Hola chicos! Espero estén de lo mejor :)

S4] Ideas y datos útiles

Acá son los mini apuntes que les mencioné.

- Máximo/mínimo $f(x)' = 0$ $\quad$ Como justifico

1) $\nearrow$ en acotado
2) Criterio + adelante
3) gráfico

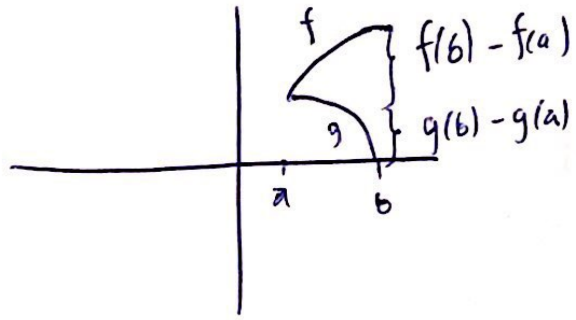
- **TVM** Sea $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fns continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ /

$$\left.\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\right\} \text{forma general}$$

si $g(x) = x$

$$\left.\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\right\} \text{Caso particular y más útil}$$



Dem: función conveniente

Luego al fin podemos justificar L'Hôpital!

Abuso de notación.

su forma de aplicarlo es tomar $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{0}{0}$

$\approx \frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$

∞^{∞} 0^{1}

Recuerdo preguntar desarrollo semestre pasado

$x \to \infty$

L'Hôpital aparña para todo? $\frac{\infty}{0}$ No! $\frac{\operatorname{sen}(x) + x^2}{x^2}$

Mencionar la derivada es!

$x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $x \to 0$

Ahora podemos estudiar asíntotas de mejor manera.

$y = mx + n$, pero las horizontales y verticales ya las conocemos, entonces estudiemos oblicuas! → Una recta en $\mathbb{R}^2$: que cuando $x \to \pm\infty$ no la toca ni a palos!

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

↓ este mem en realidad es calculable con L'Hôpital

$$m = \lim_{x \to \infty} f'(x)$$

Derivadas y Monotonía:

Nos da el Teorema 2.6

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua $[a,b]$ y derivable en (a,b), si $f'(x) \geq 0$ (respectivamente ≤ 0), $\forall x \in (a,b)$
$\Rightarrow f$ es creciente o decreciente, respectivamente)

Luego vemos Convexidad → lo que se reduce a su criterio y la desigualdad.

Generamos Teo 2,7 $f'(x) \nearrow$ cvx a saber

$\searrow$ ccv

la recta $\geq$ curva

Luego aproximaciones → aproximemos su resumen a Taylor ¡¡ Literal es lo importante (+) lo que sabemos!

Acá acaban los apuntes mencionados

P1)- Lo primero a recordar es lo siguiente

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniforme continua si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \setminus \forall x, y \in A \; |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Pruebe que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$$

sin perdida de generalidad

Intuición: En un comienzo puedo pensar que SPG $x < y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq -x + y$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{-\cos(x) + \cos(y) \leq y}_{\text{es análoga}} \underbrace{- x \leq \cos(x) - \cos(y)}_{\text{la pruebo por separado}}$

Pero __________ modia matraca, mejor no, tengo una desigualdad, pero yo se que cosas con valor absoluto no da varias soluciones y no será tan rentable.

La intuición me dice que no debo ir por acá.

I) Luego PDQ $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$

Como no dice $\forall x, y \in \mathbb{R}$, y son arbitrarios puedo aduenarme de la tricotomía (Kisawea?)

(Un real es $\oplus \vee \ominus \underline{\vee}\ 0$
además 2 reales $x < y \vee x > y \underline{\vee}\ x = y$)

- Sea arbitrario $x, y \in \mathbb{R}$, tq $x < y$, tenemos por apunte $\cos(x) = f(x)$ es derivable y continua en todo $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ En particular será continua $[x, y]$ y derivable!
↳ en su int
$\text{int}[x, y] = (x, y)$

Notar que estará bien definida!
no muere

Luego verificamos todas las hipótesis? No!
$x \neq y$ se tiene y $x' \neq 0$
una vez con esto cumple hipótesis TVM

$\Rightarrow \exists \xi \in [x, y]$ tal que

$$\frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} = \cos'(\xi) = -\text{sen}(\xi)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -\text{sen}(\xi)(x-y) \quad / |\cdot| \text{ continua}$$

$\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$ $$|\cos(x) - \cos(y)| = |-\text{sen}(\xi)||x-y| \leq 1 \cdot |x-y|$$

$\Rightarrow$ $$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y| \ //$$

II) Con la parte anterior notemos

1) $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|$ ¿Cual es el motivo porque pudo hacer esto?

Por el recuerdo de una función uniforme continua tiene una hipótesis que es $\|x-y| \leq \delta$, luego esto es una parte de la desigualdad

$\underbrace{|x-y| \leq \delta \Rightarrow}$

basta tomar $\delta = \varepsilon$

$\Rightarrow$ 1) $\rightarrow$ $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y| \leq \varepsilon$ que probe en la parte anterior.

$\Rightarrow |\cos(x) - \cos(y)| \leq \varepsilon$ - Ahora trabajo con la hipótesis para llegar a la tesis.

$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$

Ahora como $\delta(\varepsilon)$, y exclusivamente de ε, no del punto

$\therefore$ Uniforme continua

#

$$\underbrace{|x-y| \leq \delta}_{\text{Hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon}_{\text{tesis}}$$

+ desigualdad Parte I, ganamos!

P2) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)}$

Intuición: Cuál es? Yo veo un límite y lo primero que pienso es fuerza bruta y reemplazo, A veces nos quieren trolear y la respuesta es fácil

RIP tranquilo solo es abuso de notación

$$\Rightarrow \frac{e^0 - e^{-0} - 2\cdot 0}{0 - \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0}$$

super F

Si y Ash ganó la liga ynm, [Eso no pasó mode]

Pero tenemos L'Hôpital $\frac{0}{0}$

ABUSO DE NOTACIÓN

Voy pero de cabeza:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen}(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{1 - \cos(0)} = \frac{0}{0}$$

Pero tenemos L'Hôpital. $\frac{0}{0}$.

Voy pero de cabeza X2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{e^0 - e^{-0}}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0}$$

really nigga

Pero tengo L'Hôpital

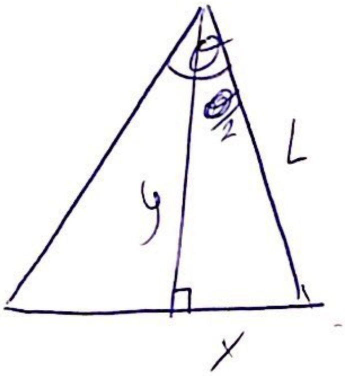
Voy de cabeza X3:::

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{1+1}{1}$$

lo logré we.

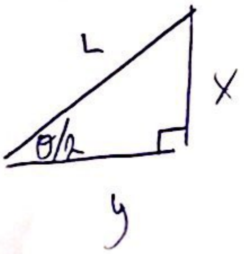
Moraleja, voy a hacer cuantos L'Hôpital sean necesarios para salvar esta compañía.

P3)



Intuición sacar Área en función de muchas cosas, luego dejar todo dado una variable para poder derivar e igualar a 0.

(Luego estudio si es min o máx



$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{x}{L} \Rightarrow x = L\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{L} \Rightarrow y = L\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{2\,\frac{L\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot L\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}}{2} = \frac{L^2\operatorname{sen}(\theta)}{2} = A(\theta)$$

$$A'(\theta) = 0$$

$$\frac{L^2\cos(\theta)}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Claro, si tomo $k=1$

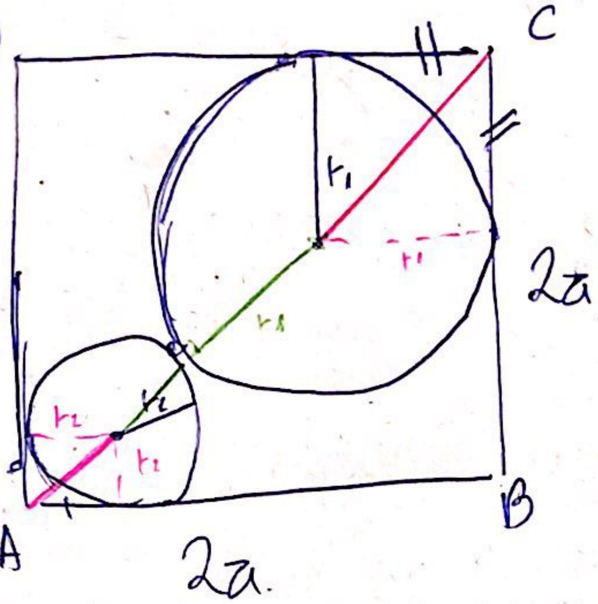
$\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi > \pi \therefore \notin [0,\pi]$

Pero $\theta \in [0,\pi] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

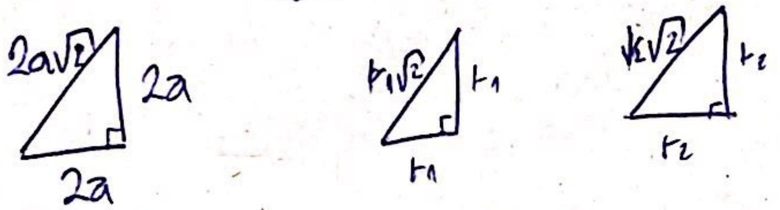
$$A''(\theta) = \frac{L^2 - \operatorname{sen}(\theta)}{2} \leq 0 \longrightarrow$$

Como es concava es máximo

b)



Buemo, mo sé hacer ⊙ ⊙ circumferencias.



Notemos que la diagonal de um cuadrado es $a\sqrt{2}$, siendo a el valor del lado, luego por teorema de cuerdas tangentes

com el punto coincidente exterior a esta.

luego la diagonal grande será la suma de los trazos.

$$2a\sqrt{2} = r_2\sqrt{2} + r_2 + r_1 + r_1\sqrt{2} \;//$$

6,2) Determinar r_1 y r_2 para que las sumas de las áreas sea máxima.

Utilizaremos $A'(x) = 0$, como meta principal.

- Luego la función que determina el área será

$$A(r_1, r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \quad \text{área circunferencia}, \quad r_1, r_2 \in [0, a] \rightarrow$$ si supera esto no está en el cuadrado.

De la relación anteriormente probada, sale

$$2a\sqrt{2} = r_1\sqrt{2} + r_1 + r_2 + r_2\sqrt{2}$$
$$2a\sqrt{2} = r_1(\sqrt{2}+1) + r_2(\sqrt{2}+1)$$
$$\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = r_1 + r_2$$
$$\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - r_2 = r_1$$ la llamaremos Ecuación 🍎

Luego al reemplazar 🍎 en $A(r_1, r_2)$ pasa a ser $A(r_2)$; donde derivaremos respecto a r_2 e igualaremos a 0.

Scanned with CamScanner

$$A(r_1, r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$A(r_2) = \pi \left(\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - r_2 \right)^2 + \pi r_2^2$$

$\underbrace{\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}$ constante $\in \mathbb{R}$, lo llamaremos ☺ = "cosa"

$$A(r_2) = \pi\left(☺^2 - 2☺ r_2 + r_2^2\right) + \pi r_2^2$$

$$A(r_2) = \pi\left(☺^2 - 2☺ r_2 + 2 r_2^2\right), \ / ()'$$

$$A'(r_2) = 0 = \pi\left(\cancel{(☺^2)'}^{\,0} - 2☺ + 4 r_2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2☺}{4} = r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{☺}{2} \Big\} \text{ candidato para max}$$

Para que efectivamente sea máximo debe cumplir criterio segunda derivada.
la cual es $f(x)'' < 0 \Rightarrow x$ máximo, si $f(x)' = 0$.

Veamos $A''(r_2) = 4\pi > 0$ ⚡ entonces? ¿Qué?

no hay máximo, pero si recordamos algo....

/begin{teo}

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, si $[a,b]$ es cerrado y acotado, y f es una función continua, so alcanza máximo y mínimo en el dominio.

Weierstras.

/end{teo}

y veamos $\boxed{A(r_2):[0,a]\to\mathbb{R}}$ es continua en todo su dominio!, pero no funcó mi candidato.

¿Donde estará mi candidato!!! ¡En la frontera!

Entonces $r_2=0 \vee r_2=a$, pero existen ambas circunferencias $\underline{r_2\neq 0}$

Luego si $r_2=a$

Entonces de ecuación

$$r_1=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-r_2=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-a$$

mikita mi pone.

$$=\frac{2a\sqrt{2}-a\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+1}=\frac{a\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{a(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=a(3-2\sqrt{2})$$

luego

si $r_1 = \dfrac{2\sqrt{2}\,a}{\sqrt{2}+1} - a = a(3-2\sqrt{2})$; $r_2 = a$

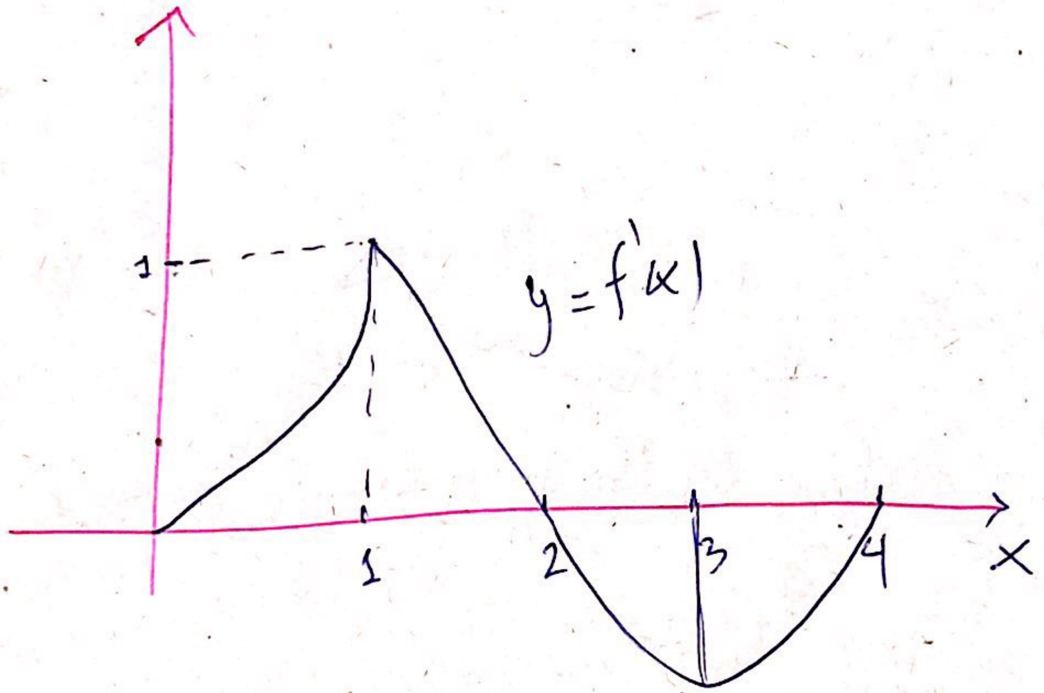
$\Rightarrow A(r_1, r_2) = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= \pi a^2 + \pi(a^2(9-12\sqrt{2}+8))$

$= \pi a^2(18-12\sqrt{2})$ //

Era el máximo que buscamos!

P4)



Lo que hay que tener en cuenta es que es que hablamos de la derivada de la función, que es continua, desde un cerrado y acotado

1) En $[0,1)$: • $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente

• f' es creciente $\Rightarrow f$ convexa

• $x = 0$ mínimo local, como $f(x)$ es convexa

En $[1,2)$: • $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creciente

• $f'(x)$ decreciente $\Rightarrow f$ cóncava

• $x = 1$ es un punto de inflexión, dado que cambia su convexidad.

en $[2,3)$: • $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente

• $f'(x)$ decreciente $\Rightarrow f$ cóncava

• $x = 2$ máximo global como f crece antes y decrece en su dominio.

En $[3,4]$ · $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreciente
· $f'(x)$ Creciente $\Rightarrow f$ convexa
· $x = 3$ punto inflexión pues hay cambio de convexidad.
· $x = 4$ mínimo local por convexidad.

Ahora podemos ver algún criterio para ver si son locales o globales?

Pues si!

Por ser derivable (pues existe función)
$\Rightarrow f$ es continua, luego $[0,4]$ es un cerrado y acotado, por Waierstrass existe máx y mínimo.

$X = 2$ máximo global, no hay otro

$X = 0 \vee X = 4$ no puedo saber cual de los 2 es global !!

Para la última parte usaremos TVM, sea $x \in [0,4]$, notemos que f es continua en $[0,x]$, y derivable en $(0,x)$

$\Rightarrow$ por TVM $\exists c \in (0,x)$ tq

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

vale 1 por enunciado

(*) $\Rightarrow f(x) = f'(c)\,x + f(0)$

luego se que $f(2)$ es máximo, $x=2$.

$\Rightarrow$ ♡ $f(x) \le f(2)$, $\forall x \in Dom$.

(*) $\Rightarrow f(x) = f'(c)\,x + 1$, $x=2$

$f(2) = 2f'(c) + 1$; por gráfico $f'(x) \in [0,1]$ si $x \in [0,2]$

$f(2) \le 2 \cdot \overset{\text{máximo}}{1} + 1$

$f(2) \le 3$ $\rightarrow$ para por ♡

$f(x) \le f(2) \le 3$, $\forall x \in Dom$.

$\Rightarrow f(x) \le 3$ ■

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl