

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021

Profesor: Leonardo Sánchez Cancino

Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón



Auxiliar 7: Primitivas y Métodos de Integración

P1. Intuición y Resumen

Recuerdo:

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\text{int}(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in \text{int}(I), \quad F'(x) = f(x)$$

Si F es una primitiva de f , entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente
 - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
 - $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$
 - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
 - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$
- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x , entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

o, de manera compacta $\int u dv = uv - \int v du$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
 - para $a^2 + x^2$, usar $x = a \tan(v)$ o $x = a \operatorname{senh}(v)$
 - para $a^2 - x^2$, usar $x = a \operatorname{sen}(t)$ o $x = a \cos(t)$
 - para $x^2 - a^2$, usar $x = a \operatorname{sec}(v)$ o $x = a \operatorname{cosh}(v)$

obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]:** si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\operatorname{gr}(Q) > \operatorname{gr}(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.
- **[Integrales Trigonométricas]:** Sea $R(\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = \tan(x/2)$.

Primitivas conocidas:

$$a) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$$

$$b) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$c) \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$d) \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$e) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$g) \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$h) \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$i) \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$j) \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

$$k) \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = \operatorname{cotg}(x) + C$$

$$l) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

P2. Cambio de Variable

$$a) \int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}} d\theta$$

$$b) 1) \int \cos^5(x) dx$$

$$2) \int (x-1)\sqrt{x+4} dx$$

$$3) \int \frac{dx}{x-x^{\frac{3}{5}}}$$

$$4) \int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$$

P3. Integración por Partes

$$a) \int x^2 e^x dx$$

$$b) \int \cos(\ln(x)) dx$$

P4. Fracciones Parciales

$$a) \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$$

$$b) 1) \int \frac{dx}{1-x^2}$$

$$2) \int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$$

P5. Sustitución Trigonométrica

a)
$$\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx$$

b) 1)
$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$$

2)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

P6. Integral Trigonométrica

a)
$$\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)} dx$$