

Hola! Estamos en un nuevo capítulo,
veremos rápidamente un resumo y termino del
pasado, ante cualquier cosa.

- Foro
- Correo (pierrez@dim.uchile.cl)
- Verme en la calle y preguntar

P2) Cómo convergo una sucesión?

$$S_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \text{ tal que } \forall n > N, |S_n - l| < \epsilon$$

Esto debemos
tenerlo muy claro
y todas sus
equivalencias!

si encuentra alguien que no converge, siendo S_n como.

a) $u_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$; si tomamos $f(n) = 2n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
de forma evidente es creciente estricta (podemos decir esto por intuición)
Luego $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) \rightarrow$ múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.
Oscila $\rightarrow (-1)^k$; $k = 2n+1$
 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

Como no converge para al menos 2 sucesiones, muete!
∴ no converge.

$$b) V_m = \left(-1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Page 2

$f_1(m) = 2m \rightarrow$ función estrictamente creciente

$f_2(m) = 2m+1 \rightarrow //$

$$V_{f_1}(m) = \left(-1 + \frac{1}{2m}\right)^{2m}$$

$$= \left(\cancel{(-1)}^{2m} \left(1 - \frac{1}{2m}\right)\right)^{2m} = \left(1 - \frac{1}{2m}\right)^{2m}$$

$$\rightarrow e^{-2} = \lim S_{f_1}(m)$$

$$V_{f_2}(m) = \left(-1 + \frac{1}{2m+1}\right)^{2m+1}$$

$$= \cancel{(-1)}^{2m+1} \left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)^{2m+1}$$

$$= - \left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)^{2m+1} \rightarrow -e^{-2} = \lim S_{f_2}(m)$$

~~$\lim S_{f_1}(m) \neq \lim S_{f_2}(m)$~~ mató puto $\frac{+wz}{f}$
 $wz = (wz)$



Primero problemas b) (x_n) tiene alguna subsecuencia convergente;

En virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada tiene al menos una subsecuencia convergente.

Sabio Petro.

Si está acotada ¿veremos! pero ¿quién? x_n pues.

$\forall x \in \text{Dom } f = \mathbb{R}, f(x) \leq f(x)$, pues es mínimo global.

todo elemento es mayor o igual al mínimo

¿Qué pasaba si una función es continua $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ se usará! 

Procedamos por contradicción, diremos que

x_n no es acotada (superior e inferior)

Entonces $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mid |x_n| > M$

Después claro con índices definiremos lo siguiente.

M_1	M_2	M_k
$\exists \downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
x_{m_1}	x_{m_2}	x_{m_k}

La ordenamos tal que sea estrictamente creciente

def 1 punto 

Después $|x_{m_n}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, pero $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$
 Pero $f(x_{m_n}) \leq f(x) + \frac{1}{m_n} \Rightarrow +\infty \leq f(x) + 0$ (Es mayor que todo) 

Entonces X_n acotado, en virtud de
T B-W tiene alguna sub sucesión convergente.

b) ✓

a) si $X_{p(m)} \rightarrow l \Rightarrow l = \bar{x}$

tenemos $f(x_m) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{m}$

Luego $f(\bar{x}) \leq f(x_m)$, como es mínimo

$$f(\bar{x}) \leq f(x_m) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{m}$$

En particular para sub sucesiones

$$f(\bar{x}) \leq f(x_{p(m)}) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{p(m)} \quad ; \quad p(m) \text{ creciente}$$

Estrecha.

Por continuidad $X_{p(m)} \rightarrow l \Rightarrow f(x_{p(m)}) \rightarrow f(l)$

Luego por teo sandwich

$$f(l) = f(\bar{x}) \quad ; \quad \text{pero } \bar{x} \text{ es mínimo y único}$$

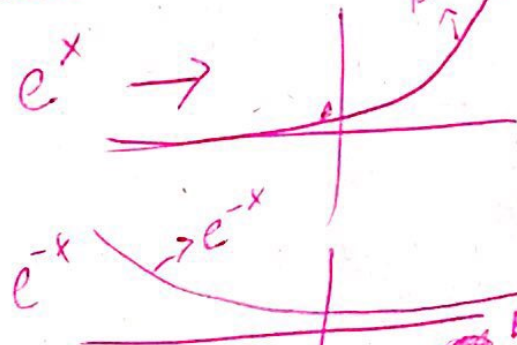
$$\Rightarrow l = \bar{x} \quad \square$$

P2) Definimos función en $\mathbb{R}$.

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Verif. que: Continuidad. en $\mathbb{R}$,
 que $\tanh(0) = 0$, y que
 $-1 < \tanh(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Qué debo saber? Pag 6



Me las debo saber? **Sí!!!**

1) Primero al ver una función debo verificar que
 este bien definida. Como $\frac{a}{b}$, verifico $b \neq 0$
 $e^x + e^{-x} \neq 0$, en efecto. $e^x > 0, \forall x$
 $e^{-x} > 0, \forall x$

luego que está bien definida
 Prosigo.
$$e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

c) Muestre que $L_{2n} = (t, s)$.

Pag 7

Después veo $\tanh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}} = \frac{0}{2} = 0 //$

$\therefore \tanh(0) = 0$

Después quiero probar $-1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x) < 1$

① $0 < e^x / 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2 \cdot 0 < 2e^x$

$\Rightarrow 0 < e^x + e^x / -e^x$

$\Rightarrow -e^x < e^x / 1 - e^{-x}$

$\Rightarrow -e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x}$

$\Rightarrow -1(e^x + e^{-x}) < e^x - e^{-x}$

$\Rightarrow -1 < \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x)$

① ✓



¡VAMOS!

siempre positivo
por lo que se multiplica, similitud

a) Muestre que $D_{2n} = \{id, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, donde r es la rotación a la izquierda y s es una simetría axial fija. Concluya cuánto vale su cardinal.

b) Verifique si D_{2n} es un grupo abeliano.

c) Muestre que $D_{2n} = \langle r, s \rangle$.

$$0 < e^{-x}/2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 0 < 2e^{-x}$$

$$\Rightarrow 0 < e^{-x} + e^{-x}$$

$$\Rightarrow -e^{-x} < e^{-x} / e^x$$

$$\Rightarrow e^x - e^{-x} < \underbrace{(e^x + e^{-x})}_{(+)} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh(x) < 1$$

(2) ✓

$$(1) + (2) \Rightarrow \boxed{\text{true}}$$

Página

La intuición para este ejercicio es tomar la desigualdad que se desea probar, luego a través de equivalencias.

Ahora que
Pasa con la
continuidad
Por apunte se
tiene que $g(x) = e^x$
continúa, luego

Onda	PDQ
Pasa "a"	Lo que
Desarrollo	Entrego
sin mostrar	En efecto:
"a"	$\Rightarrow$ Verdad absoluta
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$ "a"
$\Rightarrow$	
$\Rightarrow$	
$\Rightarrow$	Verdad Absoluta

$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ continúa en todo su
dominio por Alg-Composición
de continuas //

SIEMPRE

P2) b) No tenemos que nos pide ver el $\lim$ ^{Por q}
ahora de la sucesión y no la función

(Porque es sucesión, depende de $m \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tanh(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} = \frac{\infty - 0}{\infty + 0} = \frac{\infty}{\infty} \quad [\text{Abuso de Notación}]$$

El plan es usar TEOREMA SÁNDWICH. Busquemos buenos cotas.

Por a) $-1 < \tanh(x) < 1$ ^{$x=m$} , $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular $x=m, m \in \mathbb{N}$
Si agitando el denominador se achica, e^{-3m}

$$\textcircled{1} \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m} + 2e^{-m}} < \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} < 1$$

$$= \frac{e^m - e^{-m} + 4e^{-m} - 4e^{-m}}{e^m - e^{-m} + 4e^{-m}} = \frac{e^m - e^{-m} + 4e^{-m}}{e^m - e^{-m} + 4e^{-m}} - \frac{4e^{-m}}{e^m + 3e^{-m}} < \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} < 1$$

Combiéssgna.

tomando
lim Pot
T.S

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4e^{-m}}{e^m + 3e^{-m}} \right) < \lim_{m \rightarrow \infty} \tanh(m) < \lim_{m \rightarrow \infty} 1$$

Luego $\lim_{m \rightarrow \infty} \tanh(m) = 1$

Además el $\lim_{m \rightarrow -\infty}$ es análogo con cambio de variable $k = -m, m \in \mathbb{N}$

Con esto tenemos listo lo pedido

c) $\forall y \in (-1, 1), \exists x \in \mathbb{R} \quad \tanh(x) = y$

10

Tal como dice la indicación
mos vamos por casos, pero antes!

1) Definimos $g(x) = \tanh(x) - y$, sea $x > 0, x' < 0$

$$g(x) \cdot g(x') = (\tanh(x) - y)(\tanh(x') - y)$$

Notemos que $\tanh(x) > 0$ y $\tanh(x') < 0$.

Gráfica y lo que sabemos.

Casos!! ①

Si: $-1 < y < 0$
 $\tanh(x) - y > 0, \forall x > 0$
 $\tanh(x') - y < 0$, Para algún x'
 pues por b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = -1$
 $\Rightarrow \exists x' < 0$ tal que $\tanh(x') < -y$

② Si $0 < y < 1$
 $\tanh(x) - y > 0$, pues como
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1$, $\Rightarrow \exists x > 0$
 tal que $\tanh(x) > y$
 $\Rightarrow \tanh(x') - y < 0, \forall x' < 0$

③ Si $y = 0$
 $\tanh(x) - y > 0, \forall x > 0$
 $\tanh(x') - y < 0, \forall x' < 0$

Ojo siempre

En todos los casos $\exists x' \neq x$ tal que
 cambia de signo, por IVT $\exists x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0$
 $\Rightarrow \tanh(x) - y = 0 \Rightarrow \tanh(x) = y$

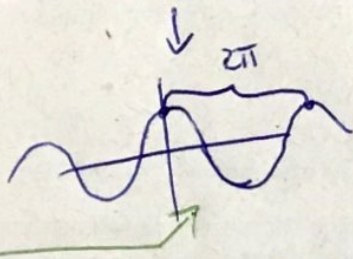
Análogo con IVT generalizado

b) Verifique si D_{2n} es un grupo abeliano.
 c) Muestre que $D_{2n} = \langle r, s \rangle$.

11

Terminando c) ✓

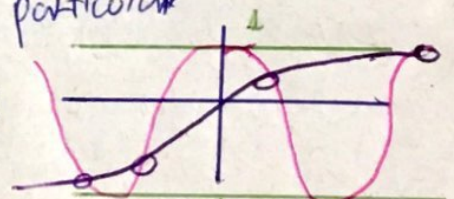
d) Basta notar que $\forall y \in (-1, 1), \exists x \in \mathbb{R} / \tanh(x) = y$, en particular $\cos(x) \in (-1, 1), \forall x \in \mathbb{R}$, pero que ocurre con los bordes? los excluimos si encontramos 1 solución y agregamos los infinitos otros de $\cos(x)$ gente!



entonces sea $\tanh(x) = \cos(z)$,

$z \in (0, \pi)$ fijo, me aseguro que no indujo, $\text{bordes}(\cos(z) = \pm 1)$, luego basta la solución de ecuación $\tanh(x) = \underbrace{\cos(z)}_{\in (-1, 1)}$, por c)

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall \cos(z) \in (-1, 1) / \tanh(x) = \cos(z)$, en particular $x + 2k\pi \in \mathbb{R} \Rightarrow$ infinitas soluciones



c) Muestre que $D_{2n} = \langle r, s \rangle$.

a) Parte a) en la guía!

b) Estudiemos x^2 .

¿Qué es uniforme continuidad?

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid (\forall x, y \in A) \mid x - y \mid \leq \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid \leq \varepsilon$$

Assumamos que es unif. cont.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid (\forall x, y \in \mathbb{R}) \mid x - y \mid \leq \delta \Rightarrow \mid x^2 - y^2 \mid \leq \varepsilon$$

Como es $\forall \varepsilon > 0$ puedo particularizarlo $\varepsilon = 1$;

Puego claro $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ Así que δ ya lo como como,

$$\Rightarrow \forall x, y \mid x - y \mid \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \mid x^2 - y^2 \mid \leq 1$$

$$y = x + \delta$$

$$\forall x \mid x - (x + \delta) \mid \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \mid x^2 - (x + \delta)^2 \mid \leq 1$$

$$\Rightarrow \mid -2x\delta - \delta^2 \mid \leq 1$$

$$\Rightarrow \mid 2x\delta + \delta^2 \mid \leq 1$$

luego basta x extrema bastante grande y tenemos contradicción, verifiquemoslo!

$$x = \frac{e^{245003}}{\delta} - \frac{\delta}{2} \Rightarrow \left| 2 \cdot \left(\frac{e^{245003}}{\delta} - \frac{\delta}{2} \right) \delta + \delta^2 \right| \leq 1$$

$(2e^{245003} - \delta) \leq 1$

CONTRADICCIÓN

c) Establece la continuidad uniforme en $(0,1)$

1) $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Note mos que definimos

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{por qué?}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \sin(\infty)$$

que ocurre $-1 \leq \sin(u) \leq 1$; $u = \frac{1}{x}$
 $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ luego es Acotada

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ por criterio de mla

Por acotada luego Por teorema

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ A cerrado y acotado
 $\Rightarrow f$ unif. continua $\Leftrightarrow$ continua

luego como es continua, es unif continua! //

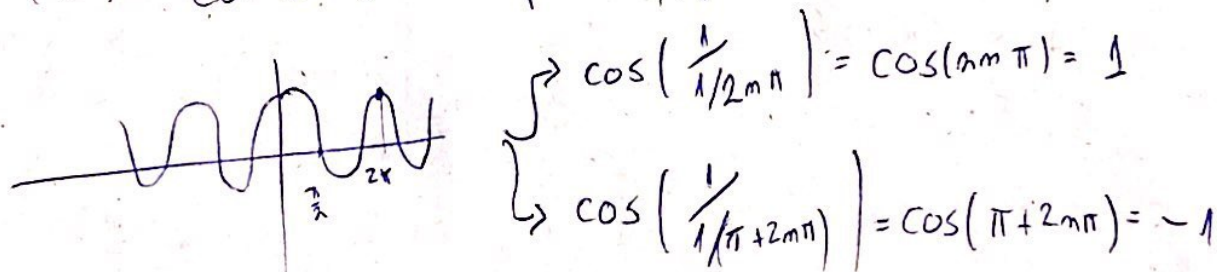
2) $e^x \cos(\frac{1}{x})$ intuición, yo veo e^x y
sospedo la ea.

Supongamos que es unif. cont.

$$\Rightarrow \forall (x_m), (y_m) \in \underbrace{A}_{Dom} \approx [0, 1], |x_m - y_m| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x_m) - f(y_m)| \rightarrow 0$$

Sea $x_m = \frac{1}{2m\pi}$ y $y_m = \frac{1}{\pi + 2m\pi}$, $m \in \mathbb{N}$

$\cos(\frac{1}{x})$ Como se comporta? ponemos $\cos(y)$



tenemos $|x_m - y_m| \rightarrow 0$? Si! pues $x_m \rightarrow 0$
 $y_m \rightarrow 0$.

Luego deberíamos tener $|f(x_m) - f(y_m)| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \left| e^{\frac{1}{2m\pi}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1/2m\pi}\right) - e^{\frac{1}{\pi + 2m\pi}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1/\pi + 2m\pi}\right) \right| \rightarrow 0$$

~~Luego~~ Luego si $m \rightarrow \infty \Rightarrow \underbrace{\left| e^{\frac{1}{2m\pi}} \cos(2m\pi) - e^{\frac{1}{\pi + 2m\pi}} \cos(\pi + 2m\pi) \right|}_{\substack{e^0 = 1 \\ \text{---} \\ 2}} \rightarrow \underbrace{1 - (-1)}_{\substack{e^0 = 1 \\ \text{---} \\ 2}} = 2$

Ya terminamos !

Cualquier duda a pyanez@din.uchile.cl