conclusión se sigue de los lí mites conocidos : $\lim\limits_{h\to 0}[\cos(h) - 1]/h = 0$ y $\lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen}(h)/h = 1$.
Similarmente, $\cos(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ y se tiene

$$\cos'(\bar{x}) = -\operatorname{sen}(\bar{x}).$$

Esto resulta de la fórmula del coseno de una suma de ángulos que permite escribir

$$\frac{\cos(\bar{x}+h) - \cos(\bar{x})}{h} = \frac{\cos(\bar{x})(\cos(h) - 1) - \operatorname{sen}(\bar{x})\operatorname{sen}(h)}{h}.$$

Ejemplo 3.6.
La función $\exp(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x}$ con

$$\exp'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}).$$

En efecto, dado que $\lim\limits_{h\to 0}[\exp(h) - 1]/h = 1$ (límite conocido), se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(\bar{x}+h) - \exp(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \exp(\bar{x})\frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(\bar{x}).$$

Asimismo, el lí mite $\lim_{u\to 0} \ln(1+u)/u = 1$ implica que $\ln(x)$ es derivable en todo punto $\bar{x} > 0$ con

$$\ln'(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\bar{x}+h) - \ln(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h/\bar{x})}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{\bar{x}u} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

3.2 Reglas de cálculo de derivadas

Algebra de derivadas

Las propiedades algebraicas del límite nos permiten obtener reglas sencillas para calcular la derivada de una suma, producto y cuociente de funciones derivables.

Proposición 3.1. *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces:*
(a) $f + g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f+g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x}).$$

(b) fg es derivable en $\bar{x}$ con

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x}).$$

(c) Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces f/g es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}.$$

Demostración. La propiedad (a) resulta de la linealidad del lí mite junto con

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} + \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Análogamente, para ver (b) basta usar la identidad

$$\frac{f(x)g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f(x)\frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} + g(\bar{x})\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Observando que f es continua en $\bar{x}$ y usando álgebra de lí mites resulta que el primer término de la suma anterior converge a $f(\bar{x})g'(\bar{x})$, mientras que el segundo término tiende a $g(\bar{x})f'(\bar{x})$. La propiedad (c) se obtiene de manera similar usando la descomposición

$$\frac{f(x)/g(x) - f(\bar{x})/g(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{1}{g(x)g(\bar{x})}\left[g(\bar{x})\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f(\bar{x})\frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}}\right].$$

□

Ejemplo 3.7.
Para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la función $f_n(x) = x^n$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con

$$f_n'(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1}.$$

Los ejemplos de la sección anterior muestran que la fórmula vale para $n = 0, 1, 2$. Probemos por inducción que la fórmula es cierta para todo $n \geq 1$. En efecto, si el resultado se tiene para un cierto $n \geq 1$ entonces, de acuerdo a la proposición anterior la función $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x = f_n(x) \cdot x$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$f_{n+1}'(\bar{x}) = f_n'(\bar{x}) \cdot \bar{x} + f_n(\bar{x}) \cdot 1 = n\bar{x}^{n-1} \cdot \bar{x} + \bar{x}^n = (n+1)\bar{x}^n$$

lo cual concluye el paso de inducción.

Con esto, la fórmula para la derivada de un cuociente implica que para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la función $g_n(x) = x^{-n} = 1/x^n$ es derivable en todo punto $\bar{x} \neq 0$ con

$$g_n'(\bar{x}) = \frac{-n\bar{x}^{n-1}}{(\bar{x}^n)^2} = -n\bar{x}^{-n-1}.$$

Ejemplo 3.8.
Como corolario del ejemplo anterior se sigue que todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con

$$p'(\bar{x}) = a_1 + 2a_2\bar{x} + 3a_3\bar{x}^2 + \cdots + na_n\bar{x}^{n-1}.$$

Por ejemplo $p(x) = 1 + x^3 + 5x^7$ es derivable con $p'(\bar{x}) = 3\bar{x}^2 + 35\bar{x}^6$. Asimismo, toda función racional es derivable en su dominio. Por ejemplo $f(x) = x/(1 - x^2)$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, con

$$f'(\bar{x}) = \frac{1 \cdot (1 - \bar{x}^2) - \bar{x} \cdot (-2\bar{x})}{(1 - \bar{x}^2)^2} = \frac{1 + \bar{x}^2}{(1 - \bar{x}^2)^2}.$$

Ejemplo 3.9.
Las funciones $\tan(x)$ y $\operatorname{cotan}(x)$ son derivables en sus respectivos dominios y se tiene

$$\begin{aligned} \tan'(\bar{x}) &= \sec^2(\bar{x}), \\ \operatorname{cotan}'(\bar{x}) &= -\operatorname{cosec}^2(\bar{x}). \end{aligned}$$

La primera fórmula por ejemplo es válida para todo $\bar{x} \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, y se obtiene usando la fórmula de la derivada de un cuociente pues

$$\left(\frac{\operatorname{sen}}{\cos}\right)'(\bar{x}) = \frac{\operatorname{sen}'(\bar{x})\cos(\bar{x}) - \operatorname{sen}(\bar{x})\cos'(\bar{x})}{\cos^2(\bar{x})} = \frac{\cos^2(\bar{x}) + \operatorname{sen}^2(\bar{x})}{\cos^2(\bar{x})} = \frac{1}{\cos^2(\bar{x})}.$$

Ejemplo 3.10.
La regla del cuociente implica que $f(x) = \exp(-x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = -\exp(-x)$. De esto, usando álgebra de derivadas, se deduce

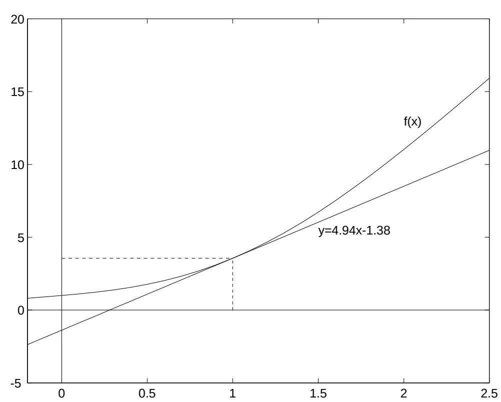
$$\begin{aligned} \sinh'(\bar{x}) &= \cosh(\bar{x}), \\ \cosh'(\bar{x}) &= \sinh(\bar{x}), \\ \tanh'(\bar{x}) &= 1/\cosh^2(\bar{x}). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11.
La función $f(x) = \exp(x) + x^2 \operatorname{sen}(x)$ es derivable en todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. En efecto, las funciones x^2 y $\operatorname{sen}(x)$ son derivables en todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto lo mismo ocurre con su producto $x^2 \operatorname{sen}(x)$. La suma de esta última con la función derivable $\exp(x)$, nos da la función $f(x)$ la cual resulta por lo tanto derivable en todo $\mathbb{R}$. El álgebra de derivadas nos permite calcular

$$f'(\bar{x}) = \exp'(\bar{x}) + 2\bar{x}\operatorname{sen}(\bar{x}) + \bar{x}^2 \operatorname{sen}'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}) + 2\bar{x}\operatorname{sen}(\bar{x}) + \bar{x}^2 \cos(\bar{x}).$$

En particular $f'(1) \sim 4{,}9415$ y puesto que $f(1) \sim 3{,}5598$ se obtiene que la aproximación afí n de $f(\cdot)$ en $\bar{x} = 1$ es la función

$$a(x) = 3{,}5598 + 4{,}9415(x - 1) = 4{,}9415x - 1{,}3818.$$



Regla de la cadena

La composición de funciones derivables sigue siendo derivable y existe una fórmula sencilla para calcular su derivada: la regla de la derivación en cadena, o simplemente *regla de la cadena.*

Teorema 3.1. *Sea* $f : (a, b) \to (c, d)$ *derivable en* $\bar{x} \in (a, b)$ *y* $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *derivable en* $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$. *Entonces* $g \circ f$ *es derivable en* $\bar{x}$ *con*

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}).$$

Demostración. Definiendo $q(y) := [g(y)-g(\bar{y})]/[y-\bar{y}]$ si $y \neq \bar{y}$ y $q(\bar{y}) := g'(\bar{y})$ podemos escribir $g(y) - g(\bar{y}) = q(y)[y-\bar{y}]$ con $\lim_{y\to\bar{y}} q(y) = g'(\bar{y})$. De aquí resulta

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{g(f(x)) - g(f(\bar{x}))}{x-\bar{x}} = \lim_{x\to\bar{x}} q(f(x))\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} = g'(\bar{y})f'(\bar{x}).$$

□

Observación: Usando la notación $\frac{df}{dx}$ para la derivada, la regla de la cadena adopta una forma más fácil de recordar: si $y = y(u)$ con $u = u(x)$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ejemplo 3.12.
Para $a > 0$, la función $f(x) = a^x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ con

$$f'(\bar{x}) = \ln(a)a^{\bar{x}}.$$

En efecto, por definición se tiene $f(x) = \exp(x\ln(a))$ la cual es la composición de la función exp con la función lineal $g(x) = x\ln(a)$. La regla de la cadena asegura que dicha composición es diferenciable y se tiene

$$f'(\bar{x}) = \exp'(\bar{x}\ln(a))g'(\bar{x}) = \exp(\bar{x}\ln(a))\ln(a) = \ln(a)a^{\bar{x}}.$$

Ejemplo 3.13.
Podemos también generalizar la regla de la derivada para las potencias al caso de potencias de exponente real. Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. La función $f(x) = x^a$ definida para $x > 0$ es derivable en todo $\bar{x} > 0$ con

$$f'(\bar{x}) = a\bar{x}^{a-1}.$$

Para ver esto basta expresar $f(x) = \exp(a\ln(x))$ y aplicar la regla de la cadena para obtener

$$f'(\bar{x}) = \exp(a\ln(\bar{x}))\frac{a}{\bar{x}} = \bar{x}^a\frac{a}{\bar{x}} = a\bar{x}^{a-1}.$$

En particular $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en todo $\bar{x} > 0$ con

$$f'(\bar{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}.$$

Ejemplo 3.14.
La función $f(x) = \tanh\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)$ es composición de funciones derivables. La regla de la cadena nos permite calcular:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tanh'\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right]' \\ &= \frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)}\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}\left[1+\operatorname{sen}^2(x)\right]' \\ &= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cosh^2\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}\right)\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}. \end{aligned}$$

Derivadas de funciones inversas

Teorema 3.2. *Sea $f:(a,b)\to(c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x}\in(a,b)$ con $f'(\bar{x})\neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ es derivable en $\bar{y}=f(\bar{x})$ con*

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}.$$

Demostración. Del capí tulo anterior sabemos que la función inversa f^{-1} es contí nua. De este modo, definiendo $x(y) = f^{-1}(y)$ se tiene $\lim\limits_{y\to\bar{y}} x(y) = \bar{x}$, y por lo tanto

$$\lim_{y\to\bar{y}} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\bar{y})}{y-\bar{y}} = \lim_{y\to\bar{y}} \frac{x(y)-\bar{x}}{f(x(y))-f(\bar{x})} = \frac{1}{f'(\bar{x})}.$$

□

Observación: Nuevamente en la notación $\frac{df}{dx}$ el resultado anterior adopta una forma sugerente: si $y = y(x)$ y $x = x(y)$ representa la función inversa, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy}.$$

Ejemplo 3.15.
La función $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, siendo la inversa de sen resulta derivable en todo punto $\bar{y}\in(-1,1)$. En efecto, en tal caso tenemos $\bar{x} = \arcsin(\bar{y}) \in (-\pi/2,\pi/2)$ y se tiene $\operatorname{sen}'(\bar{x}) = \cos(\bar{x}) \neq 0$, con lo cual

$$\arcsin'(\bar{y}) = \frac{1}{\operatorname{sen}'(\bar{x})} = \frac{1}{\cos(\bar{x})} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\bar{x})}} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{y}^2}}.$$

Ejemplo 3.16.
La función $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $\bar{x} \in (-\pi/2, \pi/2)$ con $\tan'(\bar{x}) = 1/\cos^2(\bar{x}) > 0$. Su inversa $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ es por lo tanto derivable en todo punto $\bar{y} = \tan(\bar{x})$ y se tiene

$$\arctan'(\bar{y}) = \frac{1}{\tan'(\bar{x})} = \cos^2(\bar{x}) = \frac{1}{1 + \tan^2(\bar{x})} = \frac{1}{1 + \bar{y}^2}.$$

Ejemplo 3.17.
La inversa de $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ es derivable en todo punto $\bar{y} \in (-1, 1)$ con

$$(\tanh^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(\bar{y}))} = \cosh^2(\tanh^{-1}(\bar{y})) = \frac{1}{1 - \bar{y}^2}.$$

Guía de Ejercicios

1. Demuestre que $f(x) = x^3$ es derivable en todo punto y que $f'(\bar{x}) = 3\bar{x}^2$.

2. Encuentre la aproximación afín de $\operatorname{sen}(x)$ en el punto $\bar{x} = 3\pi/4$.

3. Probar que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es diferenciable en $\bar{x} = 0$ con $f'(0) = 0$.

4. Sea $f(x) = 1 - \cos(x)$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ para $x \notin \mathbb{Q}$. Probar que f solo es derivable en $\bar{x} = 0$, y que $f'(0) = 0$.

5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Probar que toda función $h(\cdot)$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ es derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en 0 tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que f es derivable en todo punto y que $f'(\bar{x}) = f'(0)f(\bar{x})$.

7. Usando álgebra de derivadas, demuestre por inducción que las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(nx)$ y $g(x) = \cos(nx)$ son derivables con $f'(x) = n\cos(nx)$ y $g'(x) = -n\operatorname{sen}(nx)$.

8. Encuentre la aproximación afín de $f(x) = [\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)]\exp(-x)$ en el punto $\bar{x} = -1$.

9. Probar que $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ es derivable en todo punto $y \in (-1, 1)$ con $\arccos'(y) = -1/\sqrt{1 - y^2}$.

10. Probar que la función $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $y \in \mathbb{R}$ con $(\sinh^{-1})'(y) = 1/\sqrt{y^2 + 1}$.

11. Probar que $\cosh^{-1} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $y > 1$ con $(\cosh^{-1})'(y) = 1/\sqrt{y^2 - 1}$. ¿Qué ocurre en $y = 1$?

Guía de Problemas

P1. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

a) $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

b) $g(a+b) = g(a)g(b)$.

Demuestre que $g'(x) = g(x)$.

P2. Sea $c > 1$. Probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en 0 si y solamente si existe el límite $L = \lim\limits_{x\to 0}[f(cx) - f(x)]/x$. Notar que $f'(0) = L/(c-1)$.

P3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f' = af(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, con a constante. Demostrar que $f(x) = f(0)e^{ax}$.
Indicación: Considere $g(x) = e^{-ax}f(x)$.

P4. Sean f_i funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (derivables), donde $i = 1, \ldots, n$. Sea

$$G_n = f_1(f_2(\cdots(f_n(x))\cdots)).$$

Demuestre que:

$$G_n'(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i'(f_{i+1}(f_{i+2}(\ldots(f_n(x))\ldots)))$$

P5. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f\mathbb{R}\colon \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(kg(x))$. Muestre que

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0.$$

P6. Sea f derivable en x_0, calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

P7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq a(x-y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

con $a \geq 0$. Pruebe que $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

SEMANA 4

Derivadas: Los teoremas

4.1 Máximos y mínimos: la regla de Fermat

En lo sigue presentaremos diversas aplicaciones de la derivada al estudio de funciones. La primera corresponde a la regla de Fermat que permite caracterizar los puntos donde una función derivable alcanza su mínimo y su máximo. Para enunciar el resultado de manera precisa diremos que un punto $\bar{x}$ es un *mínimo local* de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon).$$

De manera análoga se define un *máximo local.*

Teorema 4.1. *Si $\bar{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$.*

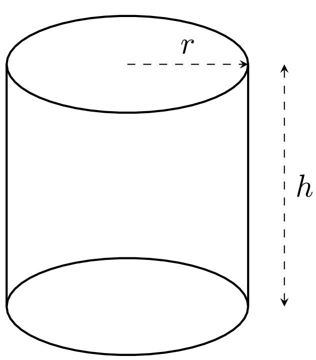
Demostración. Si $\bar{x}$ es mínimo local, para x cercano a $\bar{x}$ se tiene $f(x) \geq f(\bar{x})$, con lo cual

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leq 0 \leq \lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}),$$

es decir $f'(\bar{x}) = 0$. El caso de un máximo local es análogo. □

Ejemplo 4.1.
Deseamos diseñar un cilindro de radio r y altura h cuyo volúmen $V = \pi r^2 h$ sea máximo, para una superficie total dada $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. De esta última relación se obtiene $h = S/2\pi r - r$, con lo cual obtenemos la expresión del volúmen exclusivamente en función del radio

$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3.$$

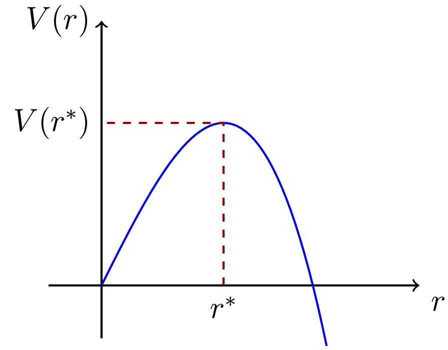


El radio óptimo se obtiene de maximizar la función $V(r)$, para lo cual buscamos la solución de la ecuación $V'(r) = 0$, vale decir

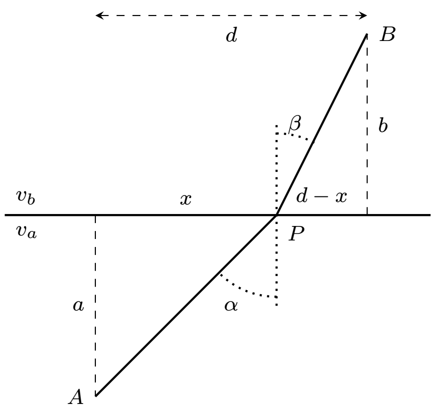
$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

la cual tiene dos soluciones. Como nos interesan radios positivos, obtenemos $r^* = \sqrt{S/6\pi}$ al cual le corresponde un volúmen máximo $V(r^*) = \sqrt{S^3/54\pi}$ y una altura óptima $h^* = \sqrt{2S/3\pi} = 2r^*$.

En rigor aún no podemos asegurar que la solución encontrada corresponda efectivamente a un máximo del volúmen, pues el criterio $V'(r) = 0$ no discrimina entre un mínimo y un máximo. Más adelante veremos criterios que permiten hacer tal distinción. Por el momento, para convencernos que la solución es un máximo, podemos hacer un gráfico aproximado de la función $V(r)$.



Ejemplo 4.2.
Un salvavidas A debe auxiliar a un bañista B. Corre desde A hasta un punto P al borde del mar, prosiguiendo a nado hasta B. Se desea determinar la posición de P que garantiza alcanzar B en el menor tiempo posible.



Suponiendo conocidas las velocidades en la tierra v_a y en el mar v_b, así como las distancias a, b, d, el tiempo se puede calcular como

$$T_{AB} = T_{AP} + T_{PB} = \frac{d_{AP}}{v_a} + \frac{d_{PB}}{v_b}$$

vale decir, en función de la variable x,

$$T_{AB}(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_a} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_b}.$$

Esta función es continua y en consecuencia alcanza su mínimo en $[0, d]$. Más adelante veremos herramientas que permiten probar que el mínimo es de hecho alcanzado en un único punto $x \in (0, d)$, el cual queda por lo tanto caracterizado por la ecuación $T'_{AB}(x) = 0$, vale decir

$$\frac{x}{v_a\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{v_b\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0. \tag{4.1}$$

Este modelo tiene una importante aplicación física. En efecto, el *Principio de Fermat* en óptica establece que la luz viaja siguiendo trayectorias de tiempo mínimo. En un medio uniforme la velocidad de la luz es constante de modo que la trayectoria de tiempo mínimo entre dos puntos A y B coincide con la de longitud mínima, vale decir, el segmento de recta que une A con B. Cuando A y B se encuentran en medios caracterizados por distintas velocidades de la luz v_a y v_b (aire/agua por ejemplo), la trayectoria exhibe un quiebre al pasar de un medio al otro, fenómeno conocido como *difracción*. En este contexto la relación (4.1), llamada *Ley de Snell*, se expresa en función de los ángulos α y β como

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v_a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v_b}.$$

4.2 El teorema del valor medio

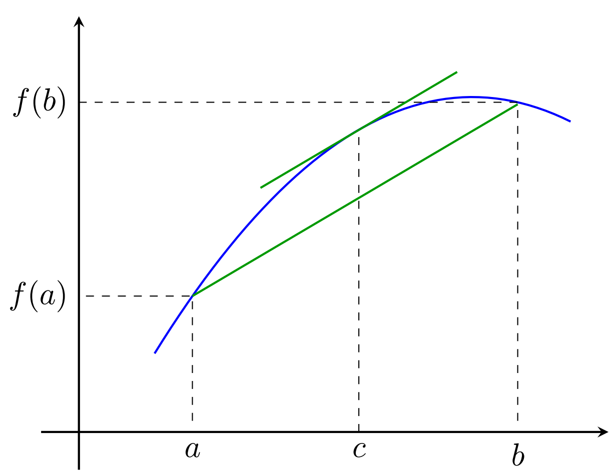
Al iniciar el capítulo motivamos la noción de derivada observando que ciertas funciones f (las derivables) se "parecen" (localmente) a sus aproximaciones afines $a(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$. Es natural conjeturar entonces que, al menos localmente, las propiedades de una función y de su aproximación coincidan. Así por ejemplo, si la aproximación es creciente, esto es si $f'(\bar{x}) > 0$, esperamos que f sea también creciente en una vecindad de $\bar{x}$. Esta conjetura no es del todo cierta y requiere ser precisada. La técnica básica para relacionar las propiedades de f con las de sus aproximaciones afines es el Teorema del Valor Medio (no confundir con el Teorema de los Valores Intermedios).

Teorema 4.2 (TVM). *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Demostración. Definiendo la función auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ mediante

$$h(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)],$$

el resultado se reduce a probar la existencia de $\xi \in (a, b)$ tal que $h'(\xi) = 0$.

Claramente $h(a) = h(b) = 0$. Si existe algún $x \in (a, b)$ tal que $h(x) > 0$, el máximo de h se alcanza en un punto $\xi \in (a, b)$ el cual satisface $h'(\xi) = 0$. Análogamente, si para algún $x \in (a, b)$ se tiene $h(x) < 0$, basta tomar $\xi \in (a, b)$ un punto donde h alcance su mínimo. Si ambas propiedades fallan, la función h es idénticamente nula en el intervalo (a, b), y podemos tomar $\xi \in (a, b)$ arbitrario. $\square$

4.3 Algunas aplicaciones de la derivada

En esta sección veremos la utilidad de la noción de derivada para el cálculo de límites, así como para estudio de la monotonía y convexidad de funciones.

La regla de l'Hôpital

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada *regla de l'Hôpital* para el cálculo de límites de la forma $0/0$ o ∞/∞.

Teorema 4.3. *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), tales que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4.2}$$

siempre que este último límite exista.

Demostración. Para el caso $L = 0$, definiendo $f(a) = g(a) = 0$, el resultado es una aplicación directa del TVM y de la regla de composición para límites. El caso $L = \infty$ es más delicado y se propone como ejercicio (difícil pero instructivo). □

Obviamente, la regla de l'Hôpital también se aplica para límites con $x \to a^-$, $x \to a$, e incluso para límites con $x \to \infty$: si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ o ∞ y $g'(x) \neq 0$ para x suficientemente grande, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-f'(1/y)/y^2}{-g'(1/y)/y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

siempre que este último límite exista.

Ejemplo 4.3.
Veamos un límite conocido: $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))/x^2 = 1/2$. Este límite es de la forma $0/0$. El cuociente de derivadas es $\operatorname{sen}(x)/2x$ el cual converge a $1/2$, y por lo tanto podemos invocar la regla de l'Hôpital para concluir.

La regla de l'Hôpital nos permite ir un poco más lejos y probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \frac{1}{24}.$$

En efecto, aplicando reiteradamente l'Hôpital se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{12x^2} = \frac{1}{24}.$$

Ejemplo 4.4.
Calculemos $\lim_{x\to 0}[\exp(x)-1-x]/x^2$. La aplicación reiterada de la regla de l'Hôpital conduce a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 4.5.
Calculemos $\lim_{x\to 1}[\ln(x)-1+x]/[\arctan(x)-\pi/4]$. Nuevamente estamos en presencia de un límite de la forma $0/0$. L'Hôpital conduce a

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-1+x}{\arctan(x)-\pi/4}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x+1}{1/(1+x^2)}=4.$$

Ejemplo 4.6.
Consideremos el límite $\lim_{x\to\infty}\ln(1+\exp(x))\operatorname{sen}(1/x)$, el cual puede escribirse como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\exp(x))}{1/\operatorname{sen}(1/x)}$$

que es de la forma ∞/∞. La regla de l'Hôpital conduce a estudiar el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)/(1+\exp(x))}{\cos(1/x)/[x^2\operatorname{sen}^2(1/x)]}.$$

Usando álgebra de límites se ve que esta última expresión tiende a 1, de modo que

$$\lim_{x\to\infty}\ln(1+\exp(x))\operatorname{sen}(1/x)=1.$$

Ejemplo 4.7.
(Cálculo de asíntotas) Recordemos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ posee una recta asíntota $y=mx+n$ en ∞, si existen los límites $m=\lim_{x\to\infty}f(x)/x$ y $n=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx$. Observando la forma del límite que define la pendiente m, la regla de l'Hôpital nos permite deducir que si $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ existe, entonces

$$m=\lim_{x\to\infty}f'(x).$$

Una observación análoga vale para el comportamiento asintótico de f en $-\infty$.

Consideremos por ejemplo la función $f(x)=\ln(1+\exp\sqrt{1+ax^2})$ donde $a>0$. Para determinar si existe asíntota en ∞ calculamos

$$f'(x)=\frac{\exp\sqrt{1+ax^2}}{1+\exp\sqrt{1+ax^2}}\frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}}.$$

Dado que $\sqrt{1+ax^2} \to \infty$ y $\lim\limits_{u\to\infty} \exp(u)/[1+\exp(u)] = 1$, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp\sqrt{1+ax^2}}{1+\exp\sqrt{1+ax^2}} = 1.$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{1+ax^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1/x^2+a}} = \sqrt{a}$$

de modo tal que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x) = \sqrt{a}.$$

Como ejercicio, demuestre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx = 0$, de donde se sigue que f tiene una recta asíntota en ∞ descrita por la ecuación $y = \sqrt{a}x$.

4.4 Derivadas y monotonía

Para una función creciente, los cuocientes $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x})$ son no-negativos y por lo tanto, si f es derivable, se sigue que $f'(\bar{x}) \geq 0$. De igual forma, si f es decreciente se tiene $f'(\bar{x}) \leq 0$. El TVM permite probar las implicancias recíprocas.

Teorema 4.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a,b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

Demostración. Basta notar que si $x, y \in [a,b]$ con $y > x$, el TVM implica que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \geq 0$ (resp $\leq, >, <$) para algún $c \in (x,y)$. $\square$

Ejemplo 4.8.
Consideremos la función $f(x) = x\exp(-x)$ definida y diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Dado que $f'(x) = (1-x)\exp(-x)$, observamos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 1)$ mientras que $f'(x) < 0$ para $x \in (1,\infty)$. En consecuencia f es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1,\infty)$. En particular obtenemos que la función f alcanza su máximo en el punto $\bar{x} = 1$, tomando el valor $f(1) = 1/e$, vale decir $x\exp(-x) \leq 1/e$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la siguiente tabla de crecimiento:

	$-\infty$ 1	∞
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Ejemplo 4.9.
Estudiemos el crecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$. La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$. Por lo tanto la tabla de crecimiento de f viene dada por

	$-\infty$	-1	2	∞
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

y en consecuencia f es creciente en $(-\infty, -1]$, decreciente en $[-1, 2]$, y nuevamente creciente en $[2, \infty)$. El punto $\bar{x} = -1$ corresponde a un máximo local, mientras que $\overline{x} = 2$ es un mínimo local.

Ejemplo 4.10.
Consideremos nuevamente el Ejemplo 4.1 y probemos que el valor $r^* = \sqrt{S/6\pi}$ corresponde efectivamente al radio del cilindro de superficie S que tiene volumen máximo. La función volumen viene dada por $V(r) = Sr/2 - \pi r^3$, cuya derivada es $V'(r) = S/2 - 3\pi r^2$. De este modo se tiene $V'(r) > 0$ para $r \in (0, r^*)$ y $V'(r) < 0$ para $r > r^*$. Por lo tanto la función V es creciente en $[0, r^*]$ y decreciente en $[r^*, \infty)$, de modo tal que r^* entrega efectivamente un máximo para $V(r)$.

Ejemplo 4.11.
Reconsideremos ahora el problema de trayectoria de tiempo mínimo del Ejemplo 4.2. Vimos que la función $T_{AB}(x)$ es derivable en todo punto $x \in (0, d)$, con

$$T'_{AB}(x) = \frac{x}{v_a\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(d-x)}{v_b\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}.$$

Dado que $T'_{AB}(0) < 0$ y $T'_{AB}(d) > 0$, el TVI asegura la existencia de algún $\bar{x} \in (0, d)$ tal que $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$. Por otra parte la derivada de la función T'_{AB} está dada por

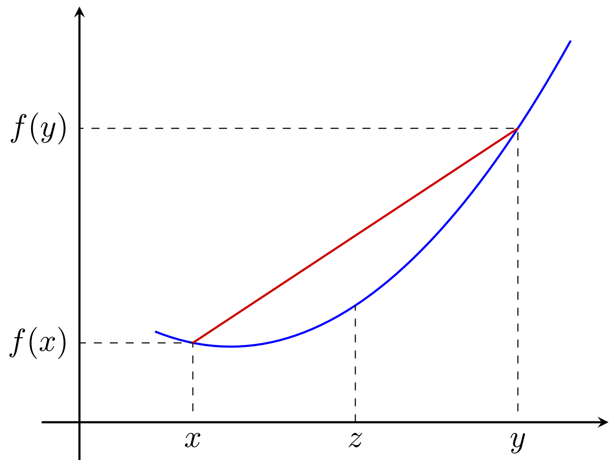
$$T''_{AB}(x) = \frac{a^2}{v_a[x^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{b^2}{v_b[(d-x)^2 + b^2]^{3/2}}$$

la cual es positiva, de modo que T'_{AB} es estrictamente creciente en $(0, d)$. Como $T'_{AB}(\bar{x}) = 0$, se sigue que $T'_{AB}(x)$ es negativa en $(0, \bar{x})$ y positiva en $(\bar{x}, d)$, y por consiguiente T_{AB} es decreciente en $(0, \bar{x})$ y creciente en $(\bar{x}, d)$. Esto prueba que $\bar{x} \in (0, d)$ es el único mínimo de la función T_{AB}.

4.5 Derivadas y convexidad

Una propiedad geométrica de las funciones, que permite hacerse una idea más precisa de la forma de su gráfico, es la convexidad o concavidad. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x) \qquad \forall\, x < z < y. \tag{4.3}$$



La desigualdad (4.3) se puede escribir en la forma

$$[f(z) - f(x)](y - x) \leq \{[f(y) - f(z)] + [f(z) - f(x)]\}\,(z - x)$$

o también $[f(z) - f(x)](y - z) \leq [f(y) - f(z)](z - x)$, de modo que (4.3) equivale a

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{4.4}$$

mostrando que la convexidad corresponde a la monotonía de las pendientes de las rectas secantes al gráfico de f. Esto conduce a la siguiente caracterización.

Teorema 4.5. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ ssi f' es creciente en (a, b).*

Demostración. Si f es convexa y $x < y$, tomando $z \in (x, y)$ y $v > y$ se obtiene

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Haciendo $z \to x^+$ y $v \to y^+$ se sigue $f'(x) \leq f'(y)$ de modo que f' es creciente. Recíprocamente, si f' es creciente y $x < z < y$, la desigualdad de convexidad (4.4) resulta de usar el TVM el cual permite encontrar $c \in (x, z)$ y $d \in (z, y)$ tales que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

$\square$

Análogamente, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *cóncava* si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de $-f$ y por lo tanto, en el caso diferenciable, a que f' sea decreciente.

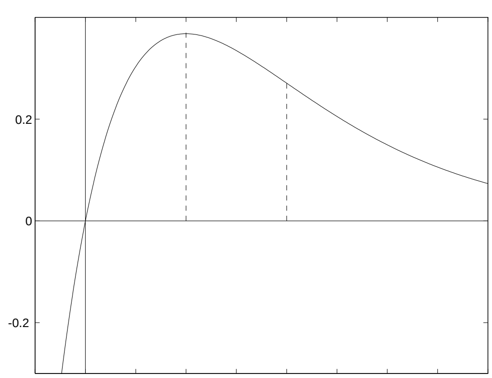
Ejemplo 4.12.
La función $f(x) = x^2$ tiene derivada $f'(x) = 2x$ la cual es creciente, y por lo tanto x^2 es convexa. Del mismo modo para $f(x) = \exp(x)$ se tiene que $f'(x) = \exp(x)$ es creciente y en consecuencia $\exp(x)$ es convexa. Para la función $f(x) = \ln(x)$ en cambio, se tiene que $f'(x) = 1/x$ la cual es decreciente en $(0, \infty)$ y por lo tanto ln es cóncava. Finalmente, para $f(x) = x^3$ se tiene $f'(x) = 3x^2$ la cual es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$, de modo que x^3 es cóncava en $(-\infty, 0]$ y convexa en $[0, \infty)$.

A diferencia de los ejemplos anteriores, en muchos casos la monotonía de $f'(x)$ no es evidente. Sin embargo, si la función $f'(x)$ es ella misma diferenciable, podemos estudiar su monotonía a través de los signos de su derivada, que denotamos $f''(x)$.

Ejemplo 4.13.
Consideremos la función $f(x) = x\exp(-x)$. Ya vimos en el Ejemplo 4.8 que $f'(x) = (1 - x)\exp(-x)$ con lo cual obtuvimos que f es creciente en $(-\infty, 1]$ y decreciente en $[1, \infty)$. Para estudiar la convexidad de f debemos determinar el crecimiento de la función $g(x) = f'(x)$. Como esta última es diferenciable bastará estudiar los signos de su derivada $g'(x) = f''(x) = (x - 2)\exp(-x)$. Claramente $g'(x) > 0$ ssi $x > 2$, de donde $g = f'$ es creciente en $[2, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 2]$. Concluimos que f es cóncava en $(-\infty, 2]$ y convexa en $[2, \infty)$. Los cálculos anteriores se resumen convenientemente en la tabla de convexidad:

	$-\infty$ 2	∞
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Un gráfico aproximado de la función es el siguiente:



4.6 Derivadas de orden superior

En la sección anterior vimos la relación entre f' y la monotonía de f, así como entre f'' y la convexidad/concavidad de f. El significado geométrico de las derivadas de orden superior es menos evidente, pero ellas son útiles para construir aproximaciones polinomiales de la función, más precisas que la aproximación afín dada por la derivada primera. Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

con la convención $f^{[0]}(x) = f(x)$. En particular $f^{[1]}(\bar{x}) = f'(\bar{x})$, $f^{[2]}(\bar{x}) = f''(\bar{x}), \ldots$ Notar que para que f tenga una derivada de orden k en $\bar{x}$, $f^{[k-1]}(x)$ debe existir al menos en un intervalo $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ y ser derivable en $\bar{x}$.

Si f admite una derivada de orden k en todo punto de un intervalo (a, b), entonces $f^{[k-1]}$ (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a k) son continuas en (a, b). Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a, b)$ si es k veces derivable en todo punto del intervalo (a, b), y la función $f^{[k]} : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua. Si esto es cierto para todo k, diremos que f es de clase C^∞.

Ejemplo 4.14.
Las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ poseen derivadas de todos los órdenes y son de clase C^∞. En efecto, sabemos que $f'(\bar{x}) = \cos(\bar{x})$ y $g'(\bar{x}) = -\operatorname{sen}(\bar{x})$. De manera inductiva se encuentra que

$$\operatorname{sen}^{[k]}(\bar{x}) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\bar{x}) & \text{si } k = 0 \pmod 4, \\ \cos(\bar{x}) & \text{si } k = 1 \pmod 4, \\ -\operatorname{sen}(\bar{x}) & \text{si } k = 2 \pmod 4, \\ -\cos(\bar{x}) & \text{si } k = 3 \pmod 4, \end{cases}$$

y análogamente para las derivadas sucesivas de cos.

4.7 Desarrollos limitados

Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado de orden k en torno al punto $\bar{x} \in (a, b)$ si existen constantes $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + \cdots + a_k(x - \bar{x})^k + o((x - \bar{x})^k).$$

con $\lim\limits_{u \to 0} o(u^k)/u^k = 0$. Usando el cambio de variables $h = x - \bar{x}$, la propiedad se escribe de manera equivalente

$$f(\bar{x} + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_k h^k + o(h^k).$$

Un desarrollo limitado de orden k es por lo tanto una aproximación polinomial, cuyo error de aproximación es pequeño en comparación con $(x - \bar{x})^k$. La herramienta básica para obtener tales aproximaciones son los desarrollos de Taylor descritos a continuación.

Teorema 4.6. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, k-veces derivable en $\bar{x}\in(a,b)$, y sea*

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x-\bar{x}) + o((x-\bar{x})^k)$$

con $\lim\limits_{h\to 0} o(h^k)/h^k = 0$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que f es $(k-1)$ veces derivable en $I_\epsilon = (\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon)$, y sea $\tilde{f}(x) := f(x) - T_f^k(x-\bar{x})$. Notando que $\tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}'(\bar{x}) = \cdots = \tilde{f}^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$, al igual que para la función $g(x) := (x-\bar{x})^k$, podemos aplicar el TVM inductivamente $(k-1)$ veces y deducir que para todo $x \in I_\epsilon, x \neq \bar{x}$ existe $\xi = \xi(x)$ (en $(\bar{x}, x)$ o $(x, \bar{x})$ según corresponda) tal que

$$\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}^{[k-1]}(\xi)}{g^{[k-1]}(\xi)} = \frac{1}{k!}\left[\frac{f^{[k-1]}(\xi) - f^{[k-1]}(\bar{x})}{\xi - \bar{x}} - f^{[k]}(\bar{x})\right].$$

Dado que $\xi = \xi(x) \to \bar{x}$, la regla de composición de límites implica que el lado derecho tiende a 0, lo que permite concluir. □

Observación: La recíproca es en general falsa: el hecho que una función admita un desarrollo limitado de orden k en $\bar{x}$ no implica la existencia de $f^{[k]}(\bar{x})$. Considerar por ejemplo la función $f(x) = x \operatorname{sen} x^2$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ si no, la cual admite el desarrollo limitado $f(x) = x^3 + o(x^3)$ pero que solamente es derivable en $\bar{x} = 0$ y por lo tanto no tiene derivada segunda ni menos tercera en dicho punto.

Ejemplo 4.15.
La función $f(x) = \exp(x)$ es de clase C^∞ con $f^{[k]}(0) = 1$ para todo k. Así, su desarrollo limitado de orden k en torno a 0 viene dado por

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k).$$

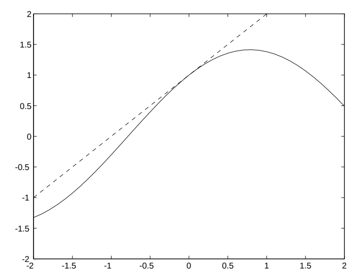
Ejemplo 4.16.
La función $f(x) = -\ln(1-x)$ es derivable en $(-\infty, 1)$ con $f'(x) = 1/(1-x)$. Se sigue que $f''(x) = 1/(1-x)^2, f'''(x) = 2/(1-x)^3, \ldots, f^{[k]}(x) = (k-1)!/(1-x)^k$. En consecuencia f es de clase C^∞ en $(-\infty, 1)$, y su desarrollo limitado de orden k en torno a 0 es

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^k}{k} + o(x^k).$$

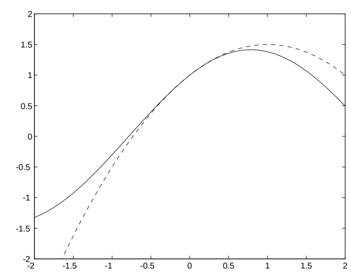
Ejemplo 4.17.
Sea $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$. Los desarrollos de Taylor de orden 1,2 y 3 en torno a 0 están dados por

$$\begin{aligned} T_f^1(x) &= 1 + x \\ T_f^2(x) &= 1 + x - x^2/2 \\ T_f^3(x) &= 1 + x - x^2/2 - x^3/6 \end{aligned}$$

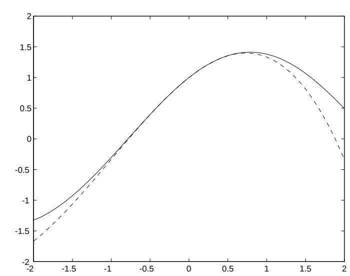
Los siguientes gráficos ilustran como los desarrollos de Taylor (linea discontinua) se aproximan cada vez mejor a la función original $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$.



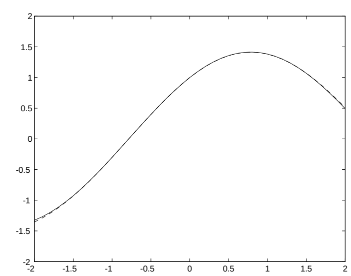
$T_f^1(x)$



$T_f^2(x)$



$T_f^3(x)$



$T_f^6(x)$

Los ejemplos que siguen ilustran como se pueden combinar desarrollos limitados conocidos para obtener desarrollos de funciones más complejas.

Ejemplo 4.18.
Los desarrollos limitados se pueden sumar y multiplicar, operando básicamente como si se tratara de polinomios. Consideremos por ejemplo los desarrollos limitados

$$\begin{aligned} \text{sen}(x) &= x - x^3/6 + o(x^4) \\ \exp(-x) &= 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + o(x^3). \end{aligned}$$

Usando el hecho que un término $o(x^m)$ es también $o(x^k)$ si $k \leq m$, se obtiene

$$\exp(-x) + \text{sen}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Asimismo, el hecho que $x^m = o(x^k)$ si $m > k$ y también $f(x)o(x^k) = o(x^{m+k})$ siempre que

$\lim_{x\to 0} |f(x)/x^m| < \infty$ (ejercicio), se obtiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x)\exp(-x) &= \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]\cdot\left[1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] \\
&= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{36} + o(x^4)\exp(-x) + o(x^3)\operatorname{sen}(x) \\
&= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.19.
Los desarrollos limitados también se pueden componer. Por ejemplo, para obtener un desarrollo limitado de orden 2 de $f(x) = \ln[1 + \exp(x)]$ en torno a $\bar{x} = 0$, podemos usar el desarrollo $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ que permite escribir

$$f(x) = \ln[2 + x + x^2/2 + o(x^2)].$$

Por otro lado, dado que

$$\ln[2 + z] = \ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + o(z^2)$$

reemplazando $z = x + x^2/2 + o(x^2)$ se obtiene

$$f(x) = \ln 2 + \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]}{2} - \frac{[x + x^2/2 + o(x^2)]^2}{8} + o([x + x^2/2 + o(x^2)]^2).$$

Finalmente, para obtener el desarrollo buscado es suficiente identificar los coeficientes de las potencias de x de grado menor o igual que 2, pues todos los términos restantes son de orden $o(x^2)$. Con esto se llega a

$$\ln[1 + \exp(x)] = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

Obviamente este mismo resultado se obtiene de calcular el desarrollo de Taylor de orden 2, pues $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = 1/2$ y $f''(0) = 1/4$.

Ejemplo 4.20.
Los desarrollos limitados también son útiles para calcular límites de la forma $0/0$. En rigor, se trata de otra forma de la regla de l'Hôpital. Ilustremos esto a través de un ejemplo sencillo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\ln(1 + 2x^2)}.$$

La primera potencia (no nula) en el desarrollo limitado del denominador es x^2, más exactamente, $\ln(1+2x^2) = 2x^2 + o(x^2)$. Haciendo un desarrollo de orden 2 del numerador se obtiene $\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = x^2 + o(x^2)$, de modo que el límite buscado es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\ln(1 + 2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(x^2)/x^2}{2 + o(x^2)/x^2} = \frac{1}{2},$$

resultado que se obtiene también fácilmente usando la regla de l'Hôpital (ejercicio).

4.8 Caracterización de puntos críticos

Otra aplicación importante de las derivadas de orden superior es que permiten discriminar si un punto crítico ($f'(\bar{x}) = 0$) es mínimo local, máximo local, o punto de inflexión (punto de cambio de convexidad de la función). El resultado preciso es el siguiente.

Proposición 4.1. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$, con $f'(\bar{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ y $f^{[k]}(\bar{x}) \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:*

(a) *Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un mínimo local.*

(b) *Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un máximo local.*

(c) *Si k es impar, $\bar{x}$ es un punto de inflexión.*

Demostración. Consideremos primero el caso en que k es par. Haciendo un desarrollo limitado de orden k para f en torno a $\bar{x}$ se obtiene

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{(x - \bar{x})^k} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}.$$

Se sigue que existe un intervalo I en torno a $\bar{x}$ en el cual $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x})^k$ tiene igual signo que $f^{[k]}(\bar{x})$. Como k es par se deduce que para todo $x \in I, x \neq \bar{x}$, se tiene $f(x) > f(\bar{x})$ en el caso (a) y $f(x) < f(\bar{x})$ en el caso (b).

Si k es impar, un desarrollo de orden $(k - 2)$ de $g = f''$ conduce a

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f''(x)}{(x - \bar{x})^{k-2}} = \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{(k - 2)!}.$$

Como antes, para x cercano a $\bar{x}$ el signo de $f''(x)/(x - \bar{x})^{k-2}$ es igual al de $f^{[k]}(\bar{x})$ y, dado que $k - 2$ es impar, se deduce que $f''(x)$ cambia de signo entre $x < \bar{x}$ y $x > \bar{x}$, de modo que la convexidad de f cambia al cruzar $\bar{x}$. □

4.9 Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

Teorema 4.7. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k + 1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!}(x - \bar{x})^{k+1}. \tag{4.5}$$

Demostración. Análoga al Teorema 4.6: aplicando el TVM inductivamente $(k+1)$ veces, para $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) se encuentra $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que

$$\frac{f(x) - T_f^k(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})^{k+1}} = \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}.$$

□

Ejemplo 4.21.
Retornado el Ejemplo 4.15 y usando el Teorema anterior, el error cometido al reemplazar $\exp(x)$ por su desarrollo de orden k se expresa como

$$\exp(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} = \frac{\exp(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

con $\xi \in (0, x)$ si $x > 0$, o bién $\xi \in (x, 0)$ si $x < 0$. En ambos casos se obtiene

$$\left| \exp(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \exp(|x|) \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!},$$

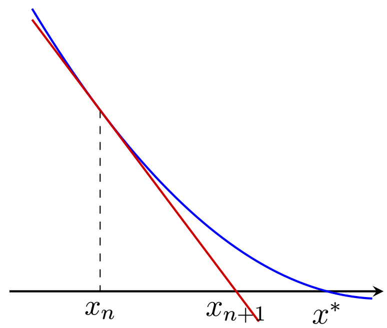
y puesto que $|x|^{k+1}/(k+1)! \longrightarrow 0$ cuando $k \to \infty$, se deduce

$$\exp(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

4.10 El método de Newton

Consideremos la ecuación $f(x) = 0$ donde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(a)f(b) < 0$. En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución $x^* \in (a, b)$, la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia x^*, es relativamente lento.

Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución $x_0 \sim x^*$. Si en la ecuación $f(x) = 0$ reemplazamos la función $f(\cdot)$ por su aproximación afín en torno a x_0, obtenemos la ecuación lineal $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Si $f'(x_0) \neq 0$, la solución de esta ecuación linealizada es $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, la cual podemos considerar como una nueva aproximación de x^*, que esperamos sea más precisa.



La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

el cual estará definido mientras se tenga $f'(x_n) \neq 0$. Esta iteración se conoce como el *Método de Newton* (para ecuaciones).

Ejemplo 4.22.
Para la ecuación $x^2 = a$, la iteración de Newton toma la forma

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

la cual fué estudiada en detalle anteriormente, donde probamos que converge para todo punto de partida $x_0 > 0$. En esa ocasión se constató que la convergencia era muy rápida.

El siguiente resultado explica el orígen de la rapidez del método de Newton.

Teorema 4.8. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y supongamos que $x^* \in (a,b)$ es una solución de la ecuación $f(x^*) = 0$ tal que $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existen constantes $\epsilon > 0$ y $M > 0$ tales que para todo punto de partida $x_0 \in I_\epsilon := (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ el método de Newton está bien definido y converge hacia x^* con*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2.$$

Demostración. Sea M tal que $|f''(x^*)| < M|f'(x^*)|$ y escojamos $\epsilon \in (0, 1/M)$ de modo tal que se tenga $|f'(x)| > |f'(x^*)|/2$ y $|f''(x)| \leq M|f'(x^*)|$ para todo $x \in I_\epsilon$.

Si para un determinado n se tiene $x_n \in I_\epsilon$, entonces x_{n+1} está bién definido y

$$x_{n+1} - x^* = x_n - f(x_n)/f'(x_n) - x^* = \frac{f(x^*) - f(x_n) - f'(x_n)(x^* - x_n)}{f'(x_n)}.$$

Usando el Teorema de Taylor podemos encontrar $\xi \in I_\epsilon$ tal que

$$|x_{n+1} - x^*| = \left|\frac{f''(\xi)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)}\right| \leq M|x_n - x^*|^2 \leq M\epsilon|x_n - x^*|$$

y como $M\epsilon < 1$ se sigue que $x_{n+1} \in I_\epsilon$. Esto permite razonar inductivamente a partir de x_0 para deducir $|x_n - x^*| \leq (M\epsilon)^n|x_0 - x^*| \to 0$. $\square$

Gruesamente, la desigualdad $|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$ nos dice que el número de decimales exactos en la aproximación se duplica en cada iteración, lo cual es muy satisfactorio. Desafortunadamente el resultado anterior es de carácter local: solo asegura la convergencia si partimos suficientemente cerca de x^*, cuestión que no podemos saber *a priori* pues en general desconocemos x^*! Existen resultados más explícitos, como el Teorema de Newton-Kantorovich, pero caen fuera de los objetivos de este curso. Nos limitaremos a ilustrar el teorema anterior a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.23.
Consideremos la ecuación $\tan(x) = x$ del Ejemplo 2.1. Nos interesa la solución de esta ecuación en el intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$. El método de Newton conduce a la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - x_n}{\tan^2(x_n)}.$$

Iterando a partir de $x_0 = 4{,}45$ se obtiene

n	x_n	$f(x_n)$
0	4.450000	-7.3e-01
1	4.502423	1.9e-01
2	4.493791	7.7e-03
3	4.493410	1.4e-05
4	4.493409	4.5e-11
5	4.493409	8.9e-16

llegando a la estimación $x^* \sim 4{,}49340945790906$. Se aprecia la clara superioridad del método de Newton que en 5 iteraciones alcanza una precisión de 10^{-15}, respecto del método de bisección que toma 21 iteraciones para una precisión de apenas 10^{-6}.

Guía de Ejercicios

1. Probar que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) es Lipschitz de constante L si y solamente si $|f'(x)| \leq L$ para todo $x \in (a,b)$.

2. Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables con $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Probar que f y g difieren en una constante.

3. Sea $p(x)$ un polinomio con k raíces reales distintas. Mostrar que si $\alpha \neq 0$, $q(x) = p(x) - \alpha p'(x)$ posee al menos k raíces reales distintas.
Indicación: Considerar la función $f(x) = \exp(-x/\alpha)p(x)$ y notar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. Estudiar el crecimiento y convexidad de las funciones

$$\text{(i)} \quad \frac{(x-1)^2}{x}\exp(1/x) \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}} \qquad \text{(iii)} \quad x\operatorname{sen}(\ln(x))$$

5. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene $0 \leq e^t - 1 - t \leq t^2 e^{|t|}/2$.

6. Determinar el menor valor $x \in \mathbb{R}$ tal que $(x+1)^x \leq x^{x+1}$.

7. Estudiar la convexidad de las funciones $\exp(-x^2)$ y $x^2 \ln x$.

8. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexa y derivable en $\bar{x} \in (a,b)$. Probar que

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Deducir que si $f'(\bar{x}) = 0$ entonces $\bar{x}$ es un mínimo global de f en $[a,b]$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que f'' se anula exactamente en n puntos ($n \in \mathbb{N}, n > 0$). Probar que el número de intersecciones del gráfico de f con una recta dada es a lo sumo $n+2$.

10. Estudie completamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{6}$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$.

c) $f(x) = x^{1/x}$ para $x > 0$.

d) $f(x) = x\ln^2(x)$ para $x > 0$.

11. Encuentre el desarrollo limitado de orden 4 en torno a 0 para las funciones

$$\text{(i)} \quad \exp(x^2)[x\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)] \qquad \text{(ii)} \quad \arcsin\left(\sqrt{x}\right)/\sqrt{x(1+x)}.$$

12. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{\operatorname{sen} x} - (\operatorname{sen} x)^x}{x^{\sinh x} - (\sinh x)^x}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{2x} + 1)^{1/x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2}\ln(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x})$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tanh(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$.

13. Demuestre que la función definida por $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es de clase C^∞ y que $f^{[k]}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Notar que los desarrollos limitados de todos los órdenes en torno a 0 son nulos, a pesar que la función no es nula.

14. Probar que la ecuación $\operatorname{cotan}(x) = \ln(x)$ posee una única solución x_n en $(n\pi, (n+1)\pi)$, y que $x_n - n\pi \sim 1/\ln(n)$, es decir, existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n)[x_n - n\pi].$$

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $f^{[k]}(\cdot)$ es una función constante. Demuestre que f es necesariamente un polinomio de grado k.

16. Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! + \cdots \\
\cos(x) &= 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! + \cdots \\
\sinh(x) &= x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + x^9/9! + \cdots \\
\cosh(x) &= 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + x^8/8! + \cdots
\end{aligned}$$

17. Encuentre un desarrollo limitado para $\operatorname{sen}(x) + \cos(x)$ en torno a 0, cuyo error máximo de aproximación en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ sea inferior a 10^{-3}.

18. Use el método de Newton para estimar el mínimo de $f(x) = \exp(x) + x + x^2$.

19. En el Teorema 2.10 suponga f de clase C^k con $f''(x^*) = \cdots = f^{[k-1]}(x^*) = 0$ y $f^{[k]}(x^*) \neq 0$. Demuestre que existe una constante M tal que

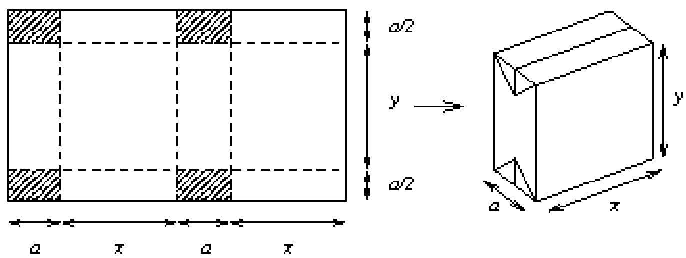
$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^k.$$

20. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa, la ecuación $f(x^*) = 0$ tiene a lo más 2 soluciones. Suponiendo que existe al menos una solución, pruebe que el método de Newton converge hacia una de ellas a partir de cualquier punto inicial x_0, salvo que x_0 sea el mínimo de f (necesariamente único).

Guía de Problemas

Nota: Los problemas, o partes de problemas marcados con un ★, involucran contenidos para el Control 1.

P1. ★ Un envase TetraPak se fabrica plegando un rectángulo de cartón como indica la figura (las regiones achuradas corresponden a los pliegues de las esquinas).



Se desean determinar las dimensiones óptimas a, x, y que minimicen la superficie del rectángulo original para un volumen total de 1000 (un litro).

(i) Encuentre una expresión de la superficie sólo en términos de las cantidades a, x.

(ii) Tomando a como parámetro conocido, demuestre que el valor $x = x(a)$ que minimiza dicha superficie es $x = \sqrt{\dfrac{1000}{a}}$. Justifique que se trata de un mínimo.

(iii) Use **(ii)** para obtener una expresión $S(a)$ para la superficie en función solamente de a y luego determine el valor mínimo de esta función (justifique por qué es mínimo). Explicite los valores óptimos de a, x, y.

P2. La función $f : [a, b] \to (0, \infty)$ se dice log-convexa si $\ln(f(x))$ es convexa.

(i) Probar que si f es log-convexa entonces es convexa, y buscar un contraejemplo que muestre que la recíproca es falsa.

(ii) Probar que f es log-convexa si y solo si f^α es convexa para todo $\alpha > 0$.

P3. Considere la función $f(x) = (x + 1) \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) ★ Encuentre ceros y signos de f.

(b) ★ Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los límites laterales cuando $x \to 0^\pm$ y $x \to 1^\pm$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.

(c) ★ Use el Teorema del valor medio en la función auxiliar $g(x) = \ln|x|$ en el intervalo $[x, x + 1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty).$$

(d) ★ Calcule la primera derivada de f.

(e) Use el resultado de la parte P3c para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$.

(f) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa.

(g) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \to 1^+$ y cuando $x \to 0^-$.Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya cobre la monotonía de f en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$.

(h) Bosqueje el gráfico de f.

P4. **(a)** ★ Una planta productora de cobre con capacidad instalada máxima de 9ton/día, puede producir x toneladas de cobre corriente e y toneladas de cobre fino diarias. Si se sabe que las producciones diarias de cobre fino y corriente cumplen la relación $y = \frac{40-5x}{10-x}$ y que el precio de venta del cobre fino es 3.6 veces el precio del cobre corriente, se pide determinar cuál es la producción diaria que proporciona un ingreso máximo.

(b) Sea f continua en $[0, \infty)$, diferenciable en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $\mathbb{R}^+$.

1) ★ Use el teorema del Valor Medio para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$.
2) Deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$.

P5. **(a)** Sean $g, h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones crecientes y derivables de signo constante: $g < 0$ y $h > 0$. Dadas las constantes $a, b, c > 0$, estudie la monotonía de

$$f(x) = g(b - ax^3) \cdot h(\arctan(cx)).$$

Nota: Los paréntesis denotan composición.

(b) ★ Usando el Teorema de Valor Medio, demuestre que

$$1 + \ln x < (x+1)\ln(x+1) - x\ln x < 1 + \ln(x+1), \quad \forall x > 0.$$

(c) ★ Deduzca de **(a)** la desigualdad

$$n\ln n - (n-1) \leq \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n < (n+1)\ln(n+1) - n, \quad \forall n \geq 1.$$

SEMANA 5

Primitivas

Definición (Primitiva) Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\operatorname{Int}(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I ssi

$$\forall x \in \operatorname{Int}(I),\ F'(x) = f(x).$$

Observaciones:

1. Sean F_1 y F_2 dos primitivas de una función f sobre I, entonces:

$$F_1' = f \wedge F_2' = f \Rightarrow (F_1 - F_2)' = 0$$
$$\Rightarrow F_1 - F_2 = \text{cte} = c$$

   En consecuencia dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante.

2. Además si F es una primitiva de f, entonces la función $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, es otra primitiva de f.

Notación: El conjunto de todas las primitivas de f se anotará como $\int f$. Si F es una primitiva de f, entonces notaremos:

$$\int f = F + c.$$

Es habitual,usar la notación clásica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

donde dx corresponde a un símbolo que sirve para identificar a la variable.

También suele llamarse *integral indefinida de* f a $\int f(x)dx$.

5.1 Primitivas o integrales indefinidas inmediatas

A continuación se presentan algunas primitivas cuyo cálculo es elemental:

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ \forall n \neq -1.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c = \ln K|x|, \ K > 0.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c.$
4. $\displaystyle\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c.$
5. $\displaystyle\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c.$
6. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + c.$
7. $\displaystyle\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + c.$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \tan x + c.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x dx = \operatorname{cotan} x + c.$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c.$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + c.$
12. $\displaystyle\int \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c$

Observación:

1. $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + c, \qquad \int f' = f + c.$
2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \qquad \left(\int f\right)' = f.$

Proposición 5.1. $\displaystyle\int$ *es un* operador lineal, *es decir:*

1. $\displaystyle\int f \pm g = \int f \pm \int g.$
2. $\displaystyle\int \alpha f = \alpha \int f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $F + c = \int f$ y $G + k = \int g$, entonces $F' = f$ y $G' = g \Rightarrow (f \pm g) = (F \pm G)'$. Luego $(F \pm G)$ es primitiva de $f \pm g$, es decir:

$$\int f \pm g = \int f \pm \int g.$$

2. Sea $F + c = \int f$, entonces $F' = f$ y por ende $(\alpha F)' = \alpha f$. Así, $\alpha F = \int \alpha f$, de donde se concluye que

$$\int \alpha f = \alpha \int f.$$

□

5.2 Teorema de cambio de variable

Teorema 5.1 (Cambio de variable). *Si $u = g(x)$, entonces*

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx \quad \text{o, equivalentemente} \quad \int f = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

Demostración. Sea F una primitiva de f, es decir $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, entonces $F(u) = (F \circ g)(x)$.

Calculemos:

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

por lo tanto: $(F \circ g)$ es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$.

Es decir,

$$F(u) = \int f(u) \quad \text{y} \quad (F \circ g) = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

Pero $F(u) = (F \circ g)(x)$, luego $\displaystyle\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$. □

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + c = \arctan(\operatorname{sen} x) + c.$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2}\right) dx$

$$u = \arctan x \to du = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \int e^u du = e^u = e^{\arctan x} + c.$$

Por lo tanto $\displaystyle\int (\frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2})dx = e^{\arctan x} + x + c.$

3.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos x} \quad \begin{pmatrix} u & = \cos x \\ du & = -\operatorname{sen} x dx \end{pmatrix}$$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\cos x| = \ln|\sec x|,$$

por lo tanto: $\displaystyle\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c.$

4. $\displaystyle\int \operatorname{cotan} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen} x} = \ln|\operatorname{sen} x| + c.$

5. $\displaystyle\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \ln|\sec x + \tan x| + c.$

6. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotan} x)}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotan} x} dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotan} x| + c.$

7. $\displaystyle\int (ax+b)^n dx \ ; \begin{cases} u = & ax+b \\ du = & adx \end{cases}$

$$= \int u^n \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\frac{u^{n+1}}{(n+1)} + c = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)} + c.$$

8. $\displaystyle\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx = \frac{(3x-7)^{\frac{8}{5}}}{3 \cdot \frac{8}{5}} + c$

$$= \frac{5}{24}\sqrt[5]{(3x-7)^8} + c.$$

9. $\displaystyle\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c.$

Guía de Ejercicios

1. Calcule las siguientes primitivas, en la variable x:

(a) $\displaystyle\int x^{\alpha}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}.$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(ax).$

(d) $\displaystyle\int \cos(ax).$

(e) $\displaystyle\int be^{ax}.$

(f) $\displaystyle\int (ax)^{\alpha}.$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{ax}.$

(h) $\displaystyle\int \operatorname{senh}(ax).$

(i) $\displaystyle\int \cosh(ax).$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}.$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

(ñ) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}.$

(p) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

2. Justifique en detalle el cálculo, hecho en la tutoría, de las primitivas:

(a) $\displaystyle\int \sec x dx.$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x dx.$

3. Aplicar un cambio de variable para calcular las siguientes primitivas, en la variable x:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)(\ln^2(x)+1)}.$

(d) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{\ln(\operatorname{sen}(x))}.$

(e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}.$

(f) $\displaystyle\int e^{-\sqrt{x}}.$

(g) $\displaystyle\int e^{x}\sqrt{1+e^{x}}.$

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}.$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}.$

Guía de Problemas

P1. Calcule las siguientes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}}dx.$

P2. Sean f, g, h funciones tales que $f(x) = g(x) + h(x)g'(x)$. Usando la definición de primitiva muestre que

$$\int f(x)e^{h(x)}dx = e^{h(x)}g(x) + c.$$

P3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ derivable y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tales que $f'(x) + g(x)f(x) = 0$. Usando la definición de primitiva muestre que

$$\int g(x)dx = -\ln f(x) + c$$

P4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ derivable y tal que $\int f(x)dx = f(x)$.

a) Muestre que $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$ y deduzca que $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = x + c$.

b) Concluya que $f(x) = e^{x+c}$.

SEMANA 6

Primitivas (2)

6.1 Integración por partes

Proposición 6.1 (Fórmula de integración por partes). *Sean u y v dos funciones de x, entonces:*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\text{o, equivalentemente} \qquad \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Luego, gracias a la Proposición 5.1, se tiene

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

y despejando, se concluye que

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

□

Observación: Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

donde $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$.

Ejemplos:

1. $\displaystyle\int xe^x dx \qquad \begin{pmatrix} u & = x \to du & = dx \\ dv & = e^x dx \to v & = e^x \end{pmatrix}$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

2. $\int \ln x dx \qquad \begin{pmatrix} u & = \ln x \to du & = (\frac{1}{x})dx \\ dv & = dx \to u & = x \end{pmatrix}$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$$

3. $I_n = \int x^n \ln x dx \qquad \begin{pmatrix} u & = \ln x \to du & = \frac{1}{x}dx \\ dv & = x^n dx \to v & = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$

$$= \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - (\frac{1}{n+1})\int x^n dx$$

$$= \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c.$$

4. $I_n = \int x^n e^x dx; n \in \mathbb{N}$.

   Consideramos $\begin{array}{rcl} u = x^n & \to & du = nx^{n-1}dx \\ dv = e^x dx & \to & v = e^x \end{array}$.

$$\Rightarrow I_n = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx,$$

   por lo tanto: $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Veamos,

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + c$$

   y luego,

$$\begin{aligned} I_0 &= e^x + c \\ I_1 &= xe^x - I_0 \\ I_2 &= x^2 e^x - 2I_1 \\ &\vdots \\ I_n &= x^n e^x - nI_n n - 1. \end{aligned}$$

6.2 Sustituciones trigonométricas tradicionales

Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:

1. Para $a^2 + x^2$, usar $x = a\tan\upsilon$ o bien $x = a\,\mathrm{senh}\,t$.
2. Para $a^2 - x^2$, usar $x = a\,\mathrm{sen}\,\upsilon$ ó $x = a\cos\upsilon$.

3. Para $x^2 - a^2$, usar $x = a\sec v$ ó $x = a\cosh t$.

6.3 Integración de funciones racionales

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x - r_1)^{\alpha_1} (x - r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son numeros enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i} x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + C_i} + \frac{B_{2i} x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_i i} x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

Ejemplo 6.1.

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^2 (x-7)(x^2+1)^3 (x^2+2x+9)^2}.$$

Entonces,

$$R(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-7} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2} + \frac{Hx+I}{(x^2+1)^3} + \frac{Jx+K}{x^2+2x+9} + \frac{Lx+M}{(x^2+2x+9)^2}.$$

Ejemplo 6.2.

$$R(x) = \frac{2x-5}{(x^2+1)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+1)(x-2) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)^2}.$$

Por lo tanto,

$$2x - 5 = (Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2+1)(x-2) + D(x^2+1). \tag{6.1}$$

Podemos usar dos métodos para obtener los valores de A, B, C y D:

- **Método 1:** Igualar coeficientes de ambos polinomios en x. Obtenemos así las ecuaciones,

$$\begin{aligned} 0 &= A + C && (x^3) \\ 0 &= -4A + B - 2C + D && (x^2) \\ 2 &= 4A - 4B + C && (x^1) \\ -5 &= 4B - 2C + D && (x^0) \end{aligned}$$

  Así, restando las ecuaciones asociadas a x^2 y x, y por otra parte restando las ecuaciones asociadas a x y x^3, obtenemos

$$\begin{aligned} -4A - 3B &= 5 \\ 3A - 4B &= 2. \end{aligned}$$

  De aquí, $B = -\frac{23}{25}$ y $A = -\frac{14}{25}$. Reemplazando nuevamente es las ecuaciones se obtiene que $C = \frac{14}{25}$ y $D = -1/5$.

- **Método 2:** Como la igualdad de polinomios 6.1 debe ser $\forall x \in \mathbb{R}$,entonces se pueden reemplazar algunos valores de x que sean convenientes. Incluso se pueden reemplazar (si no se complica mucho el algebra) algunos valores de $x \in \mathbb{C}$.

  Por ejemplo, si tomamos $x = 2$, luego 6.1 queda:

$$-1 = 5D,$$

  de donde $D = -1/5$.

  Además, como $x = i$ es raíz de $x^2 + 1 = 0$, usamos $x = i$ de donde obtenemos

$$\begin{aligned} 2i - 5 &= (Ai + B)(i-2)^2 \\ &= (Ai + B)(i^2 - 4i + 4) \\ &= (Ai + B)(-4i) \\ &= 3Ai + 3B - 4Ai^2 - 4Bi \\ &= (3B + 4A) + (3A - 4B)i. \end{aligned}$$

  Luego

$$\begin{aligned} 3A - 4B &= 2 \\ 4A + 3B &= -5, \end{aligned}$$

  que es el mismo sistema obtenido con el método anterior y cuya solución es $B = -\frac{23}{25}$ y $A = -\frac{14}{25}$.

  Finalmente, para calcular C, se puede reemplazar $x = 0$ y usando los valores ya calculados de A, B y D, concluir que $C = \frac{14}{25}$.

6.4 Integrales trigonométricas reducibles a integrales de funciones racionales

Consideramos integrales del tipo

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx,$$

en donde R es una función racional en la cual aparecen sólo $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Ejemplos:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}\ , \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} dx.$$

En estos casos se aconseja el cambio de variable:

$$t = \tan(x/2),$$

con lo cual

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx.$$

Pero por otra parte $\arctan(t) = x/2$, de donde

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{2}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Usamos entonces unas conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de un ángulo doble, con lo que

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

En resumen,

$$\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \operatorname{sen} x = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right), \quad \cos x = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.}$$

Ejercicio 6.1: Escriba la integral $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ usando el cambio de variable sugerido.

Guía de Ejercicios

1. Sea R una función racional en la cual aparecen sólo $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Escribir la integral $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ usando el cambio de variable $u = \tan(x/2)$.

2. Usando integración por partes calcule las siguientes primitivas

(a) $\int x \operatorname{sen}(x)$.

(b) $\int x \cos(x)$.

(c) $\int xe^x$.

(d) $\int x \operatorname{senh}(x)$.

(e) $\int x \cosh(x)$.

(f) $\int \frac{x}{1+x^2}$.

(g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

(h) $\int x^2 \operatorname{sen}(x)$.

(i) $\int x^2 \cos(x)$.

(j) $\int x^2 e^x$.

(k) $\int x^2 \operatorname{senh}(x)$.

(l) $\int x^2 \cosh(x)$.

(m) $\int \frac{x^2}{1+x^2}$.

(n) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. Establezca fórmulas de recurrencia para la expresión I_n, dada por

(a) $I_n = \int x^n \operatorname{sen}(x)$.

(b) $I_n = \int x^n \cos(x)$.

(c) $I_n = \int x^n e^x$.

(d) $I_n = \int \operatorname{sen}^n(x)$.

(e) $I_n = \int \cos^n(x)$.

(f) $I_n = \int x^n \sinh(2x)$.

4. Utilizando integración de funciones racionales calcule las siguientes primitivas

(a) $\int \frac{1}{1+x}$.

(b) $\int \frac{1}{x^2+2x+1}$.

(c) $\int \frac{1}{1+x^2}$.

(d) $\int \frac{1}{1-x^2}$.

(e) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

5. Aplique el cambio de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$ para calcular las siguientes primitivas

(a) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

(b) $\int \frac{1}{\cos(x)}$.

(c) $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}$.

(d) $\int \frac{1}{1-\cos(x)}$.

(e) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$.

6. Calcule las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

7. Calcule $\displaystyle\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}}$.

Guía de Problemas

P1. Calcular la siguiente integral
$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}dx.$$

P2. **(a)** Sea $I_n = \displaystyle\int \frac{\cos(nx)}{(\cos(x))^n}dx$.

(1) Calcular I_1, I_2.

(2) Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x))^{n+1}}dx$.

(3) Encontrar una relación de recurrencia para expresar I_{n+1} en función de I_n.

(b) Calcular la primitiva $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$.

P3. **(a)** Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln(x)+\ln^2(x))}$.

(b) Usando el cambio de variables $\tan(\frac{x}{2}) = u$, calcule $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$.

(c) Sean $I = \displaystyle\int \cos(\ln(x))dx$ y $J = \displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln(x))dx$. Usando integración por partes, plantee un sistema lineal que permita calcular I y J. Calcule I y J.

P4. **(a)** Calcule $\displaystyle\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}dx$.

(b) Deducir una fórmula de recurrencia para $I_{m,n} = \displaystyle\int x^m(\ln(x))^n dx$. Use la fórmula para calcular $\displaystyle\int x^2 \ln x$.

P5. **(a)** Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx$.

(b) Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}$.

(c) Calcular $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$.

SEMANA 7

Integral de Riemann

7.1 Introducción

La teoría de la integral de Riemann tiene un objetivo simple, que es: formalizar la noción de área mediante una definición que sea compatible con las ideas comunes e intuitivas acerca de este concepto.

Surge entonces la pregunta de ¿Cuales son estas ideas básicas?. Por ejemplo, una de ellas es que el área de una superficie cuadrada de lado a sea a^2. Si esto es verdadero, se debe concluir que la superficie de un rectángulo de lados a y b es $a \cdot b$.

7.2 Condiciones básicas para una definición de área

Sea E un conjunto de puntos en el plano OXY. El área del conjunto E será un número real $A(E)$ que cumple las siguientes condiciones.

(A1) $A(E) \geq 0$

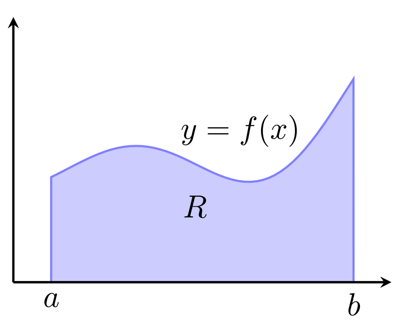
(A2) $E \subseteq F \Longrightarrow A(E) \leq A(F)$

(A3) Si $E \cap F = \emptyset \Longrightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$

(A4) El área de una región rectangular E de lados a y b es $A(E) = a \cdot b$

Estas 4 condiciones son necesarias y suficientes para tener una buena definición de área. Se verá mas adelante, en el transcurso del curso, que la integral de Riemann las satisface adecuadamente.

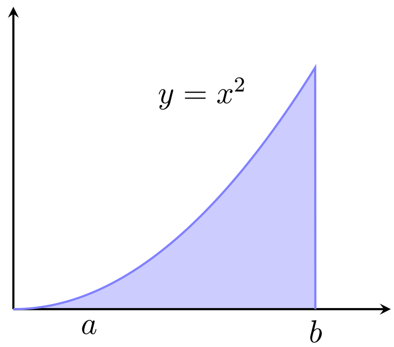
Observación: Las cuatro propiedades elementales anteriores no son independientes entre sí, ya que por ejemplo (A2) es una consecuencia de (A1) y (A3) Mediante la integral de Riemann se definirá el área de una región E particular: Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ consideremos la región R limitada por el eje OX, la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El área de esta región se llamará área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b.



Mediante un ejemplo se mostrará un método para determinar el área bajo una curva, que nos indicará el procedimiento a seguir en la definición de la integral de Riemann.

7.2 Ejemplo

Dada la función $f(x) = x^2$, se desea calcular el área encerrada entre $x = 0$ y $x = b > 0$ bajo la curva $y = f(x)$.



Etapa 1.

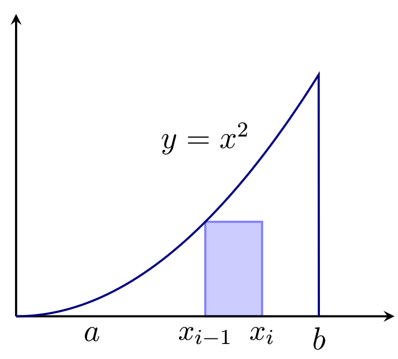
Dividiremos el intervalo $[0, b]$ en n partes iguales donde cada una de estas partes tiene longitud $h = \frac{b}{n}$. Si llamamos x_i a los puntos de la división, se tiene que: $x_i = i(b/n)$.

De este modo se ha dividido el intervalo $[0, b]$ en n sub-intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de longitud h cada uno.

Etapa 2.

En cada intervalo I_i se levanta el rectángulo inscrito al sector parabólico de mayor altura posible. Este i-ésimo rectángulo inscrito posee las siguientes propiedades:

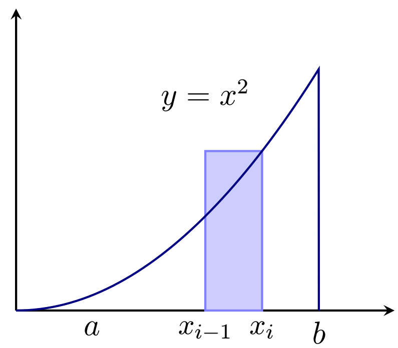
$$\begin{aligned} \text{base} &= h \\ \text{altura} &= f(x_{i-1}) \\ \text{área} &= h \cdot f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b}{n} \cdot \left((i-1)\frac{b}{n}\right)^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 (i-1)^2 \end{aligned}$$



Etapa 3.

De igual forma en cada intervalo I_i se levanta el rectángulo circunscrito al sector parabólico de menor altura posible. Este i-ésimo rectángulo circunscrito posee las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
\text{base} &= h \\
\text{altura} &= f(x_i) \\
\text{área} &= h \cdot f(x_i) \\
&= \frac{b}{n} \cdot \left(i\frac{b}{n} \right)^2 = \left(\frac{b}{n} \right)^3 i^2
\end{aligned}
$$



Etapa 4.

Con esta construcción, se ve fácilmente que el área A que se desea calcular está acotada del modo siguiente

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n} \right)^3 (i-1)^2 \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n} \right)^3 i^2.$$

Las sumatorias anteriores se calculan fácilmente recordando que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De este modo,

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Así las cotas para el área A buscada son

$$\frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n-1)}{n^2} \leq A \leq \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

La desigualdad anterior es válida $\forall n \in \mathbb{N}$, luego, olvidando el significado geométrico de los números que allá intervienen, se puede pensar en una desigualdad de sucesiones reales. Por lo tanto, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ queda:

$$\frac{b^3}{3} \leq A \leq \frac{b^3}{3},$$

de donde se deduce que el área buscada es

$$A = \frac{b^3}{3}.$$

Ejercicio 7.1: Del mismo modo como se ha resuelto este ejercicio, se propone al lector calcular las áreas encerradas bajo las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$. Por cierto en los dos primeros casos los resultados son bien conocidos, no así en el tercero. Nótese que al resolver estos ejercicios se observa lo siguiente:

función	Area entre 0 y b	donde
$f(x) = x^0$	$b \cdot h$	$h = 1$
$f(x) = x^1$	$\frac{b \cdot h}{2}$	$h = b$
$f(x) = x^2$	$\frac{b \cdot h}{3}$	$h = b^2$
$f(x) = x^3$	$\frac{b \cdot h}{4}$	$h = b^3$

Se deja también al lector la tarea de formular una generalización a estos resultados a potencias superiores.

Ejercicio 7.2: Como último ejercicio propuesto se plantea calcular el área encerrada bajo la función $\operatorname{sen}(x)$ entre 0 y $\pi/2$.

Después de estos ejercicios de motivación podemos comenzar a definir el concepto de integral de Riemann de una función.

7.3 Definiciones

Definición (Partición de un intervalo) El conjunto $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Si P es una partición de $[a, b]$, se llama norma de P y se denota por $|P|$ al real:

$$|P| = \text{máx}\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, ..., n\}$$

Definición (Sumas Superiores e Inferiores) Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$[1]. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Como f es acotada en $[a, b]$, también lo es en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ $\forall i = 1, ..., n$, luego podemos definir:

$$\begin{aligned} m_i(f) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i(f) &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

(La existencia de $m_i(f)$ y $M_i(f)$ está garantizada por ser f acotada en $[x_{i-1}, x_i]$). Con esto se definen las sumas siguientes:

1) $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma superior de f correspondiente a la partición P

2) $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma inferior de f correspondiente a la partición P.

Interpretación Geométrica

Si $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, entonces las sumas superior e inferior de f tienen una interpretación geométrica sencilla. $s(f,P)$ corresponde al área de los rectángulos inscritos. $S(f,P)$ es el área de los rectángulos circunscritos.

Propiedad Importante.

Sea f una función acotada y definida en $[a,b]$. Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$, cualquiera. Sean

$$\begin{aligned} m &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ M &= \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ m_i(f) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i(f) &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

es claro que $\forall i = 1, ..., n$ se tiene que:

$$m \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M.$$

Luego:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}).$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$ se obtiene que:

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a). \tag{7.1}$$

Como P es una partición cualquiera, se concluye que el conjunto de las sumas inferiores de f es acotado, así como el conjunto de las sumas superiores de f. Esta propiedad da lugar a las dos definiciones siguientes:

Definición (Integrales Superiores e Inferiores) Sea $\mathcal{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$. Sea f una función definida y acotada sobre $[a,b]$. Los números reales

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f &= \sup\left\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}, \text{ y} \\ \overline{\int_a^b} f &= \text{ínf}\left\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}, \end{aligned}$$

se llaman integral inferior de f en $[a,b]$ e integral superior de f en $[a,b]$, respectivamente.

Observación: Por la propiedad demostrada anteriormente, se sabe que el conjunto de las sumas inferiores era acotado, lo mismo que el conjunto de las sumas superiores, luego en virtud del Axioma del supremo, están garantizadas las existencias de $\underline{\int_a^b} f$ y de $\overline{\int_a^b} f$. Para que todo esto sea válido es necesario y suficiente, que f este definida en $[a,b]$ y sea acotada en dicho intervalo.

Definición (Refinamiento de una partición o partición más fina) Sean P y Q dos particiones de $[a, b]$, si $P \subseteq Q$, diremos que Q es un refinamiento P o una partición más fina que P.

Ejemplo 7.1.
Si P_1 y P_2 son 2 particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces $P = P_1 \cup P_2$ es un refinamiento de P_1 y de P_2.

Proposición 7.1. *Si $P \subseteq Q$ entonces*

$$\begin{aligned} s(f, P) &\leq s(f, Q), \ \text{y} \\ S(f, P) &\geq S(f, Q) \end{aligned}$$

Demostración. Si $P = Q$, la proposición es trivialmente cierta. Por lo tanto en el resto de la demostración trataremos el caso en que $P \neq Q$.
Para fijar ideas digamos que $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, sea $\bar{x}$ el primer punto que aparece en Q y no en P, entonces hay un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_{k-1} < \bar{x} < x_k$.

Sea $P_1 = \{x_0, ..., x_{k-1}, \bar{x}, x_k, ..., x_n\}$ y sean

$$\begin{aligned} m'(f) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\} \text{ y} \\ m''(f) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [\bar{x}, x_k]\}. \end{aligned}$$

Claramente:

$$m_k(f) \leq m'(f) \quad \text{y} \quad m_k(f) \leq m''(f).$$

Con esto calculemos las sumas inferiores de f para las particiones P y P_1:

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(\Delta x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(f)(\Delta x_i) + m'(f)(\bar{x} - x_{k-1}) + m''(f)(x_k - \bar{x}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \\ &= s(f, P_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s(f, P) \leq s(f, P_1).$$

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces obtenemos que: $s(f, P) \leq s(f, Q)$.
La desigualdad con sumas superiores se demuestra en forma análoga y se deja propuesta como un ejercicio.

Observación: Como además $s(f, Q) \leq S(f, Q)$, se concluye que $\forall P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$.

$$P \subseteq Q \Longrightarrow s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P).$$

Entonces, si P_1 y P_2 son particiones de $[a,b]$, tomando la partición $P = P_1 \cup P_2$ que es un refinamiento de P_1 y P_2, se tiene que

$$s(f,P_1) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,P_2),$$

es decir,

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}.$$

O sea cualquier suma inferior es cota inferior del conjunto de sumas superiores y recíprocamente.

Proposición 7.2. *Si f está definida y acotada en $[a,b]$, y $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, entonces*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$$

Demostración. Primeramente, como $m(b-a)$ es una cota inferior de $\left\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}$, (Ecuación 7.1 en página 73) y como $\underline{\int_a^b} f = \sup \left\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}$, resulta que

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Análogamente: $\overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$.
Para probar la desigualdad central, consideremos dos particiones P_1 y P_2 cualesquiera de $[a,b]$. Como $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$ entonces, fijando P_1, se tiene que $s(f,P_1)$ es una cota inferior del conjunto $\left\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}$ y por lo tanto:

$$s(f,P_1) \leq \inf \left\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\} = \overline{\int_a^b} f.$$

La desigualdad anterior se cumple $\forall P_1 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ luego el numero $\overline{\int_a^b} f$ es una cota superior del conjunto $\left\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\}$ y por lo tanto:

$$\overline{\int_a^b} f \geq \sup \left\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\right\} = \underline{\int_a^b} f$$

Esta ultima expresión prueba la proposición.

Definición Diremos que una función f definida y acotada en $[a,b]$ es integrable según Riemann si se cumple que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En tal caso, el valor común de estas dos integrales se llama simplemente la integral de f en $[a,b]$ y se denota por $\displaystyle\int_a^b f$.

Teorema 7.1 (Condición de Riemann). *Una función f definida y acotada en un intervalo $[a,b]$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ ssi:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Demostración. Probemos primeramente que la condición de Riemann es suficiente, es decir, si la condición de Riemann se cumple entonces la función es integrable.
Sea $\epsilon > 0$. Sabemos que

$$(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Pero

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f &\leq S(f,P) \\ -\underline{\int_a^b} f &\leq -s(f,P) \end{aligned}$$

entonces,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Como esta ultima desigualdad es válida $\forall \epsilon > 0$ se concluye que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ y por lo tanto f es integrable en $[a,b]$.
Probemos ahora que la condición de Riemann es necesaria, es decir, que si f es integrable entonces la condición de Riemann debe cumplirse.
Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \inf \left\{ S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \right\} \\ &= \sup \left\{ s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \right\} \end{aligned}$$

entonces, dado $\epsilon > 0$, en virtud de la caracterización ϵ del supremo y del ínfimo de un conjunto podemos garantizar la existencia de particiones P_1, P_2 de $[a,b]$ tales que

$$\begin{aligned} s(f,P_1) &> \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \\ S(f,P_2) &< \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Si además consideramos la partición $P = P_1 \cup P_2$, (refinamiento de P_1 y de P_2) y recordando que las sumas inferiores crecen y las superiores decrecen al tomar refinamientos, se deduce que

$$\begin{aligned} s(f,P) &> \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} \\ S(f,P) &< \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$S(f,P) - \frac{\epsilon}{2} < s(f,P) + \frac{\epsilon}{2}$$

es decir

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Con esto, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, hemos encontrado una partición que verifica la condición de Riemann. □

Ejemplo 7.2.
Probar que $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable en $[1, 2]$.

Si $P = \{x_0, ..., x_n\}$ es una partición de $[1, 2]$ entonces en cada intervalo I_i se tiene que: $m_i(f) = \frac{1}{x_i}$ y $M_i(f) = \frac{1}{x_{i-1}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}}) \text{ y} \\ s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}). \end{aligned}$$

Notemos que esta sumas no son fáciles de calcular para una partición arbitraria. Sin embargo lo único que se desea aquí, es probar que la función es integrable y no calcular la integral. Con este objetivo en mente, nos basta con verificar la condición de Riemann. Calculemos entonces la diferencia entre las dos sumas:

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{x_i x_{i-1}}. \end{aligned}$$

Como las variables $x_i \in [1, 2]$ entonces

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x_i} < 1,$$

y por lo tanto podemos acotar la diferencia como

$$S(f,P) - s(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2.$$

Para terminar recordamos que

$$x_i - x_{i-1} < |P|,$$

donde $|P|$ es la norma de la partición P. Entonces

$$S(f,P) - s(f,P) < |P| \cdot (2-1) = |P|.$$

En consecuencia para satisfacer la condición de Riemann, dado $\epsilon > 0$ basta considerar una partición $P \in \mathcal{P}_{[1,2]}$ con norma $|P| \leq \epsilon$. Es decir

$$|P| \leq \epsilon \Longrightarrow S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable en $[1, 2]$.

Ejemplo 7.3.
Probar que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$ no es integrable en $[0, 1]$.

Sea $P = \{x_0, ..., x_n\}$ una partición de $[0, 1]$, claramente en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ se tiene que

$$\begin{aligned} m_i(f) &= 0, \text{ y} \\ M_i(f) &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto las sumas de Riemann son

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = b - a = 1, \text{ y} \\ s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Claramente se cumple que

$$S(f, P) - s(f, P) = 1 \quad \forall P \in \mathcal{P}_{[0,1]}$$

y luego la condición de Riemann no se cumple. Por lo tanto f no es integrable en $[0, 1]$.

Observación: Este último ejemplo muestra que una función puede estar definida y ser acotada en un intervalo y sin embargo no ser Riemann integrable. Es decir ser Riemann integrable es una propiedad mas fuerte o exigente que sólo ser definida y acotada.

En este ejemplo también se puede observar que

$$\underline{\int_a^b} f(x) = 0, \qquad \text{y} \qquad \overline{\int_0^1} f(x) = 1.$$

SEMANA 8

Propiedades de la Integral

8.1 Estudio de Funciones Integrables

En esta sección nos preocupamos de saber bajo que requisitos se puede garantizar que una función definida y acotada en un intervalo es Riemann integrable. Los resultados más importantes en este sentido son el teorema (8.1) que garantiza que las funciones continuas son integrables y la proposición 8.1 que hace lo propio con las funciones monótonas.

Además se verá que en este tipo de funciones (las continuas o monótonas) la condición de Riemann se cumple en la medida que la norma de la partición sea suficientemente pequeña. Esto último permite entender la integral como el límite de las sumas inferiores o superiores cuando la norma de la partición tiende a cero.

Proposición 8.1. *Si f es una función definida, acotada y monótona en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que se trata de una función creciente (la demostración en el caso de función decreciente se propone como ejercicio). Si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ entonces

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i, \;\; s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

y entonces

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right] \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - f(x_{i-1})\right] |P| = |P| \left[f(b) - f(a)\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, es fácil encontrar particiones con norma $|P| \leq \frac{1}{f(b)-f(a)+1}$[2] con lo cual la condición de Riemann se cumple satisfactoriamente.

Teorema 8.1. *Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces es integrable en $[a, b]$*

Demostración. Es bien sabido que las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ son uniformemente continuas, es decir satisfacen la propiedad

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \, \forall x_1, x_2 \in [a, b], \; \left[|x_1 - x_2| \leq \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon\right].$$

[2] El 1 en el denominador $f(b) - f(a) + 1$ se introduce solo para evitar dividir por cero (en el caso de una función constante).

Con esta proposición no es difícil probar la condición de Riemann. En efecto, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, la proposición anterior garantiza la existencia de $\delta > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| \leq \delta$ entonces

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{8.1}$$

Consideremos una partición $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ con norma $|P| \leq \delta$. Como f es continua en $[a,b]$, también lo será en cada uno de los intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ definidos por la partición y por lo tanto el supremo M_i y el ínfimo m_i en dicho intervalo serán alcanzados como imágenes de algún punto. Es decir,

$$\begin{aligned} \exists x_i' \in [x_{i-1}, x_i], \qquad & f(x_i') = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ \exists x_i'' \in [x_{i-1}, x_i], \qquad & f(x_i'') = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Luego

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i'') - f(x_i')]\, \Delta x_{i.}$$

Pero como $|x_i' - x_i''| \leq \Delta x_i \leq |P| \leq \delta$ entonces se cumple (8.1), es decir que $|f(x_i'') - f(x_i')| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. En consecuencia

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &\leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_{i.} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Notemos que en la demostración anterior solo se requiere que $|P| \leq \delta$. Esto permite concluir el siguiente corolario.

Corolario 8.1. *Si f es continua en $[a,b]$ Entonces:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \left\{ |P| \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| \leq \epsilon \right\},$$

donde los valores $\bar{x}_i$ son números arbitrarios en el correspondiente $i-$ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido por la partición P. (por ejemplo $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$)

Demostración. El teorema anterior dice que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \{|P| \leq \delta \Rightarrow S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon\}.$$

Además, si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una de las particiones anteriores y $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ entonces

$$m_i(f) \leq f(\bar{x}_i) \leq M_i(f).$$

multiplicando por Δx_i y sumando de $i = 1$ hasta $i = n$ se obtiene

$$s(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \leq S(f,P). \tag{8.2}$$

Por otro lado como la función es integrable se sabe que

$$s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P). \tag{8.3}$$

Las desigualdades (8.2) y (8.3) se interpretan como que los números $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ y $\int_a^b f$ pertenecen a un mismo intervalo de largo no mayor que ϵ. Por lo tanto,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| \leq \epsilon$$

Observación: El corolario anterior se puede interpretar como una noción de límite cuando $|P| \to 0$, es decir, podemos escribir que cuando una función es continua su integral es

$$\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

La expresión anterior motiva la siguiente notación, denominada notación de Leibnitz para integrales

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

Observación: Si f es continua en $[a,b]$ también se cumple que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \left[|P| < \delta \Rightarrow \left| S(f,P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \right]$$

y que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) \left[|P| < \delta \Rightarrow \left| s(f,P) - \int_a^b f \right| < \epsilon \right].$$

Observación: El corolario y la observación (8.1) también se cumple si f monótona.

Luego: si f es continua en $[a,b]$ o bien monótona en $[a,b]$ entonces se puede decir que:

$$\int_a^b f = \lim_{|P|\to 0} s(f,P) = \lim_{|P|\to 0} S(f,P) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

8.2 Propiedades de la Integral

Ya hemos visto cual es la definición de la integral de una función. Sabemos que se trata de un número real asociado a la función. Sabemos que este real existe para un conjunto de funciones llamadas las funciones Riemann integrables, entre las cuales se encuentran las funciones continuas y las funciones monótonas. En cuanto al cálculo de integrales sólo conocemos la definición y sabemos que en la medida que las normas de las particiones sean pequeñas, las integrales se aproximan por sumatorias llamadas las sumas de Riemann. En esta sección nos interesa estudiar algunas propiedades del operador integral. Los resultados más atractivos se resumen en el Teorema 8.2 que dice que este operador es lineal y monótono. También veremos cómo se puede extender la noción de integral a los casos $a = b$ y $a > b$.

Lemas Previos (Propiedades Básicas)

Comenzamos por enunciar algunos lemas previos relativos a las integrales inferiores y superiores.

Lema 1. *Si f es una función integrable en $[a,b]$, $a<b$, y $[r,s]\subseteq[a,b]$, con $r<s$, entonces f es integrable en $[r,s]$.*

Lema 2. *Si f está definida y es acotada en $[a,b]$, $a<b$, y $c\in(a,b)$ entonces*

$$\underline{\int_a^b} f \;\geq\; \underline{\int_a^c} f+\underline{\int_c^b} f \tag{8.4}$$

$$\overline{\int_a^b} f \;\leq\; \overline{\int_a^c} f+\overline{\int_c^b} f \tag{8.5}$$

Lema 3. *Si f y g son dos funciones definidas y acotadas en $[a,b]$, $a<b$, entonces:*

$$\underline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g \;\leq\; \underline{\int_a^b}(f+g) \tag{8.6}$$

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \;\leq\; \overline{\int_a^b} f+\overline{\int_a^b} g \tag{8.7}$$

Demostración. (del lema 1) Como f es integrable en $[a,b]$ $\Rightarrow$ se cumple la condición de Riemann en $[a,b]$, es decir:

$$(\forall\epsilon>0)(\exists P\in\mathcal{P}_{[a,b]})\ S(f,P)-s(f,P)\leq\epsilon.$$

Sea $Q=P\cup\{r,s\}$, es claro que como r y $s\in[a,b]$, entonces Q es un refinamiento de P, luego $S(f,Q)-s(f,Q)\leq\epsilon$.

Para fijar ideas, digamos que $Q=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ y que $r=x_k$, $s=x_\ell$ con $0\leq k<\ell\leq n$.

Sea entonces $Q'=\{x_k,x_{k+1},\cdots,x_\ell\}=Q\cap[r,s]$. Es claro que Q' resulta ser una partición de $[r,s]$ tal que:

$$S(f,Q')-s(f,Q')=\sum_{i=k+1}^{\ell}(M_i-m_i)\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=s(f,Q)-s(f,Q)<\epsilon.$$

Luego la partición Q' muestra que f verifica la condición de Riemann y por lo tanto es una función integrable en $[r,s]$.

Demostración. (del Lema 2)

Para demostrar (8.4) sean $P_1\in\mathcal{P}_{[a,c]}$ y $P_2\in\mathcal{P}_{[c,b]}$ dos particiones arbitrarias de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente. Formemos la partición P de $[a,b]$ como $P=P_1\cup P_2$.

Claramente

$$s(f,P_1)+s(f,P_2)=s(f,P)\leq\underline{\int_a^b} f.$$

Esta desigualdad se puede escribir así

$$s(f,P_1)\leq\underline{\int_a^b} f-s(f,P_2)\quad\forall P_1\in\mathcal{P}_{[a,c]}.$$

En consecuencia el real de la derecha es cota superior del conjunto de sumas inferiores de f en $[a, c]$ y por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f - s(f, P_2) \geq \underline{\int_a^c} f.$$

Esta expresión se puede también escribir así

$$\underline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^c} f \geq s(f, P_2) \quad \forall P_2 \in \mathcal{P}_{[c,b]},$$

es decir el número de la izquierda es una cota superior del conjunto de sumas inferiores de f en $[c, b]$. Entonces este número es mayor o igual al supremo, es decir

$$\underline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^c} f \geq \underline{\int_c^b} f.$$

La demostración de (8.5) es análoga y se deja como ejercicio.

Demostración. (del lema 3)

Como en el caso anterior, sólo demostraremos la fórmula (8.6), y dejaremos (8.7) como ejercicio. Para probar esta fórmula sean P_1 y P_2 particiones cualesquiera de $[a, b]$ y sea $P = P_1 \cup P_2$. Claramente

$$s(f, P_1) + s(g, P_2) \leq s(f, P) + s(g, P). \tag{8.8}$$

Para fijar ideas digamos que $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ entonces

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f) \Delta x_i \\ s(g, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(g) \Delta x_i \\ s(f + g, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f + g) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Recordemos que $\forall x \in I_i, m_i(f) \leq f(x) \wedge m_i(g) \leq g(x)$ luego $m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f + g)$ y entonces

$$s(f, P) + s(g, P) \leq s(f + g, P) \leq \underline{\int_a^b} (f + g). \tag{8.9}$$

En la última desigualdad hemos recordado que la integral inferior es una cota superior del conjunto de sumas inferiores de una función (aquí la $f + g$). Combinando las ecuaciones (8.8) y (8.9) se tiene que

$$s(f, P_1) + s(g, P_2) \leq \underline{\int_a^b} (f + g).$$

Como esta desigualdad es válida $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ entonces de

$$s(f, P_1) \leq \underline{\int_a^b} (f + g) - s(g.P_2)$$

se deduce que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} (f+g) - s(g.P_2),$$

y luego de

$$s(g,P_2) \leq \underline{\int_a^b} (f+g) - \underline{\int_a^b} f$$

se deduce que

$$\underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g) - \underline{\int_a^b} f,$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g).$$

Teorema con las propiedades de la integral

Usando los lemas probados en la subsección precedente se puede demostrar el siguiente teorema que resume las propiedades más importantes de la integral.

Teorema 8.2 (Propiedades de la Integral).

1. *Si $c \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b c = c(b-a)$*
2. *Si f es integrable en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, y además*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. *Si f es integrable en $[a,c]$, y en $[c,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

4. *Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ entonces $(f+g)$ es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

5. *Si f es una función integrable en $[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces (αf) es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$$

6. *Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

7. *Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Demostración. 1. Sea $f(x) = c \; \forall x \in [a,b]$, sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$ entonces en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se cumple que

$$m_i(f) = M_i(f) = c$$

por lo tanto las sumas inferior y superior son

$$s(f,p) = S(f,P) = c\sum \Delta x_i = c(b-a).$$

Claramente entonces

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a) \Rightarrow \int_a^b c = c(b-a)$$

Luego,

$$\int_a^b c = c(b-a).$$

2. Por lema 1, si f es integrable en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ (ambos $\subseteq [a,b]$) además por lema 2:

$$\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^b f$$

de donde claramente

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

3. Si f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, entonces está definida y acotada en $[a,b]$. Por lema 2:

$$\overline{\int_a^b} f \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Pero como la desigualdad contraria siempre es cierta, se deduce que f es integrable en $[a,b]$ y su integral vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

4. Como f y g son integrables en $[a,b]$ entonces el lema 3 se escribe así:

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f+g).$$

Luego $(f+g)$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f+g).$$

5. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$. Analicemos primeramente el caso $\alpha \geq 0$. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} m_i(\alpha f) &= \alpha m_i(f), \text{ y} \\ M_i(\alpha f) &= \alpha M_i(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S(\alpha f, P) &= \alpha S(f, P), \text{ y} \\ s(\alpha f, P) &= \alpha s(f, P). \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \sup\{s(\alpha f, P)\} &= \sup\{\alpha s(f, P)\} = \alpha \sup\{s(f, P)\}, \text{ y} \\ \text{ínf}\{S(\alpha f, P)\} &= \text{ínf}\{\alpha S(f, P)\} = \alpha\, \text{ínf}\{S(f, P)\}, \end{aligned}$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} \alpha f = \overline{\int_a^b} \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

por lo tanto αf es integrable en $[a, b]$ y $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

En las líneas anteriores se ha usado el resultado bien conocido que dice que si $\alpha \geq 0$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto acotado entonces

$$\begin{aligned} \sup(\alpha A) &= \alpha \sup(A), \text{ y} \\ \text{ínf}(\alpha A) &= \alpha\, \text{ínf}(A). \end{aligned}$$

En el caso en que $\alpha < 0$ la propiedad anterior se cambia por

$$\begin{aligned} \sup(\alpha A) &= \alpha\, \text{ínf}(A), \text{ y} \\ \text{ínf}(\alpha A) &= \alpha \sup(A), \end{aligned}$$

por lo tanto ahora tendremos que

$$m_i(\alpha f) = \alpha M_i(f), \text{ y } M_i(\alpha f) = \alpha m_i(f)$$

de donde

$$S(\alpha f, P) = \alpha s(f, P), \text{ y } s(\alpha f, P) = \alpha S(f, P)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \sup\{s(\alpha f, P)\} &= \sup\{\alpha S(f, P)\} = \alpha\, \text{ínf}\{S(f, p)\}, \text{ y} \\ \text{ínf}\{S(\alpha f, P)\} &= \text{ínf}\{\alpha s(f, P)\} = \alpha \sup\{s(f, p)\}, \end{aligned}$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} \alpha f = \overline{\int_a^b} \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

Por lo tanto αf es integrable en $[a, b]$ y $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

6. Sea $h = g - f$. Como $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$ entonces $h(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$. Además $h = g + (-1)f$ es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f$. Como $h(x) \geq 0 \forall x \in [a,b]$, entonces para cualquier partición de $[a,b]$ se tendrá que $m_i(h) \geq 0$ luego $s(h,P) \geq 0$.

   Entonces
$$0 \leq s(h,P) \leq \underline{\int_a^b} h = \int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f,$$
   de donde
$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

7. Sean
$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$
   y
$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}.$$

   Entonces $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$. Para probar que $|f|$ es integrable probaremos previamente que f^+ lo es. Si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición cualquiera de $[a,b]$ entonces como $f(x) \leq f^+(x)$, $\forall x \in [a,b]$ entonces $m_i(f) \leq m_i(f^+)$, o sea,
$$-m_i(f^+) \leq -m_i(f). \tag{8.10}$$

   Además, si $M_i(f) \geq 0$ entonces $M_i(f^+) = M_i(f)$ y entonces sumando con (8.10) se obtiene que
$$M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f).$$

   Si por el contrario $M_i(f) < 0$ entonces f será negativa en el intervalo y luego $f^+ = 0$. Por lo tanto $M_i(f^+) = m_i(f^+) = 0$ de donde claramente
$$M_i(f^+) - m_i(f^+) = 0 \leq M_i(f) - m_i(f).$$

   En definitiva, en cualquier intervalo de la partición se cumple que
$$M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
   y por lo tanto sumando
$$S(f^+,P) - s(f^+,P) \leq S(f,P) - s(f,P).$$

   Gracias a esta última desigualdad, deducimos que ya que f es integrable en $[a,b]$, entonces $(\forall \epsilon > 0)(\exists P' \in \mathcal{P}_{[a,b]})$ tal que
$$S(f,P') - s(f,P') \leq \epsilon$$
   y por lo tanto
$$S(f^+,P') - s(f^+,P') \leq \epsilon,$$
   luego f^+ es integrable en $[a,b]$.

Como $f = f^+ - f^-$ entonces $f^- = f^+ - f$ y en consecuencia f^- también es integrable. Por último como $|f| = f^+ + f^-$ es la suma de funciones integrables, entonces también es integrable en $[a, b]$.

Para demostrar la desigualdad basta con recordar que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

y en consecuencia

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

es decir,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

□

Integral de a a b con $a \geq b$

Definición Sea f una función integrable en un intervalo $[p, q]$. Si $a, b \in [p, q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= -\int_b^a f \quad \text{si } a > b, \text{ o} \\ \int_a^b f &= 0 \quad \text{si } a = b. \end{aligned}$$

con esta definición, las propiedades de la integral se pueden enunciar así:

Proposición 8.2. *Sean f y g integrales en $[p, q]$ y $a, b \in [p, q]$ entonces:*

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b - a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in [p, q]$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [p, q] \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b g \right|$

6) $\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$

Demostración. La demostraciones son sencillas y se dejan propuestas como ejercicios.

Guía de Ejercicios

1. Siguiendo el ejemplo de tutoría, se propone calcular las áreas encerradas bajo las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$ y $f(x) = x^3$. Por cierto en los dos primeros casos los resultados son bien conocidos, no así en el tercero. Nótese que al resolver estos ejercicios se observa lo siguiente:

función	Area entre 0 y b	donde
$f(x) = x^0$	$b \cdot h$	$h = 1$
$f(x) = x^1$	$\frac{b \cdot h}{2}$	$h = b$
$f(x) = x^2$	$\frac{b \cdot h}{3}$	$h = b^2$
$f(x) = x^3$	$\frac{b \cdot h}{4}$	$h = b^3$

Formule una generalización a estos resultados a potencias superiores.

2. Calcular el área encerrada bajo la función $\operatorname{sen}(x)$ entre 0 y $\pi/2$.

3. Calcule la integral $\int\limits_a^b (cx + d)$ usando una familia de particiones equiespaceadas.

4. Calcule la integral $\int\limits_a^b (e^x)$ usando una familia de particiones equiespaceadas.

Considere la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \qquad x \in [a, b].$

(a) Calcule $s(f, P)$ y $S(f, P)$.

(b) Calcule $\inf\limits_{P \in \mathcal{P}_{a,b}} S(f, P)$.

5. Dados dos funciones f y g integrables en $[p, q]$ y $a, b \in [p, q]$, demostrar que:

1) $\displaystyle\int_a^b \alpha = \alpha(b - a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \forall c \in [p, q]$

3) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [p, q] \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|$

6. Usando sumas de Riemann calcular los siguientes límites

(a) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$.

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{k + n}$.

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + 4k/n}}$.

(d) Calcular $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^3} \right)$.

Guía de Problemas

P1. Considere la sucesión $a_n = \int\limits_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

(a) Explique por qué (a_n) está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann integrable en $[0,n]$, y muestre que es estrictamente creciente.

(b) Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, ..., n\}$.

(c) Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q\frac{1-q^n}{1-q} < \int\limits_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}.$$

(d) Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}.$$

P2. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

(a) Si $S(\cdot,\cdot)$ y $s(\cdot,\cdot)$ denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se cumple

$$S(\frac{1}{f}, P) - s(\frac{1}{f}, P) \leq \frac{1}{c^2}\left\{S(f,P) - s(f,P)\right\}.$$

(b) Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a,b]$.

P3. Sea $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente

(a) Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{1=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \geq 2.$$

(b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \quad \forall n \geq 1.$$

Indicación: $\int_1^n \ln(x)dx = n\ln n - (n+1)$.

P4. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, x \in [0,1]$.

(a) Calcule $s(f,P)$ y $S(f,P)$.

(b) Calcule $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} S(f,P)$ y $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_{0,1}} s(f,P)$.

(c) Concluya que f es integrable y que $\int\limits_0^1 f = 0$.

P5. **(a)** Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}}+\frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^{(1/4)}}\right)$$

Indicación: Considere la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

(b) Demuestre que $\int\limits_a^b \frac{1}{x}dx = \ln(b) - \ln(a)$, donde $0 < a < b$.

Indicación: Considere la partición $x_i = aq^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Teorema Fundamental de Cálculo

9.1 Teorema Fundamental del Cálculo

Proposición 9.1. *Sea f una función integrable en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, Entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

Demostración. Sea $x_0 \in [a,b]$. Probemos que G es continua en x_0. Para esto, probemos que

$$\lim_{h\to 0} G(x_0+h) = G(x_0),$$

es decir, equivalentemente probemos que

$$\lim_{h\to 0} |G(x_0+h) - G(x_0)| = 0.$$

Para probar esto último veamos primero que

$$\begin{aligned}
|G(x_0+h) - G(x_0)| &= \left| \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f| \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} M(|f|) \right| \\
&= M(|f|)|h|,
\end{aligned}$$

donde $M(|f|) = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Con esto, claramente si $h \to 0$ entonces $|G(x_0+h) - G(x_0)| \to 0$.

Teorema 9.1 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo). *Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $\operatorname{int}(I)$ y además $G' = f$ en $\operatorname{int}(I)$.

Demostración. Sea $x_0 \in \operatorname{int}(I)$. Para probar que G es derivable en x_0 debemos probar que el límite

$$G'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}$$

existe y que vale $f(x_0)$. Veamos si esto es cierto. Primeramente, notemos que

$$G(x_0+h)-G(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f$$

Consideremos primeramente el caso $h > 0$. Como f es continua en $[x_0, x_0+h]$, se tiene que existen x' y $x'' \in [x_0, x_0+h]$ tales que:

$$f(x') \leq f(x) \leq f(x''), \quad \forall x \in [x_0, x_0+h]$$

por lo tanto, integrando en $[x_0, x_0+h]$,

$$f(x')h \leq G(x_0+h)-G(x_0) \leq f(x'')h,$$

es decir,

$$f(x') \leq \frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h} \leq f(x'').$$

Claramente, si $h \to 0^+$entonces $x' \to x_0$ y $x'' \to x_0$ y como f es continua, $f(x') \to f(x_0)$ y $f(x'') \to f(x_0)$ luego

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{9.1}$$

En el caso en que $h < 0$, como f es continua en $[x_0+h, x_0]$, se sabe que $\exists x'$ y $x'' \in [x_0+h, x_0]$ tales que

$$f(x') \leq f(x) \leq f(x''), \quad \forall x \in [x_0+h, x_0]$$

por lo tanto, integrando en $[x_0+h, x_0]$,

$$f(x')(-h) \leq -\left[G(x_0+h)-G(x_0)\right] \leq f(x'')(-h),$$

es decir

$$f(x') \leq \frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h} \leq f(x'').$$

Claramente, si $h \to 0^-$entonces $x' \to x_0$ y $x'' \to x_0$ y como f es continua, $f(x') \to f(x_0)$ y $f(x'') \to f(x_0)$ luego

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h} = f(x_0). \tag{9.2}$$

Juntando (9.1) y (9.2) se obtiene el resultado pedido. $\square$

Observación: Notemos que la expresión $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in \operatorname{int}(I)$ más la continuidad de G en I (Probada en la proposición 9.1) nos indican que $G(x) = \displaystyle\int_a^x f$ es una primitiva de la función f en I. Es decir, el primer teorema fundamental del cálculo nos garantiza que toda función continua en un intervalo posee primitivas. Este resultado lo conocíamos en el caso de funciones sencillas como x^2 o $\operatorname{sen} x$ ya que

$$\begin{aligned} \int x^2 &= \frac{x^3}{3} + C, \text{ y} \\ \int \operatorname{sen} x &= -\cos x + C, \end{aligned}$$

es decir éramos capaces de encontrar una primitiva por simple inspección. Sin embargo en el caso por ejemplo de e^{x^2} o $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, donde no éramos capaces de calcular la primitiva, nos hacíamos la pregunta de si tal primitiva existía o no. Este teorema nos dice que sí, es decir la primitiva de funciones continuas siempre existe independientemente de si somos o no capaces de calcularla por inspección.

En el caso en que la primitiva de una función continua se conozca a priori, este teorema permite también calcular las integrales. Este resultado aparece como el siguiente corolario.

Corolario 9.1 (del Primer Teorema del Cálculo). *Si la función F, continua en I, es una primitiva de f en I, entonces:*

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración. Dados $a, b \in I$. Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^x f$. En virtud del Primer Teorema Fundamental del Cálculo se sabe que $G' = f$ sobre I, luego $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + C$. Pero como $G(a) = 0$ entonces esta constante vale $C = -F(a)$ y luego $G(x) = F(x) - F(a)$ por lo tanto $G(b) = \displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$. □

Ejemplo 9.1.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\, x dx = (-\cos \pi) - (-cos 0) = 2$$

Ejemplo 9.2.

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0\right) = \frac{11}{6}$$

Notación: En los ejemplos aparece la expresión $F(b) - F(a)$. Para no escribir dos veces la función F (sobre todo cuando su expresión es larga) se acostumbra a anotar

$$F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

Así el ejemplo 9.2 se escribe

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{6}.$$

Teorema 9.2 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Observación: El Segundo Teorema fundamental del cálculo es idéntico en contenido al corolario del Primer T.F.C., solo la hipótesis es más amplia, ya que solo pide que f sea integrable y no necesariamente continua.

Demostración. Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$, entonces en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función $F(x)$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio, es decir, $\exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Como:$F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow F'(\xi_i) = f(\xi_i)$, además,

$$m_i(f) \leq f(\xi_i) \leq M_i(f)$$

Luego, multiplicando por Δx_i se tiene

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}),$$

o sea

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$, se obtiene:

$$s(f,P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f,P).$$

Esta última desigualdad es válida para cualquier partición P de $[a,b]$, luego, tomando supremo e ínfimo se tiene que:

$$\underline{\int_a^b} f \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Y como f es integrable en $[a,b]$ resulta que:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Fórmula de Integración por Partes

Recordamos que si f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b) se tiene que:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Si además alguna de las funciones $f'g$ o fg' fuera integrable, la otra también lo sería y se tendría que

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg',$$

es decir,

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

Con esto se ha demostrado el teorema siguiente

Teorema 9.3. *Sean f y g son dos funciones continuas en un intervalo I y diferenciables en $int(I)$. Sean $a, b \in int(I)$. Si f' y g' son continuas entonces*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Integración por Sustitución o Cambio de Variable

Teorema 9.4. *Sea g una función continua en un intervalo I y derivable en $int(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a, b])$, entonces:*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

Demostración. Sea F una primitiva de f (la que existe por ser f continua), por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)) = F \circ g\Big|_a^b. \tag{9.3}$$

Además:

$$\frac{d}{dx}(F \circ g) = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Luego $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g) \cdot g'$, o sea

$$\int_a^b (f \circ g)g' = F \circ g\Big|_a^b.$$

Comparando esta fórmula con (9.3) resulta que:

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

□

9.2 Teoremas del Valor Medio y Taylor para integrales.

Teoremas del Valor Medio

Definición (Valor Medio de una Función) Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ al número real:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

A este real se le anota $\bar{f}$ o bien $\langle f\rangle$.

Teorema 9.5 (Valor Medio para integrales). *Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists\xi\in(a,b)$ tal que $f(\xi)=\langle f\rangle$, es decir:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Demostración. Sea $G(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, entonces G es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), luego por teorema del valor medio para derivadas se sabe que $\exists\xi\in(a,b)$ tal que

$$G(b)-G(a)=G'(\xi)(b-a),$$

es decir,

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

□

Teorema 9.6 (Valor Medio generalizado para integrales). *Si f es continua en $[a,b]$ y g es una función integrable en $[a,b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists\xi\in[a,b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} m &= \text{ínf}\{f(x): x\in[a,b]\}, \text{ y} \\ M &= \sup\{f(x): x\in[a,b]\}. \end{aligned}$$

Claramente

$$m\le f(x)\le M,\quad \forall x\in[a,b],$$

entonces multiplicando por $|g|(x)$ se tiene que

$$m|g|(x)\le f(x)|g|(x)\le M|g|(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

e integrando

$$m\int_a^b |g| \leq \int_a^b f|g| \leq M\int_a^b |g|.$$

Si $\displaystyle\int_a^b |g| = 0 \Rightarrow \int_a^b f|g| = 0 = f(\xi)\int_a^b |g|, \quad \forall\xi \in [a,b]$ y por lo tanto el teorema es cierto.

Si $\displaystyle\int_a^b |g| > 0 \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f|g|}{\int_a^b |g|} \leq M$ y como f es continua en $[a,b]$ y $m = \min(f)$ y $M = \max(f)$, entonces por teorema del valor intermedio, $\exists\xi \in [a,b]$ tal que:

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f|g|}{\int_a^b |g|}$$

y por lo tanto

$$\int_a^b f|g| = f(\xi)\int_a^b |g|, \quad \text{algún } \xi \in [a,b]. \tag{9.4}$$

Como $g(x)$ no cambia de signo en $[a,b]$ entonces $g = \lambda|g|$ ($\lambda = 1$ o -1 dependiendo del signo de g). Luego multiplicando (9.4) por λ se obtiene el resultado.

Teorema de Taylor con Resto Integral

Sea I un intervalo abierto que contenga al intervalo cerrado de extremos x_0 y x. Consideremos una función f de clase $\mathcal{C}^{(n+1)}(I)$, entonces claramente

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0),$$

es decir,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt. \tag{9.5}$$

Además, si integramos por partes la última expresión del modo siguiente:

$$\begin{aligned} u = f'(t) &\quad\rightarrow\quad u' = f''(t) \\ v' = 1 &\quad\rightarrow\quad v = (t-x) \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f'(t)dt &= f'(t)(t-x)\Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt. \end{aligned}$$

Reemplazando esta integral en (9.5) el valor de $f(x)$ sería

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)f''(t)dt. \tag{9.6}$$

Nótese que aquí se justifica plenamente el uso de la notación de Leibnitz para integrales, ya que así se distingue la variable de integración t de la constante x.

Si integramos por partes nuevamente, del modo siguiente

$$\begin{aligned} u = f''(t) &\rightarrow u' = f'''(t) \\ v' = (x-t) &\rightarrow v = -\frac{(x-t)^2}{2} \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt &= \left.\frac{f''(t)(x-t)^2}{2}\right|_{x}^{x_0} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt \\ &= \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt. \end{aligned}$$

(Nótese que en la primera línea se ha escrito $-F(t)\big|_{x}^{x_0}$ en lugar de $F(t)\big|_{x_0}^{x}$. Este es un truco clásico a usar cuando la primitiva tiene un signo menos en su definición. Así se evitan los repetidos signos y las posibles fuentes de errores en los cálculos). Reemplazando esta integral en la fórmula (9.6) se obtiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt.$$

Si continuamos integrando por partes se obtendrá la fórmula siguiente

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

La demostración se realiza por inducción, desarrollando por partes la última integral. El término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

se denomina resto integral del desarrollo de Taylor.

Observación: Si en la expresión integral del resto se aplica el teorema del valor medio generalizando para integrales se tiene que:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x}^{x_0} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

que corresponde a la expresión de Lagrange para el resto del desarrollo de Taylor.

Guía de Ejercicios

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f es periódica de periodo p. Pruebe que $\int\limits_a^{a+p} f(x) = \int\limits_0^p f(x)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

2. Hacer una aseveración general relativa a $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ para f una función impar y otra para f función par.

3. Demuestre que si f es una función continua en $[a, b]$ y $\int\limits_a^b f(x) = 0$, entonces existe un c en $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

4. Hallar $\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b f(x)g(y)dy \right) dx$ en términos de $\int\limits_a^b f$ y $\int\limits_a^b g$.

5. Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \int\limits_0^x xf(t)dt$.

6. Demostrar que si f es continua entonces $\int\limits_0^x f(u)(x-u)du = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^u f(t)dt \right) du$.

7. Suponga que f es integrable en $[a, b]$. Demostrar que existe un número x en $[a, b]$ tal que $\int\limits_a^x f = \int\limits_x^b f$. Demostrar, con un ejemplo, que no siempre es posible elegir x que esté en (a, b).

8. Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

$$f(x) = \int\limits_1^{x^2} \operatorname{sen}(t^4)dt \quad f(x) = \int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} \tfrac{t^2}{1+t^6}dt \quad f(x) = \int\limits_{x^3}^{\cos(x)} (x-t)\operatorname{sen}(t^2)dt$$

9. Sea f una función tal que $f(x) = \int\limits_0^x (x-t)^2 f(t)dt$. Muestre que $f''(x) = 2f(x)$.

Guía de Problemas

P1. Sea $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ una función biyectiva y derivable en $]0, \infty[$. Muestre que $g(x) = \int\limits_0^x f(t)dt + \int\limits_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$, satisface que $g'(x) = f(x) + f'(x)x$. Concluya que $g(x) = xf(x)$.

P2. Considere la función $g(x)$ definida por $g(x) = \int\limits_0^x \frac{\arctan(t)}{t}$, donde $\frac{\arctan(t)}{t}$ se define en cero por continuidad.

(a) Demuestre que: $\int\limits_0^1 g(x)dx = g(1) - \int\limits_0^1 \arctan(t)dt$

(b) Utilizando lo anterior, muestre que : $\int\limits_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$.

P3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int\limits_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))dx + f(x).$$

(a) Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$.

(b) Calcule la integral $\int\limits_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$.

Indicación: Observe que $f(g^{-1}(x)) = \tanh(x)$.

P4. Sea $f(x) := \int_1^x x \ln(tx)\, dt$, definida en $]0, +\infty[$.

(a) Encuentre $\int \ln(t)$ y calcule $f(2)$.

(b) Demuestre que $f'(x) = (4x - 1)\ln(x) \quad \forall x \in]0, +\infty[$.

P5. Asumiendo que la función $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ es continua en $[0, \tan(1)]$, encuentre la derivada de la función $f(x) = \int\limits_0^{\tan(x)} \operatorname{arcsen}(\arctan(t))dt$ para $x \in [0, 1]$.

P6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f((a + b) - x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

(a) Probar que $\int\limits_a^b xf(x) = \frac{a+b}{2} \int\limits_a^b f(x)$

(b) Sea ahora $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que $\int\limits_0^\pi xg(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi g(\operatorname{sen}(x))$.

(c) Deduzca que $\int\limits_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}$ y calcule el valor de la integral.

SEMANA 10

Aplicación de la Integral de Riemann

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

10.1 Cálculo de Areas

Sea f una función no negativa sobre $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, queremos definir el área de las regiones del tipo:

$$R = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [0, f(x)]\}.$$

Recordamos que las condiciones básica de la definición de área son:

(i) $E \subseteq F \Rightarrow$ área$(E) \leq$ área(F)

(ii) Si área$(E \cap F) = 0$ entonces área$(E \cup F) =$área$(E)+$área(F)

(iii) Si E es una región rectangular de lados a y b entonces área$(E) = ab$.

Si designamos el área de la región R por $A_b^a(f)$, entonces las propiedades anteriores se traducen en que

(i) $0 \leq f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow A_a^b(f) \leq A_a^b(g)$

(ii) $A_a^b(f) = A_a^c(f) + A_c^b(f), \quad \forall c \in [a,b]$

(iii) $A_a^b(c) = c(b-a)$

Probaremos a continuación que si f es una función Riemann integrable, entonces la única definición posible de área de la región R es la dada por la Integral de Riemann. En efecto, si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición cualquiera de $[a,b]$, entonces por la propiedad ii) se cumple que

$$A_a^b(f) = \sum_{i=1}^{n} A_{x_{i-1}}^{x_i}(f),$$

usando además i) y iii), cada área dentro de la sumatoria se puede acotar

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq A_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Luego, sumando de $i = 1$ hasta n se obtiene que el área de la región R debe esta acotada entre:

$$s(f,P) \leq A_a^b(f) \leq S(f,P).$$

Como esta desigualdad es cierta $\forall P$, debe cumplirse necesariamente que

$$\underline{\int_a^b} f \leq A_a^b(f) \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Por lo tanto si la función f es integrable entre a y b, para que el concepto de área satisfaga las propiedades i), ii), iii), la única definición posible es:

$$\text{área}(R) = A_a^b(f) = \int_a^b f$$

Área de regiones definida por funciones no positivas

Si f es una función definida en $[a,b]$ con valores negativos, entonces el área de la región R encerrada sobre su gráfico, y debajo del eje de las x se puede calcular fácilmente como el área bajo la curva $y = -f(x)$. Luego se tendrá que el área es

$$\text{área}(R) = \int_a^b (-f) = \int_a^b |f|.$$

En general si f es una función que cambia de signo en $[a,b]$ un número finito de veces y R es la región comprendida entre el gráfico de f (por sobre o bajo, según corresponda) y el eje OX, entonces el área de la región R se podrá calcular como

$$A_a^b(R) = \int_a^b |f|$$

Ejemplo 10.1.
Cálculo de área encerrada por la curva $y = \text{sen } x$ entre 0 y 2π.

Usando las fórmulas anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} A_0^{2\pi}(\text{sen } x) &= \int_a^{2\pi} |\text{sen } x| dx \\ &= \int_0^{\pi} \text{sen } x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x dx \\ &= (-\cos x)|_0^{\pi} + (\cos x)_{\pi}^{2\pi} = (1+1) + (1+1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Nótese que de usar solamente la fórmula $\int_0^{2\pi} \text{sen } x dx$ en el cálculo del área se obtendría el resultado cero. Lo cual significa que la parte positiva y la negativa de la función encierran las mismas áreas (y por eso la anulación) pero no que el área buscada valga cero.

Ejemplo 10.2.
Calcular el área encerrada entre las curvas $y^2 = x$ e $y = \frac{1}{2}(x-3)$.

Estas dos curvas se cortan en la solución del sistema

$$\begin{cases} 2y &= x - 3 \\ x &= y^2 \end{cases}$$

Este sistema se resuelve fácilmente reemplazando la segunda ecuación en la primera, obteniéndose así la cuadrática

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

cuyas raíces son $y = -1$ e $y = 3$. Por lo tanto los puntos de intersección de la parábola y la recta son $P(1, -1)$ y $Q(9, 3)$.

El área encerrada por estas dos curvas es

$$A = \int_0^9 (f(x) - g(x))\, dx$$

donde

$$f(x) = \sqrt{x}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-3) & \text{si } 1 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

Es decir el área es

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx + \int_1^9 \left\{\sqrt{x} - \frac{1}{2}(x-3)\right\} dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^9 (\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2})dx \\
&= 2\left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 + \left.(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x)\right|_1^9 \\
&= \frac{4}{3} + (\frac{27\cdot 2}{3} - \frac{81}{4} + \frac{27}{2}) - (\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}) \\
&= \frac{4}{3} + \frac{1}{4}(72 - 81 + 54) - \frac{1}{12}(8 - 3 + 18) \\
&= \frac{4}{3} + \frac{45}{4} - \frac{23}{12} = \frac{1}{12}(16 + 135 - 23) = \frac{128}{12} \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

Otra Forma:

No siempre es necesario integrar a lo largo del eje OX. En algunos casos, como este, puede ser conveniente integrar a lo largo del eje OY, de la siguiente forma

$$A = \int_{y_{min}}^{y_{max}} (x_2(y) - x_1(y))\, dy$$

donde $x_2(y) = 2y + 3$ y $x_1(y) = y^2$

De este modo,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3}(2y+3-y^2)dy \\
&= (y^2+3y-\frac{y^3}{3})\Big|_{-1}^{3} \\
&= (9+9-9)-(1-3+\frac{1}{3}) \\
&= 9+2-\frac{1}{3} = 11-\frac{1}{3} \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10.1:

1. Probar que el área de una elipse de semi ejes a y b es πab.
2. Calcular el área de un sector circular de radio R y ángulo interno α (R. $A = \frac{R^2\alpha}{2}$).
3. Concluir que para una circunferencia, $A = \pi R^2$.

10.2 Volúmenes de Sólidos

Consideremos un sólido en el espacio. Nos interesa calcular el Volumen V de dicho sólido.

Para esto se traza un eje en el espacio, en una dirección conveniente, de modo que para cada posición x en dicho eje, se conozca el valor del área de la sección perpendicular del sólido a dicho eje. Denotemos por OX a este eje y por $A(x)$ al área de la sección perpendicular al eje $0X$ del sólido. Supongamos que el sólido se encuentra comprendido entre los planos $x = a$ y $x = b$.

Probaremos que si la función $A(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces el volumen del sólido es $\int_a^b A(x)dx$.

En efecto, sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición arbitraria de $[a, b]$. Aceptemos que el concepto de volumen satisface las condiciones siguientes (análogas a las del área).

(i) $A \subseteq B \Rightarrow V(A) \leq V(B)$

(ii) $V(A \cap B) = 0 \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

(iii) Si A es un cilindro recto de base B y altura h, entonces $V(A) = B \cdot h$

En la última propiedad entendemos por cilindro a todo conjunto en el espacio cuya base es un conjunto plano (no necesariamente un círculo). Incluso es posible agregar conjuntos donde la sección transversal a una dirección dada es constante.

Sean C_i la parte del sólido entre x_{i-1} y x_i, $\underline{C}_i$ el cilindro de base $m_i(A)$ y altura $(x_i - x_{i-1})$, y por último, $\overline{C}_i$ el cilindro de base $M_i(A)$ y altura $(x_i - x_{i-1})$. Con esto, claramente:

$$\underline{C}_i \subseteq C_i \subseteq \overline{C}_i$$

y por lo tanto,

$$V(\underline{C}_i) \leq V(C_i) \leq V(\overline{C}_i),$$

luego:

$$m_i(A)(x_i - x_{i-1}) \leq V(C_i) \leq M_i(A)(x_i - x_{i-1}).$$

Sumando esta desigualdad desde $i = 1$ hasta $i = n$ se obtiene que

$$s(A, P) \leq V(C) \leq S(A, P),$$

luego, si la función $A(x)$ es acotada se tendrá que

$$\underline{\int_a^b} A \leq V(C) \leq \overline{\int_a^b} A,$$

de donde, si además $A(x)$ es una función integrable, resulta natural definir:

$$V(C) = \int_a^b A(x)dx$$

Ejemplo 10.3.
Calcular el Volumen de un elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Aquí conviene usar como eje apropiado al propio eje OX. De este modo, dado un punto x_0, la intersección del elipsoide con el plano $x = x_0$ son los pares ordenados $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Esta ecuación posee solución no vacía sólo si $|x_0| \leq a$, es decir, el sólido se encuentra comprendido entre los planos $x = -a$ y $x = a$. En el caso en que $x_0 \in (-a, a)$ se puede escribir

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - (\frac{x_0}{a})^2 \qquad \text{, es decir,}$$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - (\frac{x_0}{a})^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - (\frac{x_0}{a})^2}\right)^2} \leq 1.$$

Esto indica que la región transversal es una elipse de semi ejes $b\sqrt{1 - (\frac{x_0}{a})^2}$ y $c\sqrt{1 - (\frac{x_0}{a})^2}$ por lo tanto su área transversal vale

$$A(x_0) = \pi bc(1 - \frac{x_0^2}{a^2}).$$

Claramente para $x_0 = \pm a$ la sección transversal es sólo un punto, cuya área es nula. Luego la fórmula anterior es valida para todo $|x_0| \leq a$. Con esto el cálculo del volumen del elipsoide se obtiene integrando del modo siguiente

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} A(x)dx \\
&= \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx \\
&= 2\frac{\pi bc}{a^2} \left.(a^2 x - \frac{x^3}{3})\right|_0^a \\
&= \frac{2\pi bc}{a^2}(a^3 - \frac{a^3}{3}) \\
&= \frac{4}{3}\pi abc.
\end{aligned}$$

Claramente en el caso particular de una esfera ($a = b = c = R$) se obtiene la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

10.3 Volumen de un sólido de revolución

Un sólido de revolución es la figura geométrica que se obtiene por la rotación de un área plana en torno a un eje fijo. Dos casos particulares se destacan y corresponden a los siguientes:

1. Rotación de la región: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ en torno al eje $0X$. Este caso corresponde a un caso particular de los sólidos donde se conoce el área transversal a una dirección dada. En efecto las secciones transversales al eje de rotación son círculos de radio $f(x)$. Por esta razón, su volumen se calcula como

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

2. Rotación de la misma región en torno al eje OY (bajo el supuesto que $0 < a < b$). En este caso no es difícil probar que el volumen de dicho sólido se puede calcular mediante la integral

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Ejemplo 10.4.
Calcular el volumen del sólido generado por la rotación en torno al eje OY de la región limitada por las curvas $y = (x - 2)^2$, $y = 0$ y $x = 5$.

Solución 1: Método de la cáscara

Como se trata de una región obtenida por rotación en torno a eje OY, podemos usar la fórmula

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

con $a = 2$, $b = 5$. De este modo tenemos que:

$$V = 2\pi \int_2^5 (x-2)^2 x dx$$

Para el cálculo una posibilidad es desarrollar el cuadrado e integrar. Otra, la usada aquí, es hacer un cambio de variable de modo que el cuadrado quede sobre un monomio y no un binomio (esta técnica se adapta bien cuando el exponente sobre el binomio es grande). Es decir pongamos $u = x - 2$ con lo cual $du = dx$ y la integral queda

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 u^2(u+2)du \\ &= 2\pi \int_0^3 (u^3 + 2u^2)du \\ &= 2\pi \left(\frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3}\right)\Big|_0^3 \\ &= 2\pi \cdot 27\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 27}{12}(9+8)\pi \\ &= \frac{27}{6} \cdot 17\pi = \frac{9 \cdot 17}{2}\pi = \frac{153}{2}\pi. \end{aligned}$$

Solución 2: Método del disco

Intercambiando los roles de x e y, este sólido se puede interpretar como una rotación en torno al eje de integración de una región comprendida entre dos funciones. De este modo la fórmula

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

puede ser reescrita en forma apropiada al problema como

$$V = \int_0^9 A(y)dy = \pi \int_0^9 (5^2 - f^2(y))dy$$

donde $f(y) = 2 + \sqrt{y}$. Usando este método el volumen queda

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^9 (25 - (4 + 4\sqrt{y} + y))dy \\ &= \pi \left(21y - 4\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^9 \\ &= \pi 9\left(21 - \frac{8}{3} \cdot 3 - \frac{9}{2}\right) \\ &= \frac{9\pi}{2}(26 - 9) = 17 \cdot 9\frac{\pi}{2} = \frac{153}{2}\pi. \end{aligned}$$

Notemos primeramente que ambos resultados coinciden (como tiene que ser).

Los nombres usados de la cáscara y el disco provienen de la interpretación geométrica de las dos integrales calculadas. Recordando que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

cada vez que se integre una función f se puede buscar la interpretación de $f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ y así tal vez recordar mejor las numerosas fórmulas de integración que hemos ido obteniendo. En el primer caso

$$V = 2\pi \int_2^5 (x-2)^2 x dx$$

la expresión $2\pi x f(x)\Delta x$ se puede interpretar como el volumen de una pequeña cáscara de base un anillo de radio x y espesor Δx, es decir área basal $2\pi x\Delta x$ y altura $f(x)$.

En el segundo caso donde la integral era

$$V = \pi \int_0^9 (5^2 - f^2(y))dy$$

la expresión $\pi(5^2 - f^2(y))\Delta y$ se puede interpretar como el volumen de un disco perforado de espesor Δy cuya base esta comprendida entre los círculos de radio $f(y)$ y 5. Por esta razón el área basal es $\pi 5^2 - \pi f^2(y)$ es decir el área del circulo externo menos el área del circulo interno.

Guía de Ejercicios

1. **(a)** Probar que el área de una elipse de semi ejes a y b es πab.

(b) Calcular el área de un sector circular de radio R y ángulo interno α.
Respuesta: $A = \frac{R^2\alpha}{2}$.

(c) Concluir que para una circunferencia, $A = \pi R^2$.

2. Calcular el volumen de un toro de revolución, es decir el sólido obtenido por la rotación del círculo de radio r centrado en $(R, 0)$ (donde $R > r$) en torno al eje OY.

3. Hallar el área de la región encerrada entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

4. Determine el área del manto del sólido engendrado al rotar, en torno al eje OY, el trozo de la curva $y = \frac{x^2}{2}$, comprendido entre 0 y 1.

5. Hallar el volumen del cuerpo formado por la rotación en torno de la recta $y = -1$, de la región acotada por $y = 4 - x^2$ e $y = 3$.

Guía de Problemas

P1. Considere la curva cuyos puntos (x, y) satisfacen $(1 + x^2)y^2 = x^2(1 - x^2)$.

(a) Calcule el área de la región encerrada por esta curva.

(b) Calcule el volumen de revolución generado por la rotación de esta curva en torno al eje OX.

P2. Sea $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$. Si

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

(a) Encuentre el área de la región R.

(b) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región R en torno al eje OX.

P3. Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

encuentre el área del manto generado al rotar esta elipse en torno al eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

P4. Sean $f, g \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3} - \sqrt{1 - x^2}$.

(a) Calcular el área encerrada entre ambas curvas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

(b) Determinar el volumen del sólido generado por la rotación de la región encerrada por el eje OX y la curva $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$, en torno a OX.

P5. **(a)** La parábola $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$ corta el eje Y en $P_0(0, 1)$. Considere sobre la parábola el punto $P(a, f(a)),\ a \geq 0$. Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento P_0P es igual a $A = a^3$.

(b) Dadas las curvas $y = mx$ y $y = x^2$, considere la región limitada por ambas curvas y encuentre el valor de $m > 0$, para que los volúmenes de los sólidos obtenidos al rotar la región definida en torno al eje OX y al eje OY, sean iguales.

Aplicaciones de la Integral (2)

11.1 Longitud de un Arco de Curva (Rectificación)

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano OXY, donde $x \in [a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para el largo de esta curva.

Para calcular este largo, consideremos una partición $Q = \{x_0 \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se aproxima la curva por el segmento recto que une los puntos $P_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $P_i = (x_i, f(x_i))$.

A falta de una definición del concepto de longitud de una curva cualquiera, diremos que el largo buscado es el límite del largo del polígono así construido cuando la norma de la partición tiende a cero. Es decir

$$L_a^b(f) = \lim_{|Q| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

Llamemos ΔL_i al largo del trazo $\overline{P_{i-1}P_i}$. Es claro que:

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1})^2}$$

Si suponemos que f es diferenciable, entonces:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto:

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1})$$

con lo cual el largo buscado sería

$$L_a^b(f) = \lim_{|Q| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Este último límite es bien conocido si la función $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ es continua y vale

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

En consecuencia, diremos que esta última fórmula define el concepto de longitud de curva cuando f es una función continuamente diferenciable en un intervalo $[a, b]$. Incluso usaremos esta fórmula en el caso de funciones continuamente diferenciables por pedazos.

11.2 Superficie del Manto de un Sólido de Revolución

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva en el plano OXY, donde f es continuamente diferenciable en $[a, b]$. Nos interesa obtener una expresión para calcular el área del manto del sólido generado por la rotación de la región bajo la curva $y = f(x)$, en torno al eje $0X$.

Sea $Q = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, la rotación del trazo recto que une los puntos $P_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $P_i = (x_i, f(x_i))$ genera el manto de un tronco de cono cuya área es

$$\Delta A_i = 2\pi f(\bar{x}_i)\Delta L_i$$

donde $\bar{x}_i$ es algún punto de $[x_{i-1}, x_i]$. Al igual que en el caso de la longitud de curva, diremos que el área del manto buscada es igual al límite cuando la norma de la partición tiende a cero de la suma de estas áreas cónicas. Es decir

$$\begin{aligned} A_a^b(f) &= \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \\ &= \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\bar{x}_i)(\Delta L)_i \\ &= \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\bar{x}_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \end{aligned}$$

El límite de la última suma no es el clásico limite de una suma de Riemann del tipo

$$\sum f(\eta_i)\Delta x_i$$

ya que en nuestro caso hay dos funciones evaluadas en puntos distintos. Por este motivo conviene separar la suma en dos, usando el viejo “ni quita ni pone” del modo siguiente.

$$\begin{aligned} A_a^b(f) &= \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i \\ &\quad + \lim_{|Q|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \left(f(\bar{x}_i) - f(\xi_i)\right)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i. \end{aligned}$$

Claramente la primera suma es del tipo Suma de Riemann y por lo tanto converge a

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx,$$

la segunda suma se puede acotar superiormente en módulo, usando el teorema del valor medio, por

$$|Q| 2\pi \left\{ \sup_{x\in[a,b]} f'(x) \right\} \left\{ \sup_{x\in[a,b]} \sqrt{1 + f'^2(x)} \right\} (b - a)$$

y por lo tanto converge a cero.

Con esto entonces tenemos que

$$A_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

11.3 Coordenadas Polares

DEFINICIÓN Dado los reales r y ϕ, se determina el punto P del plano de coordenadas (x, y) mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

El par (r, ϕ) corresponde a las coordenadas polares del punto P.

Observación: Un mismo punto P tiene más de un par de coordenadas polares, por ejemplo:

$$r = 1,\ \phi = 0 \Rightarrow P(x = 1, y = 0)$$

Pero también

$$r = -1,\ \phi = \pi \Rightarrow P(x = 1, y = 0).$$

Una forma de resolver este "problema" es restringir el rango de valores aceptados para r y ϕ. Por ejemplo $r \geq 0$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Pero incluso así el problema queda en $r = 0$ donde ϕ puede ser cualquiera. Se podría poner $r > 0$ pero el origen no tendría coordenada polar, etc, etc. En ingeniería conviene dejar esta ambigüedad de indeterminación a las coordenadas polares ya que típicamente se buscan puntos del plano para coordenadas polares dadas. Si el problema fuera el recíproco, muchas veces se pueden dar o bien todas las coordenadas polares de un punto, o bien alguna de ellas.

Una aplicación interesante de las coordenadas polares es estudiar conjuntos del plano definidos mediante alguna relación entre las variables r y ϕ. Muchas de estas relaciones definen curvas o regiones del plano con geometrías particulares. Veamos algunas de las curvas mas clásicas:

1. La relación $r =$ cte define una circunferencia con centro en 0

2. La relación $\phi =$ cte define una recta que pasa por el origen de pendiente tg ϕ.

3. $r = a(1 + \varepsilon\operatorname{sen}\phi)$ con ε pequeño define una curva cercana a una circunferencia de radio a.

   En efecto cuando $\phi = 0$ la distancia del punto $P = (r\cos\phi, r\operatorname{sen}\phi)$ al origen es a. Cuando ϕ varía de 0 a $\pi/2$ dicha distancia aumenta hasta $a + \varepsilon$. De ahí la distancia decrece hasta $a - \varepsilon$ (si ϕ varía de $\pi/2$ a $3\pi/2$) y posteriormente crece hasta a en $\phi = 2\pi$. Este comportamiento se repite periódicamente si $\phi \in \mathbb{R}$. La curva así obtenida se conoce con el nombre de cardioide. Es interesante notar que el gráfico de la cardioide se puede realizar aunque ε no sea pequeño. Por ejemplo si $\varepsilon = a$ en la dirección definida por $\phi = 3\pi/2$ se obtiene $r = 0$ y por lo tanto la cardioide pasa por el origen. Si además $\varepsilon > a$ existen valores de r negativos.

Ejercicio 11.1: Tratar de gráficar la cardioide de ecuación $r = 1 + 2\text{sen}\ \phi$.

Area en Coordenadas Polares

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Usando esta función se define la curva en coordenadas polares cuya ecuación es $r = f(\phi)$.

Supongamos además que la función f es no negativa y que $b - a \leq 2\pi$. Con estos supuestos se desea encontrar el área de la región R definida por

$$R = \{(r\cos\ \phi, r\text{sen}\ \phi); \phi \in [a, b], r \in [0, f(\phi)]\}.$$

Sea $P = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sean

$$\begin{aligned}
R_i &= \{(r\cos\ \phi, r\text{sen}\ \phi); \phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i], r \in [0, f(\phi)]\} \\
\underline{R_i} &= \{(r\cos\ \phi, r\text{sen}\ \phi); \phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i], r \in [0, m_i(f)]\} \\
\overline{R_i} &= \{(r\cos\ \phi, r\text{sen}\ \phi); \phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i], r \in [0, M_i(f)]\}.
\end{aligned}$$

Es claro que:

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \qquad \text{y que,}$$

$$\underline{R_i} \subseteq R_i \subseteq \overline{R_i}$$

luego:

$$\text{área}(\underline{R_i}) \leq \text{área}(R_i) \leq \text{área}(\overline{R_i})$$

pero como $\underline{R_i}$ y $\overline{R_i}$ son sectores circulares, sus áreas valen $\frac{1}{2}m_i^2(f)\Delta\phi_i$ y $\frac{1}{2}M_i^2(f)\Delta\phi_i$ respectivamente y por lo tanto

$$\frac{1}{2}m_i^2(f)\Delta\phi_i \leq \text{área}(R_i) \leq \frac{1}{2}M_i^2(f)\Delta\phi_i$$

Sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$ se obtiene que

$$\frac{1}{2}s(f^2, P) \leq \text{área}(R) \leq \frac{1}{2}S(f^2, P)$$

Si f es integrable, entonces también lo es f^2 y entonces se obtiene necesariamente que:

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\phi)d\phi.$$

11.4 Centro de Gravedad de una Superficie Plana

Introducción

Considérese un plano ideal, sin peso, en el cual se encuentran localizadas n partículas puntuales P_i de masas $m_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

Si este plano se apoya sobre un eje recto horizontal, nos interesa estudiar la tendencia del plano a rotar en torno a dicho eje accionado por el peso de las partículas.

Considerando un sistema ortogonal de ejes OXY en el plano, y la recta paralela al eje OY de ecuación $L : x = x_0$, la tendencia a rotar del plano en torno de L se mide matemáticamente por el "Momento Estático" que produce el peso de las partículas en torno de L, que, para una partícula aislada, resulta ser igual al producto del peso por la distancia al eje de rotación. Es decir, el momento estático de la partícula i con respecto a la recta L es:

$$M_L(x_i) = (x_i - x_0) \cdot m_i g.$$

Para el sistema de n partículas, el momento estático total es igual a la suma de los $M_L(x_i)$, o sea:

$$M_L = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0) m_i g.$$

El sistema de partículas estará en equilibrio cuando su momento estático total sea nulo, es decir, cuando:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0) m_i g = 0.$$

De esta ecuación se despeja fácilmente la posición de la recta en torno a la cual no hay tendencia a la rotación. Su ecuación sería

$$x_0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Análogamente si se considera ahora la tendencia del plano a rotar en torno a un eje paralelo a $0X$, se llega a la expresión:

$$y_0 = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

El punto de coordenadas (x_0, y_0) se llama centro de gravedad del sistema. Teóricamente, el plano queda en equilibrio sustentado de ese punto únicamente.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir también así:

$$\text{(Coordenada del C.G)} \times \text{(Masa Total)} = \text{Momento Estatico.}$$

Momento Estático y Centro de Gravedad de un Área Plana

El concepto de momento y de centro de gravedad se extiende fácilmente al caso en que la masa total del sistema se encuentra uniformemente distribuida sobre una región plana. Para esto debe tenerse presente que:

1. Si una región plana tiene un eje de simetría, su centro de gravedad debe estar sobre él. Es el caso, por ejemplo, de un cuadrado, un rectángulo, de un circulo, etc.
2. La masa de cualquier región de área A es $\rho \cdot A$, donde ρ es la densidad y la suponemos contante.-

Sea R la región encerrada bajo el gráfico de una función no negativa e integrable. Es decir

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\right\}.$$

Calculemos los momentos estáticos M_{OX} y M_{OY} con respecto a los ejes OX y OY respectivamente. Para ello consideremos una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ con $|P| \to 0$.

En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se tiene una región "Casi Rectangular" de ancho Δx_i y altura $f(\xi_i)$ con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ cuyo centro de gravedad es el punto

$$\begin{aligned} X_{G,i} &= x_i + \Delta x_i/2 \\ Y_{G,i} &= f(\xi_i)/2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \Delta M_{0X} &= \rho f(\xi_i)\Delta x_I \cdot \frac{f(\xi_i)}{2} \\ \Delta M_{0Y} &= \rho f(\xi_i)\Delta x_I \cdot (x_i + \Delta x_i/2) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} M_{0X} &= \frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)dx \\ M_{0Y} &= \rho\int_a^b xf(x)dx. \end{aligned}$$

Claramente la masa total del sistema es

$$m = \rho A(R)$$

Para el cálculo de las coordenadas del centro de gravedad (X_G, Y_G) usamos las reglas

$$\begin{aligned} M_{OX} &= Y_G \cdot m \\ M_{OY} &= X_G \cdot m \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$
\begin{aligned}
X_G &= \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx} \\
Y_G &= \frac{\displaystyle\int_a^b f^2(x)/2dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 11.1.
Determinar el centro de gravedad del área encerrada bajo la función $\operatorname{sen}(x)$ entre 0 y $\pi/2$.

Solución.

Podemos escribir que

(i) $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx = (\cos x)|_{\pi/2}^{0} = 1$

(ii) $M_{0X} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$

(iii) $M_{0Y} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x dx = x\cos x|_{\pi/2}^{0} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \operatorname{sen} x|_0^{\pi/2} = 1$

En consecuencia se tiene que

$$
\begin{aligned}
X_G &= \frac{M_{0Y}}{A} = 1 \\
Y_G &= \frac{M_{0X}}{A} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el centro de gravedad tiene coordenadas $C.G = (1, \pi/8)$.

Guía de Ejercicios

1. Gráficar el cardioide de ecuación $r = 1 + 2\operatorname{sen}\phi$.

2. **(a)** Calcule la longitud total de la curva $y = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}})$ entre $x = 1$ y $x = 4$.

(b) Determine el volumen de un cono de revolución de altura a cuya base es de radio b.

3. **(a)** Calcule la longitud de la curva $\rho = a(1 - \operatorname{sen}(\theta))$.

(b) Calcule el área de la región comprendida entre la curva dada en la parte anterior y $\rho = a$.

4. Calcular el largo de la curva $c(t) = \begin{cases} e^{-bt} & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{a(t-1)-b} & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$.

5. Dada la curva $(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{b})^{\frac{2}{3}} = 1$, calcular su longitud de arco en el primer cuadrante.

6. Determinar el centro de masa de la región encerrada entre las curvas $x^2 + y^2 = a^2$ y $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. Suponga densidad constante.

Guía de Problemas

P1. Sea $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2 + 2x - f(x)$.

(a) Determinar f.

(b) Calcular el área bajo la curva $y = f(x)$ y su longitud entre $x = 0$ y $x = 1$.

P2. Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t}\cos(t)$, $y(t) = e^{2t}\operatorname{sen}(t)$.

(a) Encuentre el largo L, de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hasta 2π.

(b) Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0 sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte anterior.

P3. Considere la curva C definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$. Demuestre que la longitud de arco de la curva C en el primer cuadrante esta dada por:

$$S = a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}.$$

P4. Probar que el largo de la elipse de ecuación $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$ es igual al largo de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, entre 0 y 2π.

Integrales Impropias

12.1 Introducción

En la definición de la integral de Riemann se impusieron dos condiciones fundamentales que son:

1. Se define en el intervalo cerrado y acotado $[a, b], a < b$
2. Se define para funciones acotadas en $[a, b]$

El propósito de esta sección, es extender la noción de integral al caso de intervalo no acotados, y al caso de funciones no acotadas sobre un intervalo acotado. Estas dos extensiones dan origen a las llamadas integrales impropias de primera y segunda especie respectivamente. Partamos por la definición del primer tipo de éstas:

Definición (Integral Impropia de Primera Especie (Intervalo no Acotado))
Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, +\infty)$ si se cumple que:

(i) $\forall x \in (a, +\infty)$, f es integrable en $[a, x]$ y además

(ii) Existe el límite definido por

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$$

Notación: Si una función es integrable en el intervalo:$[a, \infty)$ entonces al valor del límite se le llama integral impropia de primera especie de f y se le denota

$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \to \infty} \int_a^x f.$$

Observaciones

1. Si el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \int_a^x f$ existe, se dice que la integral impropia es convergente y si no existe se dice que la integral impropia es divergente.
2. De una manera análoga se definen las integrales de 1° especie siguiente

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f$ donde la constante $c \in \mathbb{R}$ puede ser cualquiera. En esta última definición es importante que las dos integrables de la derecha existan o que sean convergente. Si alguna de estas integrales no converge entonces la integral de la izquierda tampoco .

Ejemplo 12.1.
Dado $a > 0$, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Claramente $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable en $[a, b]$ para cualquier $b > a$. Veamos el límite

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x\to\infty}\int_{a}^{x} \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty}[\ln\,(\frac{x}{a})] = \nexists.$$

Por lo tanto se trata de una integral divergente.

Ejemplo 12.2.
Dado $a > 0$ y $\alpha \neq 1$, estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Nuevamente basta con estudiar el límite:

$$\begin{aligned}\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} &= \lim_{x\to\infty}\int_{a}^{x} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\bigg|_{a}^{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{-1}{a^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha > 1 \\ \nexists & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto esta integral impropia es convergente cuando $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha < 1$.

Juntando estos dos ejemplos podemos resumir diciendo que

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \text{Converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{Diverge} & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Definición (Integral Impropia de Segunda Especie (Funciones no Acotadas))
Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ ssi:

(i) $\forall x \in (a, b) f$ es integrable en $[a, x]$

(ii) El límite $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_{a}^{x} f$ existe.

Observaciones

1) Cuando el límite $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f$ existe, se dice que la integral impropia converge, y cuando no existe se dice que la integral impropia diverge.

2) Se anota

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f = \int_a^{-b} f.$$

3) La primera condición de integrabilidad de este tipo de funciones exige, entre otras cosas, que la función f debe ser acotada en todo intervalo (a, x), es decir, este tipo de funciones se caracterizan por tener una asíntota vertical en $x = b$.

4) En forma análoga se definen las integrales impropias siguiente:

(i) $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f$

(ii) $\displaystyle\int_{a^+}^{b^-} f = \int_{a^+}^{c} f + \int_c^{b^-} f, \quad c \in (a, b)$

En esta última definición la integral entre a^+ y b^- converge ssi las dos integrales de la derecha convergen por separado.

Ejemplo 12.3.
Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ para diversos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Caso $\alpha = 1$. En este caso se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_a^{b^-} \frac{dx}{b-x} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln\,(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\ln\,(b-a) - \ln\,\varepsilon\} = \nexists.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso la integral impropia es divergente.

Caso $\alpha \neq 1$. En este caso los cálculos son

$$\begin{aligned}
\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{(\alpha-1)} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha < 1 \\ \nexists & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Juntando estos dos ejemplos podemos resumir diciendo que

$$\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{Converge} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{Diverge} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Definición (Integrales Impropias de Tercera Especie o Mixtas) Son las que se obtienen combinando integrales impropias de 1° y 2° especie. Por ejemplo

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0^-} \frac{dx}{x^2} + \int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Este tipo de integral será convergente ssi cada una de sus componentes es una integral convergente.

12.2 Algunos criterios de convergencia para integrales impropias

Nos dedicaremos primeramente a establecer algunos criterios de convergencia para integrales impropias de funciones no negativas.

Observación:

1. Si F es una función creciente en $[a, +\infty)$, entonces, cuando $x \to +\infty, F(x) \to L \in \mathbb{R}$ o bien $F(x) \to +\infty$.
2. Si F es una función creciente en $[a, b)$, entonces cuando $x \to b^-; F(x) \to L \in \mathbb{R}$ o bien $F(x) \to +\infty$.

   Lo anterior surge del hecho de que F puede ser acotada, o no, en los intervalos considerados.

Teorema 12.1 (Criterio de Comparación). *Sean f y g funciones continuas en $[a, +\infty)$ tales que:*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b)\ 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces:

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge .

Recíprocamente si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge

Demostración. Como las funciones f y g son continuas, entonces son integrables en $[a, x]$ para todo $x > a$. Además $\displaystyle\int_a^x f = \int_a^b f + \int_b^x$, (lo mismo para g) por lo tanto es claro que

$$\int_a^{\infty} f \text{ converge ssi } \int_b^{\infty} f \text{ converge y } \int_a^{\infty} g \text{ converge ssi } \int_b^{\infty} g \text{ converge.}$$

Luego, para demostrar el teorema basta con estudiar las integrales impropias en $[b, +\infty)$.

Sean:$F(x) = \displaystyle\int_b^x f$ y $G(x) = \displaystyle\int_b^x g$. Entonces, como se sabe que $(\forall t \in [b, x])$ se tiene $0 \leq f(t) \leq g(t)$ entonces integrando de b a x se obtiene que

$$F(x) \leq G(x), \quad \forall x \in [b, +\infty).$$

Como además las funciones F y G son crecientes, el resultado del teorema se obtiene directamente de la observación 12.2. En efecto, si $\int_b^{+\infty} g$ converge entonces $G(x)$ es acotada, y entonces también $F(x)$ lo es con lo cual existe $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ o sea, la integral impropia $\int_b^{+\infty} f$ es convergente. $\square$

Observación: Para integrales impropias del tipo $\displaystyle\int_a^{b^-}$ el enunciado del teorema es análogo y tiene la misma demostración. Se propone como ejercicio, enunciar dicho teorema y demostrarlo.

Ejemplo 12.4.
Estudiar la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\text{sen } x|}{x^2} dx$.

Claramente se tiene que

$$0 \le \frac{|\text{sen } x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \ge 1.$$

Luego como la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ es conocidamente convergente, se concluye directamente que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\text{sen} x|}{x^2} dx$ es también convergente.

Teorema 12.2 (Criterio del cuociente de funciones). *Sean f y g funciones continuas en $[a,+\infty)$ y no negativas en $[b,+\infty)$, donde $b \ge a$ y tales que:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces las integrales impropias $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ y $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Observación: el mismo criterio se ocupa para las integrales de segunda especie.

Muchas veces se usa el teorema anterior para estudiar la convergencia de una integral impropia, comparándola con las integrales de la forma

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

o bien

$$\int_a^{b^-} \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$$

cuyos comportamientos son ya bien conocidos en función de α. Cuando esta comparación es posible, el comportamiento de la integral impropia en estudio se puede resumir en las siguientes reglas:

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = L > 0$, con $\alpha > 1$.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(-x) = L > 0$ con $\alpha > 1$.

3. $\displaystyle\int_{a}^{b^-} f(x)dx$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (b-x)^{\alpha} f(x) = L > 0$ con $\alpha < 1$.

4. $\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} (x-a)^{\alpha} f(x) = L > 0$ con $\alpha < 1$.

12.3 Convergencia absoluta

Revisaremos ahora la noción de convergencia absoluta de integrales impropias. Trataremos sólo el caso de integrales de primera especie, sin embargo puede extenderse a los demás tipos de integrales impropias. Es un buen ejercicio para el lector llevar a cabo con detalle esta extensión.

Definición (Convergencia absoluta) Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, diremos que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ es **absolutamente convergente** si $\displaystyle\int_a^{\infty} |f|$ converge.

Notar que en un principio la definición no dice nada acerca de la convergencia de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$. Sin embargo el siguiente teorema muestra la relación entre la convergencia absoluta y la convergencia.

Teorema 12.3. *Sea $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, se tiene que*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge.}$$

Demostración. Es claro que

$$\begin{aligned} -|f| \leq f \leq |f| \qquad & / + |f| \\ \iff 0 \leq f + |f| \leq 2|f|. & \end{aligned}$$

Luego, por el Criterio de Comparación, como por hipótesis $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge entonces

$$\int_a^{+\infty} f + |f| \text{ converge.}$$

Además, para $x \in [a,+\infty)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(x) + |f|(x)) - |f|(x) \\ \Rightarrow \int_a^x f &= \int_a^x (f + |f|) - \int_a^x |f|. \end{aligned}$$

Haciendo $x \to +\infty$ y gracias a que ambos límites a la derecha existen, se concluye el resultado. $\square$

Observación: La recíproca del Teorema anterior **no** es necesariamente cierto.

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge } \not\Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente.}$$

Ejemplo 12.5.
Consideremos $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, entonces $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ converge, pero no así $\int\limits_1^{\infty} |f(x)|dx$.

Guía de Ejercicios

1. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2+x^4}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}$.

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\ln(1+e^x)$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}$.

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}$.

(g) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{x}\csc(x)$.

(h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x)}{x^{\frac{3}{2}}}$.

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$.

(j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$.

(k) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^x$.

(l) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x\ln^p(x)}$.

2. Calcular, si existe, el área comprendida entre la curva $y=\frac{1}{a^2+x^2}$ y el eje OX.

3. Determinar para cuales valores de $n\in\mathbb{N}$ la integral $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^3(1-x)}}$ es convergente y establezca una forma recursiva para la sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Mostrar que la integral $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\operatorname{sen}(x))$ verifica la relación: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(x))=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x))$. Deducir el valor de I.

Guía de Problemas

P1. **(a)** Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen.

(b) Pruebe que $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$ converge y encuentre su valor.

(c) Encuentre los valores de $\alpha>0$ para lo cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\,dx$ converge.

Indicación: El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ se considera conocido.

P2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\right)$para $x\neq 0$ y $f(0)=k$.

(a) Encuentre el valor de k de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

(b) Estudie la convergencia de las integrales $\int\limits_0^1 f$,$\int\limits_1^{\infty} f$, $\int\limits_0^{\infty} f$ y $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$.

P3. Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$. Se pide :

(a) Estudiarla completamente indicando dominio,ceros, límites importantes, asíntotas, continuidad, crecimiento, concavidades, gráfico y recorrido.

(b) Determinar si el área de las siguientes regiones es o no finita. En caso afirmativo dar su valor.

$$R_1 = \{(x, y)/x < 0 \quad f(x) \leq y \leq 1\}$$
$$R_2 = \{(x, y)/0 < x \leq 1 \quad f(x) \leq y \leq 1\}$$
$$R_3 = \{(x, y)/x \geq 1 \quad f(x) \leq y \leq 1\}$$

Indicación: Ni $e^{\frac{1}{x}}$ ni $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ tienen primitivas explícitamente calculables, sin embargo, f sí la tiene.

P4. **(a)** Aplicando la definición de integral impropia calcule:

$$\int_{-\infty}^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}$$

(b) Analice la convergencia de la integral:

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$$

(c) Analice la convergencia de las áreas de las superficies engendradas al rotar la función $|\ln(x)|\colon \,]0, 1] \to \mathbb{R}$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.

Series numéricas

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

13.1 Definición y ejemplos básicos

En esta parte estudiaremos la noción intuitiva de *sumas infinitas* que llamaremos *series.* A modo que ejemplo supongamos que queremos saber cuanto vale la suma o serie S de todos los números en el conjunto $A = \left\{\frac{1}{2^k} : k \in \mathbb{N}\right\}$, es decir deseamos darle sentido a la expresión

$$S = \sum_{x \in A} x$$

Abordamos el problema numerando los elementos de A mediante la sucesión $a_k = \frac{1}{2^k}$ y calculando la suma parcial de los primeros términos en éste orden. Esta suma parcial será una aproximación de S que esperaríamos converja a éste cuando hacemos que el número de términos tienda a infinito.

En este caso la suma parcial queda dada por

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Esta es una suma geométrica de razón $\frac{1}{2}$ que se calcula por $s_n = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$ de modo que la sucesión (s_n) de las sumas parciales posee límite que vale 2.

Es lícito preguntarse si este valor no dependerá de la manera como se ordenaron los elementos de A. Veremos más adelante que el orden de los términos es relevante, pues el valor asociado a un cierto orden podría ser diferente a aquel correspondiente a otro, inclusive podría no existir. Además, este proceso sólo tiene sentido si A es numerable o finito.

Definición (Serie) Una serie es un par ordenado $(A, (a_n))$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ numerable y $(a_n)_{n\geq 0}$ es una numeración (ordenamiento) del conjunto A.

La sucesión (a_n) se llama el término general de la serie. A partir de (a_n) definimos la sucesión (s_n) de las sumas parciales por $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. El valor de la serie existe cuando la sucesión (s_n) posee límite. En tal caso decimos que la serie es **convergente** y su valor es el límite de (s_n).

Por razones de comodidad permitiremos que (a_n) no está definido para algunos n's. Si k_0 es el menor entero a partir del cual a_n esta definida, el valor de la serie se denotará por

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k \geq k_0} a_k \text{ o simplemente } \sum a_k$$

Ejemplo 13.1.

1. Consideremos la serie de término general $a_n = q^n$. Se tiene que

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cuando $0 \leq |q| < 1$ la sucesión (s_n) converge a $\frac{1}{1-q}$. En este caso

$$\sum_{k \geq 0} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

Además, para $q \geq 1$ la sucesión $(s_n) \geq n$ razón por la cual diverge a infinito. En esta situación diremos que la serie *diverge* y lo denotaremos por $\sum_{k \geq 0} a_k = +\infty$.

2. Consideremos la serie $\sum \frac{1}{k(k+1)}$. La n-ésima suma parcial es

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Entonces la serie converge y su valor es 1.

13.2 Condiciones para la convergencia

Veamos primero la siguiente definición para sucesiones.

Definición (Sucesión de Cauchy) Una sucesión (x_n) de números reales se dice de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Se tiene que esta es de hecho una caracterización de la convergencia de sucesiones.

Teorema 13.1. *Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Demostración. La demostración de este Teorema se entrega por completitud en el apéndice de la semana. □

Cuando aplicamos este teorema a las sumas parciales (s_n) de una serie se obtiene el siguiente criterio.

Teorema 13.1 (Criterio de Cauchy). *Sea* (a_n) *una sucesión y* (s_n) *la sucesión de sus sumas parciales. La serie* $\sum a_k$ *converge si y sólo si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, m > n \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon \tag{13.1}$$

Demostración. Por definición la serie converge si la sucesión de sus sumas parciales (s_n) lo hace. Éstas últimas convergen si y sólo si satisfacen el criterio de Cauchy. Como $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |s_m - s_n|$, la condición 13.1 es exactamente la condición de Cauchy para la sucesión (s_n). □

El criterio de Cauchy es la única caracterización conocida de convergencia que es válida para todas las series, de modo que su aplicación será forzosa cuando fallen los métodos que desarrollaremos más adelante para casos específicos.

Ejemplo 13.2.
Vamos a utilizar el criterio anterior para demostrar que la serie $\sum \frac{1}{k}$, conocida como *serie armónica* no converge. Veamos que la diferencia de las sumas parciales s_{2N} y s_N es siempre mayor que $\frac{1}{2}$. En efecto,

$$s_{2N} - s_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \frac{(2N - (N+1) + 1)}{2N} = \frac{1}{2}$$

Entonces, la serie no satisface el Criterio de Cauchy pues existe $\epsilon = \frac{1}{2}$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existen $n = N$ y $m = 2N$ tales que $\left|\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}\right| \geq \frac{1}{2}$. □

El siguiente teorema nos da una manera de descubrir algunas series divergentes conociendo el comportamiento asintótico de (a_n). La demostración de éste se obtiene directamente del criterio de Cauchy al escoger $n_0 = N$, $n \geq N$ y $m = n + 1$.

Teorema 13.2. *Si la serie* $\sum a_k$ *converge entonces la sucesión* $(a_n) \to 0$.

□

Otra forma de probar este hecho es que, si la serie converge entonces las sucesiones (s_{n+1}) y (s_n) convergen y lo hacen al mismo límite. Como $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ se concluye que $(a_n) \to 0$.

Ejemplo 13.3.

1. La serie $\sum \frac{k}{k+1}$ diverge pues la sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ no converge a cero.

2. La serie $\sum (-1)^k$ diverge pues la sucesión $((-1))^n$ diverge.

3. Para $q \leq -1$ la serie $\sum q^k$ diverge debido a que la sucesión (q^n) diverge.

Cuidado: No es cierto que si $(a_k) \to 0$ entonces la serie $\sum a_k$ converja.

Ejemplo 13.4.
Consideremos la sucesión $\left(a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Claramente la sucesión $\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \to 0$ sin embargo la sucesión de las sumas parciales diverge a más infinito. En efecto, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$ que sabemos diverge a más infinito. Observe que el ejemplo es válido para logaritmos en cualquier base $a > 1$.

13.3 Álgebra de series

Dado que el valor de las series se ha definido como un límite de sucesiones, es claro que el álgebra de límites tiene su contrapartida en un álgebra de series.

Teorema 13.3. *Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes. Entonces*

1. *$\sum (a_k + b_k)$ es convergente y su valor es $(\sum a_k) + (\sum b_k)$.*
2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum (\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\lambda (\sum a_k)$.*

Demostración. Como $\sum_{k \geq k_0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=k_0}^{n} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} b_k$ y $\sum_{k=k_0}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=k_0}^{n} a_k$ es posible aplicar álgebra de sucesiones y concluir las propiedades. $\square$

Ejemplo 13.5.
La serie $\sum \frac{2^k - 3^k}{6^k}$ tiene un término general que se descompone en

$$\frac{2^k - 3^k}{6^k} = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{2^k}$$

Las series $\sum \frac{1}{3^k}$, $\sum \frac{1}{2^k}$ convergen y sus valores son $\frac{3}{2}$ y 2, respectivamente. Luego, la serie original converge y su valor es $\frac{1}{2}$.

13.4 Criterios para analizar convergencia de series de términos no negativos

Las series de términos no negativos son más manejables que las series en general pues sus sumas parciales son no decrecientes: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, de modo que convergen si y sólo si las sumas parciales están acotadas superiormente.

Teorema 13.4. *Una serie de términos no negativos converge si y sólo si las sumas parciales son acotadas superiormente.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema de las sucesiones monótonas aplicado a las sucesiones de las sumas parciales las cuales son no decreciente. $\square$

Otra propiedad interesante de las series de términos no-negativos convergentes es que independientemente de la numeración elegida, el valor de la serie es el mismo.

Teorema 13.5. *Sea $\sum a_k$ una serie de términos no-negativos y convergente. Sea (b_k) una numeración del conjunto $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\sum b_k$ es convergente y $\sum b_k = \sum a_k$.*

La demostración es un tanto técnica y se relega al apéndice.

En lo que sigue presentamos algunos criterios para determinar cuando una serie de términos no negativos es convergente.

Mayoración de series

Teorema 13.6. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de modo que existen n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < +\infty$ entonces $\sum a_k < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. La suma parcial (s_n) de $\sum a_k$ se escribe para $n \geq n_0$ como

$$\sum_{k \geq k_0}^{n} a_k = \sum_{k \geq k_0}^{n_0 - 1} a_k + \sum_{k = n_0}^{n} a_k$$

Por la hipótesis se tiene que

$$s_n \leq \sum_{k \geq k_0}^{n_0 - 1} a_k + \sum_{k = n_0}^{n} \alpha b_k = \sum_{k \geq k_0}^{n_0 - 1} (a_k - \alpha b_k) + \alpha \sum_{k \geq k_0}^{n} b_k$$

El segundo término del lado derecho es acotado superiormente pues la serie $\sum b_k$ converge. Entonces, la suma parcial (s_n) es acotada superiormente lo que equivale a decir que la serie $\sum a_k$ converge. $\square$

Observación: La contrarrecíproca de este criterio nos dice que si $\sum a_k$ diverge lo mismo le ocurre a $\sum b_k$.

Ejemplo 13.6.
Usaremos la observación anterior para demostrar que la serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha \leq 1$ diverge. Tenemos que para todo $n \geq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Como $\sum \frac{1}{k}$ diverge concluimos que $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge para $\alpha \leq 1$.

Comparación por cuociente

Teorema 13.7. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que, para todo $n \geq 0$, $0 < a_n, b_n$ y supongamos que $c := \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe. Se tienen las siguientes afirmaciones dependiendo del valor de c.*

1. *Caso $c = 0$. Si $\sum b_k < +\infty$ entonces $\sum a_k < +\infty$.*
2. *Caso $c > 0$. Se tiene que $\sum b_k < +\infty$ si y sólo si $\sum a_k < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Al ser $c = 0$ y, a_n y b_n positivos, se tiene que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq b_n$. Aplicando el criterio de mayoración obtenemos la conclusión.
2. Al igual que el caso anterior, si $c > 0$ y, a_n y b_n son positivos, se tiene que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{1}{2} c b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} c b_n$. Entonces es posible aplicar dos veces el criterio de mayoración usando las desigualdades $b_n \leq \frac{2}{c} a_n$ y $a_n \leq \frac{3}{2} c b_n$ y obtener la equivalencia $\square$

Ejemplo 13.7.

1. Queremos probar que la serie $\sum \frac{1}{k^2}$ es convergente. Vamos a comparar el término $\frac{1}{k^2}$ con $\frac{1}{k(k+1)}$. Tenemos que $\lim \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k(k+1)}} = \lim \frac{k(k+1)}{k^2} = 1$. Entonces el criterio nos dice que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge pues ya sabemos que $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge.

2. Deseamos ver que la serie $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$ diverge. Sabemos que $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$ y que la serie $\sum \frac{1}{k}$ diverge. Luego $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$ diverge.

Criterio del cuociente

Teorema 13.8. *Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y supongamos que $r := \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe. Dependiendo del valor de r se tienen las siguientes conclusiones.*

1. *Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.*

2. *Si $r > 1$ o $r = +\infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.*

3. *Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, es decir, en este caso el criterio no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie.*

Demostración.

1. Si $r < 1$ tenemos que existen n_0 y $\beta = \frac{1+r}{2}$ con $1 > \beta > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \beta$. Entonces, $a_n \leq \beta a_{n-1} \leq \beta^{n-n_0} a_{n_0} = \beta^n \frac{a_{n_0}}{\beta^{n_0}}$. Tomando $\alpha = \frac{a_{n_0}}{\beta^{n_0}} > 0$ y $b_n = \beta^n$ podemos aplicar el criterio de mayoración pues la serie $\sum \beta^n$ es convergente.

2. Si $r > 1$ podemos proceder de modo análogo y concluir que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $a_n \geq \gamma^n \delta$ con $\delta = \frac{a_{n_0}}{\gamma^{n_0}}$ y γ tal que $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \gamma > 1$. Como la serie $\sum \gamma^n$ es divergente el contrarrecíproco del criterio de mayoración nos dice que lo mismo ocurre con la serie $\sum a_k$. El caso $r = +\infty$ se propone como ejercicio.

3. Para ver que este criterio no aporta información cuando $r = 1$ mostremos dos ejemplos de series donde $r = 1$ y una de ellas converge mientras que la otra no lo hace. Sea $\sum \frac{1}{k}$ entonces $\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \to 1$ y ya sabemos que la serie diverge. Por otra parte, la serie $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ satisface $\frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\frac{1}{k(k+1)}} = \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} \to 1$ y ya vimos que era convergente. □

Ejemplo 13.8.

Veamos que la serie $\sum \frac{1}{k!}$converge. Para ello veamos que $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es menor que uno.

$r = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$

Observación: El límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ podría no existir y la serie $\sum a_k$ ser convergente. Por ejemplo, si

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ par} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & n \text{ impar} \end{cases}$$

el límite $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ no existe sin embargo $a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ por lo cual $\sum a_k$ es convergente.

Criterio de la Raíz n-ésima

Teorema 13.9. *Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos y supongamos que $r := \lim (a_n)^{\frac{1}{n}}$ existe. Se tienen las siguientes conclusiones.*

1. *Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.*
2. *Si $r > 1$ o $r = +\infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.*
3. *Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir, es decir, en este caso el criterio no nos ayuda a determinar la convergencia de la serie.*

Demostración.

1. Si $r < 1$ entonces existe n_0 y un real $\beta = \frac{1+r}{2}$, $1 > \beta > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$, $(a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \beta$. Entonces, $a_n \leq \beta^n$. Tomando $\alpha = 1$ y $b_n = \beta^n$ podemos aplicar el criterio de mayoración pues la serie $\sum \beta^n$ es convergente.
2. La segunda alternativa se propone como ejercicio.
3. Sabemos que $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ y que $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ sin embargo la serie $\sum \frac{1}{k}$ no converge y la serie $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ converge. $\square$

Ejemplo 13.9.
Consideremos la serie $\sum \frac{2^k}{k^k}$. El criterio pide calcular $\lim \frac{2}{k} = 0$. La conclusión es que la serie converge.

Observación: Es posible probar como un ejercicio de sucesiones que si $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe entonces $\lim (a_n)^{\frac{1}{n}}$ también existe y ambos tienen el mismo valor. En otras palabras, el criterio de la raíz es más poderoso que el criterio del cuociente ya que hay casos en los cuales el último de ellos existe sin que el primero exista. Por ejemplo,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ par} \\ \frac{1}{2^{n-1}} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Por otra parte, la serie $\sum a_k$ podría converger y el límite $\lim (a_n)^{\frac{1}{n}}$ no existir. Como ejemplo considerar

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ par} \\ \frac{1}{3^n} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Se tiene que

$$(b_n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ par} \\ \frac{1}{3} & n \text{ impar} \end{cases}$$

que no converge, sin embargo $b_n \leq \frac{1}{2^n}$ y por lo tanto la serie $\sum b_k$ converge.

Criterio de la integral impropia

Teorema 13.10. *Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n\geq 1} f(n) < +\infty$ equivale a $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. La integral impropia es el límite de la sucesión $s_n = \int_1^n f(x)\,dx$ que a su vez es la suma parcial de la serie de término general $a_n = \int_{n-1}^n f(x)\,dx$. Como la función es no negativa y decreciente se tiene que $f(n) \leq a_n \leq f(n-1)$, lo que muestra la equivalencia. $\square$

Ejemplo 13.10.
Probemos que la serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$ converge. La función $\frac{1}{x^\alpha}$, para $\alpha > 1$ está definida en $[1, +\infty)$ y es estrictamente decreciente. La integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)\,x^{\alpha-1}}\Bigg]_1^\infty = \frac{1}{\alpha - 1}$$

El criterio nos dice que la serie $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

13.5 Criterios Generales

Presentamos ahora un criterio que mejora el criterio de la raíz, en el sentido que permitirá analizar una mayor cantidad de series.

Para una sucesión (u_n) acotada y no negativa, definamos la sucesión (v_n) por $v_n = \sup\{u_k : k \geq n\}$, entonces (v_n) es una sucesión decreciente, pues cuando n crece, el supremo es calculado sobre un conjunto de índices menor (en el sentido de la inclusión), y es acotada inferiormente. En consecuencia, $\lim v_n$ siempre existe. A este límite se le llama el *límite superior de* (u_n) *y se denota* $\limsup u_n$. Como ejercicio demuestre que si la sucesión converge entonces $\limsup u_n = \lim u_n$.

Utilizando esta noción tenemos el siguiente criterio.

Teorema 13.11. *Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos y $u_n = (a_n)^{\frac{1}{n}}$. Sea $r := \limsup u_n$.*

1. Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
2. Si $r > 1$ o $+\infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.

3. Si $r = 1$ entonces $\sum a_k$ puede converger o divergir.

Demostración. Sólo demostraremos 1), quedando como ejercicio la demostración de las propiedades restantes.

Si $r < 1$ entonces sólo un número finito de términos de u_n son mayores que $\frac{1+r}{2}$. Luego existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $u_n \leq \frac{1+r}{2}$. Por lo tanto, $a_n \leq \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$con lo que $\sum a_k$ converge. $\square$

Ejemplo 13.11.
Sea (b_n) definido antes por

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ par} \\ \frac{1}{3^n} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces, los criterios anteriores fallan por que no existe ni $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n}$, ni $\lim (b_n)^{\frac{1}{n}}$. Sin embargo $\sup\left\{(b_k)^{\frac{1}{k}} : k \geq n\right\} = \frac{1}{2}$. Entonces, $\limsup (b_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ y el criterio asegura que la serie $\sum b_k$ converge.

13.6 Series de signo arbitrario

Definición (Convergencia absoluta) Sea $\sum a_k$ una serie con (a_k) una sucesión cualquiera. Decimos que la serie es *absolutamente convergente* si $\sum |a_k| < +\infty$.

Las series de términos positivos y convergentes son obviamente absolutamente convergentes, pero no todas las series convergentes son absolutamente convergentes. La siguiente es una caracterización de las series absolutamente convergentes

Teorema 13.12. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si las series de sus términos negativos y la de sus términos positivos son convergentes.*

Demostración. La serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente cuando $\sum |a_k|$ es convergente de modo que debe satisfacer el criterio de Cauchy, es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N,\, m > n \Rightarrow \left|\sum_{n+1}^{m} |a_k|\right| = \sum_{n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$$

Siempre se tiene que $\left|\sum_{n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{n+1}^{m} |a_k|$. Entonces, $\sum a_k$ satisface el criterio de Cauchy y por ende es convergente.

Para probar la segunda parte definamos $d_k = \max\{a_k, 0\}$ y $c_k = -\min\{a_k, 0\}$, es decir, d_k vale a_k para $a_k > 0$ y cero en otro caso, y c_k vale -a_k para $a_k < 0$ y cero en otro caso. Además, se tiene que $|a_k| = d_k + c_k$ y que $a_k = d_k - c_k$ lo que implica que

$$d_k = \frac{1}{2}\left(|a_k| + a_k\right) \text{ y } c_k = \frac{1}{2}\left(|a_k| - a_k\right)$$

Cuando la serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente sabemos que las series $\sum |a_k|$ y $\sum a_k$ son convergentes entonces por álgebra de series concluimos que las series $\sum d_k$ y $\sum c_k$ son convergentes (absolutamente). Recíprocamente, si las series $\sum d_k$ y $\sum c_k$ son convergentes entonces otra vez el álgebra de series garantiza que la serie $\sum |a_k| = \sum d_k + \sum c_k$ es convergente. □

Observación: Sea $\sum a_k$ una serie con (a_n) una sucesión cualquiera y supongamos que aplicamos el criterio del cuociente a $(|a_n|)$. Si $r = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ es menor que 1 ¿podemos decir algo acerca de la convergencia de la serie $\sum a_k$?. Por supuesto, pues estaríamos en presencia de una serie absolutamente convergente, en particular la serie $\sum a_k$ sería convergente. ¿y sí $r > 1$, podemos afirmar algo de $\sum a_k$?. La respuesta es sí, en este caso la serie diverge. Para ver esto hay que recordar que cuando $r > 1$ se tenía que $|a_n| \geq \gamma^n \delta$, con $\gamma > 1$ y $\delta > 0$. Entonces la sucesión (a_n) no converge a cero de modo que la serie $\sum a_k$ diverge. Como ejercicio verifique que si $r = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ es mayor que 1 la serie $\sum a_k$ diverge.

13.7 Criterio de Leibnitz

Para mostrar ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes (se les llama **condicionalmente convergentes**) vamos a probar el siguiente teorema.

Teorema 13.13. *Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a cero (luego (a_n) es no negativa). Entonces la serie $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.*

Demostración. Vamos a probar que la suma parcial (s_n) satisface, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n} \tag{13.2}$$

En efecto, dado que

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}$$

con $a_{2n} \geq a_{2n+1}$, se obtiene que $s_{2n+1} \geq s_{2n-1}$. Asimismo,

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

con $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$ luego $s_{2n+2} \leq s_{2n}$. Por otra parte, $s_{2n+2} = s_{2n+1} + a_{2n+2} \geq s_{2n+1}$. De 13.2 se concluye que (s_{2n}) es no-creciente y acotada inferiormente mientras que (s_{2n+1}) es no-decreciente y acotada superiormente. En consecuencia ambas sucesiones convergen. Para demostrar que (s_n) converge basta verificar que (s_{2n+1}) y (s_{2n}) convergen al mismo límite, lo cual resulta del hecho que $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$.

Observar que el valor de la serie s debe estar comprendido entre s_{2n+1} y s_{2n+2} que están a distancia a_{2n+2} y entre s_{2n+3} y s_{2n+2} que están a distancia a_{2n+3}. Entonces para todo n se tiene que $|s_n - s| \leq a_n$ □

Ejemplo 13.12.
La serie $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ converge pues $\frac{1}{k}$es positiva y decrece a cero.

13.8 Estabilidad de las series bajo reordenamiento

Como se dijo al comienzo del capítulo, el orden en el que se suman los elementos de las series es importante. También hemos visto que las series de términos no negativos convergentes son estables bajo reordenamiento. En el próximo resultado veremos que esto también es cierto para las series absolutamente convergentes.

Teorema 13.14. *Si la serie $\sum a_k$ es absolutamente convergente entonces toda serie $\sum b_k$ donde (b_k) es un reordenamiento de (a_k) es absolutamente convergente y su valor es igual a $\sum a_k$.*

Demostración. Siendo $\sum a_k$ absolutamente convergente sabemos que las series $\sum d_k$ y $\sum c_k$ definidas anteriormente, son convergentes. Como las series $\sum d_k$ y $\sum c_k$ tienen términos no negativos sabemos que bajo cualquier reordenamiento suman el mismo valor.

Por otra parte la serie $\sum e_k$ de los términos positivos de b_k es un reordenamiento de la serie $\sum d_k$ y la serie $\sum h_k$ de los términos negativos de $\sum b_k$ es un reordenamiento de la serie $-\sum c_k$, con lo cual se tiene que $\sum d_k = \sum e_k$ y $\sum c_k = -\sum h_k$. Concluimos que $\sum b_k$ es convergente y que $\sum b_k = \sum e_k + \sum h_k$. El lado derecho es igual a $\sum d_k - \sum c_k = \sum a_k$. □

Ejemplo 13.13.
Sea $A = \left\{(-1)^k \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ y $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$. Consideremos un ordenamiento de la serie usando la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{2n+1}{3} & n = 3m+1 \\ \frac{4n-2}{3} & n = 3m+2 \\ \frac{4n}{3} & n = 3m \end{cases}$$

Entonces $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$, $f(5) = 6$, $f(6) = 8$, $f(7) = 5$, $f(8) = 10$, $f(9) = 12$, etc. Notemos que f es biyectiva con inversa

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} 3m & n = 4m \\ 3m+2 & n = 4m+2 \\ 3m+1 & n = 2m+1 \end{cases}$$

En consecuencia, las series $\sum (-1)^{f(k)} \frac{1}{f(k)}$ y $\sum (-1)^k \frac{1}{k}$ suman los elementos de A, pero lo hacen en un orden distinto. Calculemos la suma parcial (s_{3m}) de la serie $\sum(-1)^{f(k)}\frac{1}{f(k)}$.

$$\begin{aligned}
s_{3m} &= -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\cdots-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m}\\
&= \left(-1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{12}-\cdots\\
&\quad+\left(-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{4m-2}\right)+\frac{1}{4m}\\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{12}-\cdots+\left(-\frac{1}{4m-2}\right)+\frac{1}{4m}\\
&= \frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}+-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots+-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Por el criterio de Leibnitz sabemos que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k}$ converge entonces (s_{3m}) también converge y su límite debe ser igual a la mitad del valor de la serie $\sum(-1)^k\frac{1}{k}$. Además, $s_{3m+1}=s_{3m}-\frac{1}{2m+1}$ y $s_{3m+2}=s_{3m+1}+\frac{1}{4m+2}$ lo que implica que (s_{3m+1}) y (s_{3m+2}) convergen y lo hacen al mismo límite. Por lo tanto la serie $\sum(-1)^{f(k)}\frac{1}{f(k)}$ converge a la mitad del valor de la serie $\sum(-1)^k\frac{1}{k}$ y ¡suma exactamente los mismos términos!. Esta curiosidad es bastante más profunda de lo que uno se imagina. Esto se ve en el resultado del siguiente teorema cuya demostración se omite.

Teorema 13.15. *Si $\sum a_k$ es <u>condicionalmente convergente</u> entonces para cualquier número $\alpha\in\mathbb{R}$ existe $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ biyectiva tal que $\sum a_{f(k)}=\alpha$.*

13.9 Multiplicación de series

La última propiedad acerca de las series condicionalmente convergentes es hermosa pero muy molesta al momento de multiplicar series pues el producto de dos series $\sum a_k$ y $\sum b_k$, que uno quisiera que fuese $\sum\sum a_ib_j$, puede depender del orden en el cual se sumen los productos a_ib_j. Sin embargo, el próximo teorema asegura que las series absolutamente convergentes pueden multiplicarse y su resultado es la serie de los términos a_ib_j sumados en cualquier orden.

Teorema 13.16. *Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes entonces $\left(\sum a_k\right)\left(\sum b_k\right)$ es igual a $\sum c_k$ donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada uno de los productos a_ib_j, por ejemplo $c_k=\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}$.*

Demostración. Como

$$\left(\sum_{i\le n}|a_i|\right)\left(\sum_{j\le n}|b_j|\right)\to\left(\sum_{i\ge 1}|a_i|\right)\left(\sum_{j\ge 1}|b_j|\right)$$

dado $\epsilon > 0$ existe n'_0 tal que para todo $n' \geq n'_0$,

$$B_{n'} = \left| \left(\sum_{i \leq n'} |a_i| \right) \left(\sum_{j \leq n'} |b_j| \right) - \left(\sum_{i \geq 1} |a_i| \right) \left(\sum_{j \geq 1} |b_j| \right) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

En esta diferencia están todos los términos $a_i b_j$ con $i > n'$ o $j > n'$. Por otra parte, como

$$\left(\sum_{i \leq n} a_i \right) \left(\sum_{j \leq n} b_j \right) \to \left(\sum_{i \geq 1} a_i \right) \left(\sum_{j \geq 1} b_j \right)$$

dado $\epsilon > 0$ existe n''_0 tal que para todo $n'' \geq n''_0$,

$$A_{n''} = \left| \left(\sum_{i \leq n''} a_i \right) \left(\sum_{j \leq n''} b_j \right) - \left(\sum_{i \geq 1} a_i \right) \left(\sum_{j \geq 1} b_j \right) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $N = \text{máx}\{n'_0, n''_0\}$ entonces se tiene que $A_N + B_N < \epsilon$. Además, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$, la suma $\sum_{k=1}^{n} c_k$ contiene todos los productos $a_i b_j$ para $i, j \in \{1, ..., N\}$. Sea $C_N = \left(\sum_{i \leq N} a_i \right) \left(\sum_{j \leq N} b_j \right)$. Claramente, la diferencia entre $\sum_{k=1}^{n} c_k$ y C_N sólo contiene productos $a_i b_j$ con $i > N$ o $j > N$ de donde se deduce que $|\sum_{k=1}^{n} c_k - C_N| \leq B_N < \frac{\epsilon}{2}$.

Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} c_k - \left(\sum_{i \geq 1} a_i \right) \left(\sum_{j \geq 1} b_j \right) \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{n} c_k - C_N \right| + \left| C_N - \left(\sum_{i \geq 1} a_i \right) \left(\sum_{j \geq 1} b_j \right) \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

□

Guía de Ejercicios

1. Calcule el valor de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{4}{(4k-3)(4k+1)}$.

(b) $\sum \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

(c) $\sum \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}}$.

2. Demostrar que las siguientes series divergen.

(a) $\sum k^2$.

(b) $\sum k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(c) $\sum k\text{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

(d) Para $a \in \mathbb{R}$, $\sum \left(1+\frac{a}{k}\right)^k$.

3. Aplicar el álgebra de series para estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \left(\frac{5}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)$.

(b) $\sum \left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

4. Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{2^k+\cos\left(4^k\right)}{3^k}$.

(b) $\sum \frac{1}{e^k+\tan\left(\frac{1}{k}\right)}$.

(c) $\sum \frac{k+1}{k^2+1}$.

(d) $\sum \frac{k+\ln(k)}{k^3}$.

5. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y tales que $\sum a_k$ converge. Demostrar que la serie $\sum a_k^2$ converge.

6. Estudiar la convergencia de las series

(a) $\sum \text{sen}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

(b) $\sum \ln\left(\frac{k^2+1}{k^2}\right)$.

(c) $\sum \frac{1}{\sqrt{k}\left(1+\sqrt{k}\right)}$.

(d) $\sum \text{tg}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

(e) $\sum \frac{1}{k(k)^{\frac{1}{k}}}$.

(f) $\sum \left(\sqrt{k^2+k}-k\right)$.

7. Sea $\sum a_k$ una serie convergente con $a_k \geq 0$ y $a_k \neq 1$. Demostrar que las series $\sum \frac{a_k}{1+a_k}$ y $\sum \frac{a_k}{1-a_k}$son convergentes.

8. Estudiar la convergencia de las series

(a) $\sum \frac{1}{e^{\sqrt{k^2+k}}}$.

(b) $\sum q^k k^\alpha$ para $\alpha > 0$ y $q \in (0,1)$.

(c) $\sum \frac{a^k}{k^k}$.

9. Probar que las siguientes series son absolutamente convergentes.

(a) $\sum \frac{\cos\left(k^k\right)}{k^2}$. **(b)** $\sum (-1)^k \frac{1}{k^\alpha}$ con $\alpha > 1$. **(c)** $\sum (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$.

10. Determinar para que valores de a la serie $\sum a^k k^a$es absolutamente convergente. las series $\sum \frac{a_k}{1+a_k^2}$ y $\sum \frac{\sqrt{|a_k|}}{k}$ son absolutamente convergentes

11. Estudiar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

(b) $\sum (-1)^k \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Guía de Problemas

P1. **(a)** Analice la convergencia de la siguiente serie; en caso de ser convergente, calcule su valor $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
Indicación: Utilice la identidad $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

(b) Use el Criterio de la Integral para analizar la convergencia de la integral $\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}$.

(c) Analice la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$.

P2. **(a)** **(a1)** Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge .

(a2) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

(b) Considere la función

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x \geq 0.$$

(b1) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de término $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

(b2) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\, f(x)$ y utilice este resultado para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definida en **(b2)** no converge absolutamente.

P3. Estudie la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(k-1)!}}{\prod_{j=1}^{k}(1+\alpha\sqrt{j})}$ para $\alpha > 1$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$ (Ind: demuestre que $\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$)

SEMANA 14

Series de potencias

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Definición (Serie de potencias) Una serie de potencias es una serie en donde el término general es de la forma $a_k\,(x-\alpha)^k$.

No es difícil notar que la convergencia de estas series depende fuertemente del valor de x. Nosotros nos concentraremos en el caso de series de potencias centradas en cero, es decir, consideraremos solamente el caso $\alpha = 0$.

Ejemplo 14.1.
Consideremos la serie de potencias $\sum x^k$. Esta serie corresponde a una serie geométrica con razón x. Sabemos que si $|x| < 1$ esta serie converge absolutamente y que si $|x| \geq 1$ diverge. Esto quiere decir que en el intervalo $(-1,1)$ podemos definir la función $g\,(x) = \sum x^k$. En este caso podemos calcular el valor de la serie de modo que $g\,(x) = \frac{1}{1-x}$ para $x \in (-1,1)$.

Al analizar el ejemplo anterior parece natural que si la serie converge para x_0 lo haga también para x con $|x| \leq |x_0|$ y recíprocamente, que si diverge para x_0 también lo haga para valores de x con $|x_0| < |x|$.

La siguiente proposición nos acerca a la respuesta.

Proposición 14.1. *Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a,a]$ la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.*

Demostración. Para $x \in [-a,a]$ y $r = \left|\frac{a}{x_0}\right|$ la sucesión $(|a_n x^n|)$ es mayorada por $|a_n x^n| \leq |a_n|\,a^n \leq |a_n|\,|x_0|^n \left(\left|\frac{a}{x_0}\right|\right)^n = |a_n|\,|x_0|^n\,r^n$.

El término $|a_n x_0^n|$ es acotado (converge a cero) pues $\sum a_k x_0^k$ es convergente. Entonces, $|a_n x^n| \leq M r^n$. El lado derecho es una constante por el término general de una serie geométrica con razón $r < 1$. Usando el criterio de mayoración concluimos que la serie $\sum a_k x^k$ converge para todo $x \in [-a,a]$. $\square$

14.1 Radio e intervalo de convergencia

Notar que la Proposición 14.1 nos dice que si $\sum a_k x_0^k$ diverge entonces también diverge la serie $\sum a_k x^k$ para $|x| > |x_0|$. Definamos

$$R = \sup\left\{x_0 : \sum a_k x_0^k < +\infty\right\}.$$

Este valor es finito si existe algún x para el cual la serie $\sum a_k x^k$ diverge y vale $+\infty$ en otro caso.

Definición (Radio de convergencia) Al valor R lo llamaremos el *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum a_k x^k$.

La Proposición 14.1 nos asegura que para todo $x \in (-R, R)$ la serie converge y para todo $x \notin (-R, R)$ la serie diverge. Si aplicamos el criterio del la raíz n-ésima a la serie $\sum a_k x^k$ obtenemos $r = |x| \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Entonces, $\rho = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ es igual a $\frac{1}{R}$ cuando $R \neq 0$ y vale cero cuando $R = +\infty$, con lo que tenemos una manera de calcular R basada solamente en (a_n).

Definición (Intervalo de convergencia) Llamamos *intervalo de convergencia* I al conjunto de reales x para los cuales la serie $\sum a_k x^k$ converge. Tenemos que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

Ejemplo 14.2.
Dependiendo de la serie se puede tener que $I = (-R, R)$, $I = (-R, R]$, $I = [-R, R)$ o $I = [-R, R]$.

Caso. $I = (-R, R)$. $\sum (-1)^k x^k$. Para $x \in (-1, 1)$ podemos aplicar el criterio de Leibnitz y concluir que la serie converge. En $x = 1$ la serie diverge y lo mismo ocurre para $x = -1$. Entonces, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$ y su intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

Caso $I = (-R, R]$. $\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Para $x = -1$ la serie es $\sum -\frac{1}{k}$ que diverge. Para $x = 1$ la serie es $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ que converge. Luego el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $(-1, 1]$.

Caso $I = [-R, R)$. $\sum \frac{x^k}{k}$. Hacerlo como ejercicio. $R = 1$, $I = [-1, 1)$.

Caso $I = [-R, R]$. $\sum \frac{x^k}{k^2}$. Para $x > 1$ la serie diverge pues la sucesión $\frac{x^n}{n^2}$ diverge a infinito. Para $x = 1$ la serie converge por lo que su radio de convergencia es $R = 1$. Además para $x = -1$ la serie $\sum (-1)^k \frac{1}{k^2}$ converge absolutamente.

14.2 Series de potencias, integración y derivación

Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I, es posible definir naturalmente la función

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum a_k x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Mostraremos a continuación que esta función es integrable y derivable, y de manera fácil a partir de la serie de potencias original.

Veamos primero el siguiente teorema:

Teorema 14.1. *Sea* $\sum a_k x^k$ *una serie de potencias con radio de convergencia mayor que cero. Definiendo la función* f *como en (14.1), se tiene que ella es continua en* $int(\mathrm{Dom}\, f)$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathrm{Dom}\, f$ es un intervalo, entonces probar que f es continua en $\mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f)$ es equivalente a probar que

$$\forall q \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}(f)) \cap \mathbb{R}_+^*,\ f \text{ es continua en}(-q, q).$$

Sea entonces $q \in \mathrm{int}(\mathrm{Dom}\, f) \cap \mathbb{R}_+^*$. Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, la función:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Luego

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k x^k| = \sum_{k=0}^{n} |a_k||x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| q^k = \sum_{k=0}^{n} |a_k q^k|.$$

Sean $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k$ y $S = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^k|$. Para $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$ y $x \in [-q, q]$, se tiene

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k||x^k| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k q^k| = S_m - S_n.
\end{aligned}$$

En resumen, hemos probado que

$$\forall x \in [-q, q],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall m > n, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq S_m - S_n.$$

Haciendo $m \to \infty$, se deduce que

$$\forall x \in [-q, q],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq S - S_n. \tag{14.2}$$

Usando esto probemos que f es continua en $x_0 \in (-q, q)$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (-q, q) \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Veamos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq |S - S_n| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |S - S_n| \\
&\leq 2|S - S_n| + |f_n(x) - f_n(x_0)|
\end{aligned}$$

Sea entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S - S_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, luego

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|.$$

Ahora, como $f_{n_0}(x)$ es un polinomio de grado $\leq n_0$, entonces $f_{n_0}(x)$ es continua en x_0, por lo tanto

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Con este $\delta > 0$, se tiene lo buscado, es decir

$$\forall x \in (-q, q), \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

$\square$

Gracias a este teorema, tenemos que la función definida por la serie de potencias es integrable en $\operatorname{int}(I)$. Para ver que además es fácil integrarla, debemos probar el siguiente resultado:

Proposición 14.2. *Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Entonces para todo $p \in \mathbb{Z}$, la serie $\sum k^p a_k x^k$ tiene radio de convergencia R.*

Demostración. Sea $q \in (0, R)$, luego $\sum a_k q^k$ converge absolutamente. Gracias al Teorema 13.12, la sucesión $(a_k q^k)$ está acotada, digamos $|a_k q^k| \leq C$.

Luego para cualquier $x \in (-q, q)$,

$$|k^p a_k x^k| = \left| k^p a_k q^k \frac{x^k}{q^k} \right| \leq C k^p \left| \frac{x}{q} \right|^k.$$

Consideremos entonces la serie $\sum k^p z^k$, llamando $z = \left|\frac{x}{q}\right|$. Usando el criterio de la raíz n-ésima, tenemos

$$\sqrt[k]{k^p z^k} = z \left(\sqrt[k]{k} \right)^p \xrightarrow[k \to \infty]{} z.$$

Es decir, si $|z| < 1$ entonces $\sum k^p z^k$ converge. Por lo tanto, $\sum k^p a_k x^k$ converge absolutamente si $x \in (-q, q)$.

Como la serie $\sum k^p a_k x^k$ converge para todo $x \in (0, R)$, luego si el radio de convergencia de esta serie es R^*, entonces $R^* \geq R$.

Aplicando el mismo razonamiento, a la serie de potencias $\sum k^{-p} \cdot k^p a_k x^k = \sum k^{-p} \tilde{a}_k x^k$ (con $\tilde{a}_k = k^p a_k$), obtenemos que $R \geq R^*$. De donde se concluye el resultado. $\square$

Observación: Gracias a este último resultado, si $\sum a_k x^k$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces $\sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$ tiene también radio de convergencia $R > 0$.

Lo mismo sucede para la serie de potencias $\sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}$.

Probemos entonces que para integrar la función definida por una serie de potencias, basta integrar el término general de la serie.

Teorema 14.2. *Sea* $\sum a_k x^k$ *una serie de potencias, con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces la función* f *definida como en (14.1), es integrable en* $(-R, R)$ *y*

$$\forall x \in (-R, R), \quad \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (\sum a_k t^k)dt = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

Demostración. Gracias al Teorema 14.1, f es integrable.

Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, como en el Teorema 14.1:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Se tiene que

$$\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x (\sum_{k=0}^{n} a_k t^k)dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

Esto gracias a la observación de la Proposición 14.2.

Sea entonces $x \in (-R, R)$ y veamos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^x f_n(t)dt\right| &\leq \left|\int_0^x (f(t) - f_n(t))dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^x |f(t) - f_n(t)|dt\right|\end{aligned}$$

Y usando (14.2) en la demostración del Teorema 14.1,

$$\leq \left|\int_0^x |S - S_n|dt\right| \leq |x||S - S_n| \to 0.$$

Luego,

$$\int_0^x f_n(t)dt \;\to\; \int_0^x f(t)dt \quad \text{y} \quad \int_0^x f_n(t)dt \;\to\; \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1},$$

y por unicidad del límite,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

□

Además, gracias a este último teorema, se tiene la misma propiedad para el caso de la derivada.

Teorema 14.3. *Sea* $\sum a_k x^k$ *una serie de potencias, con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces la función* f *definida como en (14.1), es derivable en* $(-R, R)$ *y*

$$\forall x \in (-R, R), \quad f'(x) = \sum_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Gracias al Teorema 14.2, la serie de potencias $\sum_{k\geq 1} ka_k x^{k-1}$ es integrable en $(-R,R)$ y $\forall x \in (-R,R)$.

$$\int_0^x \big(\sum_{k\geq 1} ka_k t^{k-1}\big)dt = \sum_{k\geq 1} a_k k \frac{x^k}{k} = \sum_{k\geq 1} a_k x^k = f(x) - a_0.$$

Luego

$$f'(x) = \left(\int_0^x \big(\sum_{k\geq 1} a_k k t^{k-1}\big)dt\right)' = \sum_{k\geq 1} ka_k x^{k-1}.$$

□

Los resultados anteriores nos dicen que el radio de convergencia de una serie y el de la serie derivada son iguales. Más aún, lo mismo es cierto para la serie derivada por lo que también será cierto para las derivadas de cualquier orden. Entonces la función $f(x)$ que se obtiene de la serie de potencias es **infinitamente derivable** y todas sus derivadas tienen el mismo radio de convergencia.

Además se tiene que

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k\geq j} k(k-1)\cdots(k-j)\, a_k x^{k-j},$$

es decir, la serie que se obtiene al derivar término a término la serie de la función f representa la derivada de orden j de f. De aquí que, $f^{(j)}(0) = a_j j!$, y entonces el término a_j de la serie que representa a f debe ser $\frac{f^{(j)}(0)}{j!}$, es decir, aquel de la serie de Taylor para f en torno a cero.

Ejemplo 14.3.

1. Consideremos $f(x) = e^x$. Sabemos que $f^{(j)}(0) = e^0 = 1$ para todo $j \geq 0$. Entonces la serie candidata es $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dado cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^k}{k!}$ existe pues $\frac{x_0^{k+1}k!}{(k+1)!x_0^k} = \frac{x_0}{k+1} \to 0$. Esto dice que el radio de convergencia es infinito y entonces la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Utilizando las fórmulas del residuo para el desarrollo de Taylor es posible probar que para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$. De modo que no es novedoso que la serie derivada $\sum k\frac{x^{k-1}}{k!}$ sea igual a $\sum \frac{x^k}{k!}$.

2. Busquemos una serie que represente a la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Se tiene que $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ y en general

$$f^{(j)}(x) = (-1)^{j+1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{(2j-1)}{2}(1+x)^{-\frac{2j+1}{2}}$$

Luego $f^{(j)}(0) = (-1)^{j+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{2^j}$ y el término $a_j = (-1)^{j+1}\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{2^j j!}$. La serie $\sum a_j x^j$ converge para $|x| < 1$ pues $\frac{\frac{1\cdot 3\cdots(2j+1)}{2^{j+1}(j+1)!}}{\frac{1\cdot 3\cdots(2j-1)}{2^j j!}}|x| = \frac{(2j+1)}{2(j+1)}|x| \to |x|$. De modo que el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo es $I = (-1,1)$ pues la sucesión a_k no converge a cero.

14.3 Álgebra de series de potencias

Las series de potencias se pueden sumar y multiplicar y los radios de convergencia de las series resultantes estarán determinados por aquellos de las series originales.

Teorema 14.4. *Dadas dos series de potencias* $\sum a_k x^k$ *y* $\sum b_k x^k$ *convergentes para* x_0*. Entonces la serie* $\sum (a_k + b_k) x^k$ *converge para todo* $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ *y se tiene que* $\sum (a_k + b_k) x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$*. Además, si* $c_k = \sum^k a_j b_{k-j}$ *la serie* $\sum c_k x^k$ *converge para todo* $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ *y se tiene que* $\sum c_k x^k = \left(\sum a_k x^k\right)\left(\sum b_k x^k\right)$*.*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Ejemplo 14.4.
Calculemos el producto $\left(\sum \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum \frac{x^k}{k!}\right)$. El coeficiente $c_k = \sum^k \frac{1}{j!}\frac{1}{(k-j)!} = \frac{2^k}{k!}$. Entonces, $\sum c_k x^k = \sum \frac{(2x)^k}{k!} = e^{2x}$. Natural.

Guía de Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes series se pide encontrar el radio y el intervalo de convergencia.

(a) $\sum \frac{x^{2k+1}}{k!}$

(b) $\sum \frac{x^k}{\sqrt{k^2+3}}$.

(c) $\sum \frac{x^k\sqrt{k}}{3^k}$.

(d) $\sum x^k \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

(e) $\sum \frac{x^k}{k^\alpha}$.

(f) $\sum (-1)^k x^{2k+1}$.

(g) $\sum \frac{x^k}{2k+1}$.

(h) $\sum x^k \frac{(1+\operatorname{sen}(k))}{k}$.

(i) $\sum x^k \frac{(k+2)(k+1)}{2}$.

(j) $\sum \left(\frac{a^k}{k}+\frac{b^k}{k^2}\right) x^k$ con $a > b > 0$.

2. **(a)** Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$.

(b) Pruebe que $\arctan(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ en $(-1,1)$.

(c) Deduzca una serie para calcular π.

3. Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1-x\ \operatorname{sen}^2(t)} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$, con $|x| < 1$.

Indicación: Recuerde que $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, si $|x| < 1$.

Guía de Problemas

P1. **(a)** Para la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^k}{k}+\frac{b^k}{k^2}\right)(x-1)^k \quad 0<b<a,$$

encuentre: Radio de convergencia e intervalo de convergencia. Estudie además la convergencia en los extremos derecho e izquierdo del intervalo.

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

Indicación: Recuerde que $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$.

(c) Concluya que: $\dfrac{\arctan(a)}{a}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2n}}{2n+1}$.

P2. **(a)** Determine el intervalo de convergencia para la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k$. No olvide analizar los extremos del intervalo.

(b) Encuentre los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{x}{1-x})^k$ converge.

(c) Sea $f\colon C\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{x}{1-x})^k$.

(c1) Demuestre que $f'(x)=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}$.

(c2) Integrando, encuentre una expresión explícita para $f(x)$.

P3. **(a)** Analizar la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ y $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\ln(k)}$.

(b) Calcular el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\frac{x^k}{k\ln(k)}$.

(c) **(c1)** Calcular el radio de convergencia R de la serie $f(x)=\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k(k+1)}$.

(c2) Demostrar que para todo $x\in(-R,R)$ se tiene que $(xf(x))''=\frac{1}{1-x}$.

(c3) Demostrar que para todo $x\in(-R,R)\setminus\{0\}$ se tiene

$$f(x)=\frac{1+(1-x)(\ln(1-x)-1)}{x}$$

.

P4. **(a)** Determine la función e intervalo de convergencia asociada a la serie $\displaystyle\sum_{0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

(b) Pruebe que $\arctan(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ en $(-1, 1)$.

(c) Deduzca una serie para calcular π.

P5. Encuentre el desarrollo en serie potencias de las siguientes funciones y determine radio e intervalo de convergencia.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(1 - x)(1 + 2x)}$.